

4. Estabilidad del equilibrio

Vamos a estudiar la estabilidad (en sentido de Lyapunov) de la solución trivial $x \equiv 0$ de la ecuación

$$(*) \quad \ddot{x} = -V_x(t, x)$$

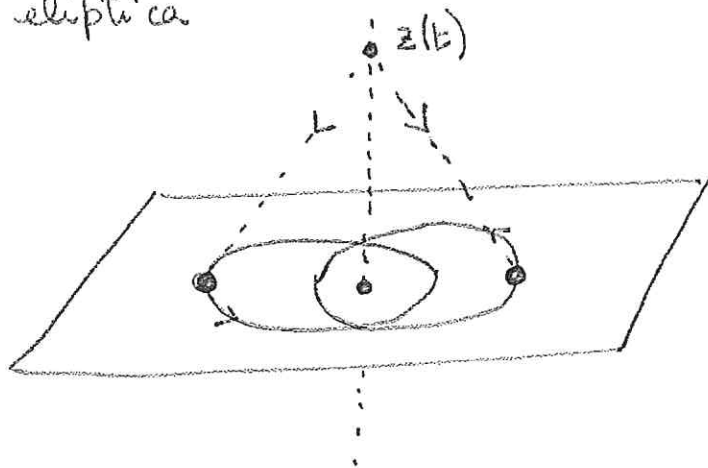
donde $V: \mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ es T -periódica en t y cumple $V_x(t, 0) \equiv 0$. Este es uno de los problemas de estabilidad más simples que aparecen en la teoría de sistemas hamiltonianos. Como ejemplos podemos considerar un péndulo de longitud variable

$$\ddot{x} + \alpha(t) \operatorname{sen} x = 0, \quad \alpha(t+T) = \alpha(t)$$

o la ecuación de Sitnikov

$$\ddot{z} = \frac{-2z}{(r(t, e)^2 + z^2)^{3/2}}$$

que aparece en el estudio de las oscilaciones verticales de un satélite cuando las primarias siguen una órbita elíptica



e excentricidad de las primarias,
 $e \in [0, 1[$

$T = \tilde{\text{año}} \text{ de las primarias}$
 2π

$r(t, e) = \text{distancia de las primarias al centro de masas}$

Suponemos que V es lo bastante regular para haya unicidad y existencia local para (*). La solución $x(t) \equiv 0$ es estable si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que si $x(t)$ es una solución de (*) con

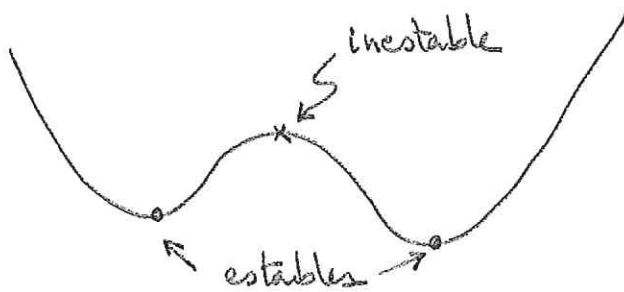
$$|x(0)| + |\dot{x}(0)| < \delta$$

entonces $x(t)$ está bien definida en todo \mathbb{R} y cumple

$$|x(t)| + |\dot{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta es la noción de estabilidad perpetua, que equivale a la noción de estabilidad de Lyapunov para el futuro y para el pasado.

Cuando la ecuación es autónoma, $V = V(x)$, el Teorema de Lagrange asegura que $x \equiv 0$ es estable si V alcanza un mínimo local estricto en dicho punto



Ejercicio 4.1 Prueba este resultado usando la conservación de la energía.

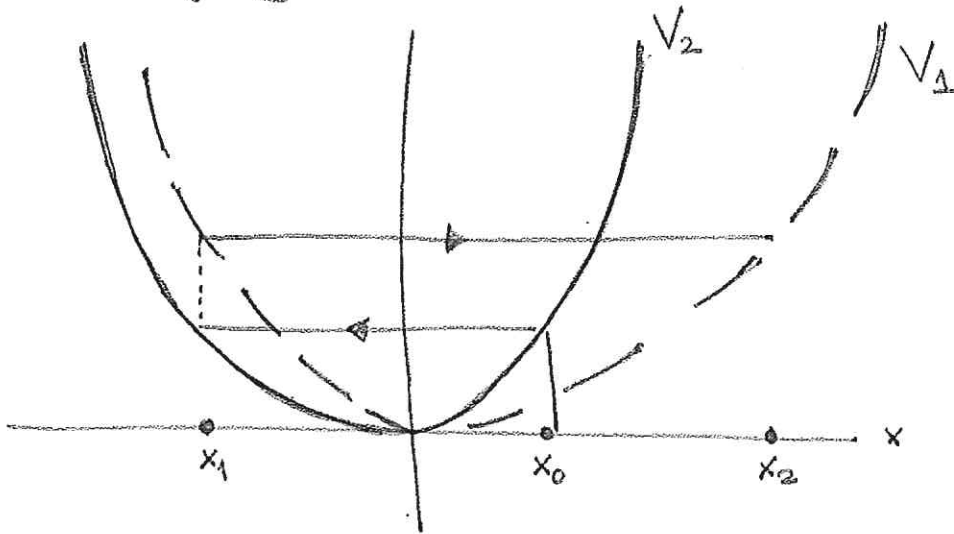
Para sistemas no autónomos puede ocurrir que

$$V(t, x) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \neq 0$$

$$V(t, 0) = 0$$

y que sin embargo $x \equiv 0$ sea inestable.

Para comprender este fenómeno vamos a hacer un experimento: consideramos dos potenciales V_1 y V_2 con las gráficas indicadas.



Vamos a definir un potencial $V(t, x)$ que alterne V_1 y V_2 según los valores de t . Comenzamos con V_2 y posamos una partícula sobre x_0 sin velocidad inicial. Después de un tiempo $\tau_1 > 0$ llegará a x_1 y se parará por la conservación de la energía.

$$\frac{1}{2} \dot{x}(\tau_1)^2 + V(x(\tau_1)) = \frac{1}{2} \dot{x}(0)^2 + V(x(0))$$

$$V(x_1) = V(x_0)$$

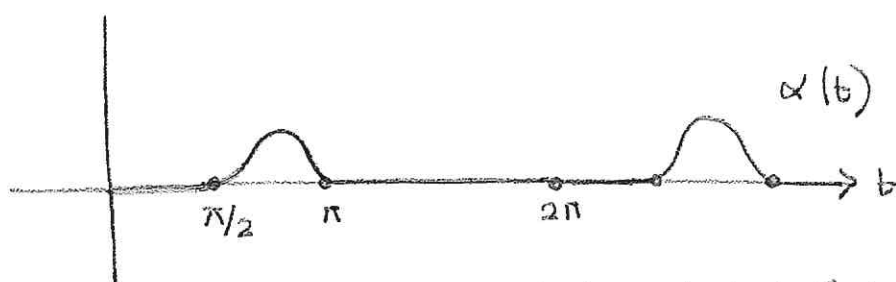
Ahora saltamos al potencial V_1 , y la partícula viajará desde x_1 hasta x_2 , donde de nuevo se parará en un instante $\tau_2 > \tau_1$. Continuando este proceso construiremos la función

$$V(t, x) = \begin{cases} V_2(x), & t \in]0, T_1[\\ V_1(x), & t \in]T_1, T_2[\\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

y vamos construyendo una solución que se aleja del origen. Queda pendiente una cuestión: ¿puede ocurrir esto cuando la dependencia del tiempo es periódica? Vamos a construir un ejemplo de manera precisa.

Ejemplo (El T^a de Lagrange no es válido para potenciales periódicos)

Sea $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función 2π -periódica que cumple $\alpha(t) > 0$ si $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\alpha(t) = 0$ si $t \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, 2\pi[$



Vamos a probar que la solución trivial de

$$\ddot{x} + x + \alpha(t)x^2 = 0$$

es inestable. Vamos a proceder en varios pasos:

i) $x \equiv 0$ es la única solución 2π -periódica

Se multiplica por $\sin t$ y se integra por partes en $]0, 2\pi[$; se llega a $\int_0^{2\pi} \alpha(t)x(t)^2 \sin t dt = 0$

para cualquier solución 2π -periódica. Por la forma de α ,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \alpha(t)x(t)^2 \operatorname{sen} t \, dt = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0 \text{ si } t \in [\pi/2, \pi]$$

Por unicidad para el problema de Cauchy, $x \equiv 0$.

ii) $x(2\pi) \geq x(0)$, $\dot{x}(2\pi) \geq \dot{x}(0)$

para cualquier solución $x(t)$ definida en $[0, 2\pi]$.

Se aplica la fórmula de variación de las constantes y se llega a,

$$x(t) = x(0) \cos t + \dot{x}(0) \operatorname{sen} t - \int_0^t \alpha(s)x(s)^2 \operatorname{sen}(t-s) \, ds$$

Haciendo $t=2\pi$ se observa que la integral es negativa, lo que implica $x(2\pi) \geq x(0)$. Derivando y haciendo de nuevo $t=2\pi$ se obtiene la desigualdad para la derivada.

iii) Las soluciones que empiezan en el primer cuadrante no pueden ser acotadas.

Partimos de $x(t)$ solución con $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$ y

suponemos que ~~$|x(t)| \leq M$ si $t \geq 0$. $\forall a$~~

$$|x(t)| + |\dot{x}(t)| \leq M \text{ si } t \geq 0.$$

Vamos a llegar a una contradicción. Aplicando

ii) de forma reiterada concluimos que las sucesiones $x(2\pi n)$ y $\dot{x}(2\pi n)$ son monótonas. Como también son acotadas serán convergentes

$$x(2\pi n) \rightarrow \xi, \quad \dot{x}(2\pi n) \rightarrow \eta$$

En particular $\xi > 0, \eta > 0$. Por ser la ecuación 2π -periódica, las funciones $x(t + 2n\pi)$ son también soluciones. Por dependencia continua

$$x(t + 2n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t), \quad \dot{x}(t + 2n\pi) \rightarrow \dot{\varphi}(t)$$

donde $\varphi(t)$ es una solución que cumple $\varphi(0) = \xi, \dot{\varphi}(0) = \eta$. Es fácil ver que $\varphi(t)$ es 2π -periódica, en contradicción con i).

Visto que el Teorema de Lagrange no se extiende al caso periódico podríamos probar con los métodos de Lyapunov.

Método de la primera aproximación

La ecuación linealizada en $x \equiv 0$ es

$$\ddot{y} = -V_{xx}(t, 0)y.$$

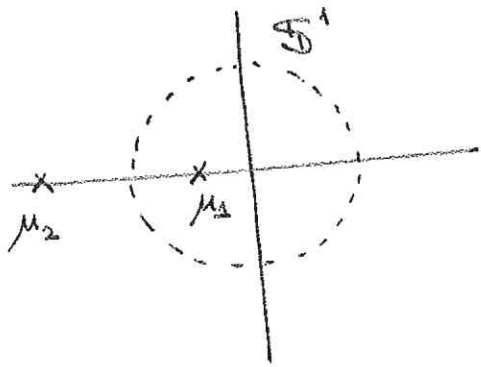
Se trata de una ecuación periódica y lineal (Ecuación de Hill). La teoría de Floquet es aplicable y existen dos números $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ llamados multiplicadores de Floquet que se asocian a la ecuación. Para cada uno de ellos existe una solución no trivial que cumple

$$y_i(t+T) = \mu_i y_i(t), \quad i=1, 2.$$

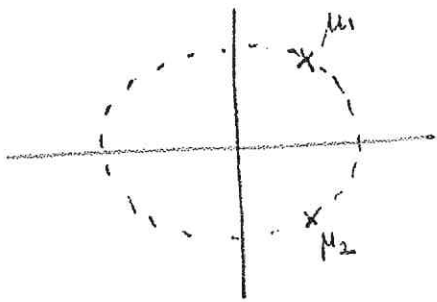
Las soluciones $y_i(t)$ pueden tomar valores complejos. Por la identidad de Jacobi-Liouville se cumple $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$.

4.7

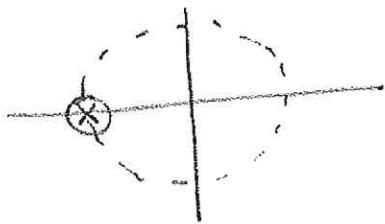
Analizamos las posibles configuraciones de los multiplicadores en \mathbb{C} :



$|mu_2| > 1 > |mu_1|, mu_1, mu_2 \in \mathbb{R}$
Caso hiperbólico



$|mu_1| = |mu_2| = 1, mu_1 = \bar{mu}_2 \notin \mathbb{R}$
Caso elíptico



$mu_1 = mu_2 = \pm 1$
Caso parabólico

El primer método de Lyapunov sólo se aplica en el caso hiperbólico

$x \equiv 0, \ddot{x} + V_x(t, x) = 0$

inestable
 ???
 ???

$y \equiv 0, \ddot{y} + V_{xx}(t, 0)y = 0$

hiperbólico (\Rightarrow inestable)
 elíptico (\Rightarrow estable)
 parabólico (estable/inestable)

Ejercicio 4.2 Estudia la estabilidad del equilibrio

para $\ddot{x} + x^3 = 0$, $\dot{x} - x^3 = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\dot{y} + y = 0$.
 Concluye que en el caso parabólico se pueden dar todas las alternativas. ($T = 2\pi$)

Ejercicio 4.3 Demuestra que la ecuación de Hill

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \quad p(t+T) = p(t), \quad p(t) < 0 \quad \forall t$$

es hiperbólica.

Ejercicio 4.4 El equilibrio $x \equiv \pi$ es inestable para

el péndulo de longitud variable

$$\ddot{x} + \alpha(t) \operatorname{sen} x = 0, \quad \alpha(t+T) = \alpha(t), \quad \alpha(t) > 0 \quad \forall t.$$

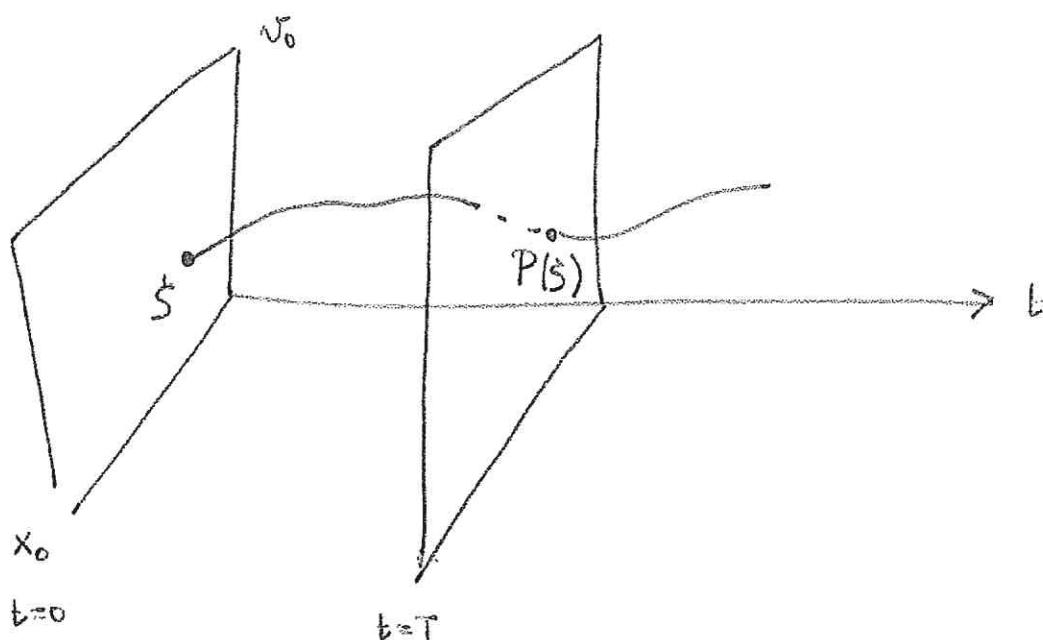
Más adelante mostraremos que las únicas funciones de Lyapunov de estas ecuaciones son las integrales primeras. Se sabe que lo típico en estos sistemas es que no haya integrales primeras continuas y no constantes. Por ello el segundo método de Lyapunov no será aplicable en la mayoría de los casos.

La aplicación de Poincaré Suponemos $V \in C^{0,2}$.

Dados $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ cercanos a ceros la solución $x(t; x_0, v_0)$ de (*) que cumple $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ está definida en $[0, T]$. Esto es consecuencia de la dependencia continua, pues $x(t; 0, 0) \equiv 0$ está definida en $]-\infty, \infty[$.

Definimos la aplicación del plano,

$$P: (x_0, v_0) \in U =]-\delta, \delta[\times]-\delta, \delta[\mapsto (x(T; x_0, v_0), \dot{x}(T; x_0, v_0)) \in \mathbb{R}^2$$



Por discusiones anteriores sabemos que P es un homeomorfismo de U sobre su imagen. Además, P conserva orientación y área. Esto es consecuencia del Teorema de Liouville, ya que estas ecuaciones tienen una estructura hamiltoniana.

De manera similar a lo ya dicho en el caso autónomo, la periodicidad en t permite reducir el estudio dinámico de la ecuación diferencial a la ecuación en diferencias

$$\xi_{n+1} = P(\xi_n).$$

Observamos que $x(t+T; \xi) = x(t; P(\xi))$ y

por tanto $x(t+nT; \xi) = x(t; P^n(\xi))$.

La solución trivial $x \equiv 0$ produce el punto fijo $\xi = 0$ de P . A partir de ahora estudiaremos la

estabilidad de $\xi = 0$ como solución de la ecuación en diferencias.

Puntos fijos estables en el plano

Sea U un entorno abierto de \mathbb{R}^2 ~~en~~ 0 en \mathbb{R}^2 y

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^2, \xi_1 = h(\xi)$$

una aplicación continua e inyectiva (\Rightarrow homeomorfismo sobre su imagen). Se supone $h(0) = 0$. Diremos que

$\xi = 0$ es estable si dado $\mathcal{V}(0)$ un entorno $\mathcal{V}(0)$ existe otro más pequeño $\mathcal{W}(0)$ de manera que

$h^n(\mathcal{W})$ está bien definido para cada $n \in \mathbb{Z}$ y

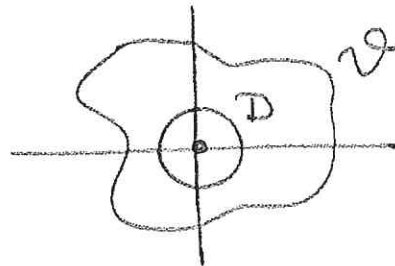
$$h^n(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}.$$

Se trata de estabilidad perpetua, la estabilidad para el futuro se obtiene cambiando \mathbb{Z} por \mathbb{N} .

Ejemplos

- ① $h(\xi) = R[\theta]\xi$ Rotación de ángulo θ
 $\xi = 0$ es estable pues los discos centrados en el origen son invariantes

$$\mathcal{W} = D, h^n(D) = D \\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

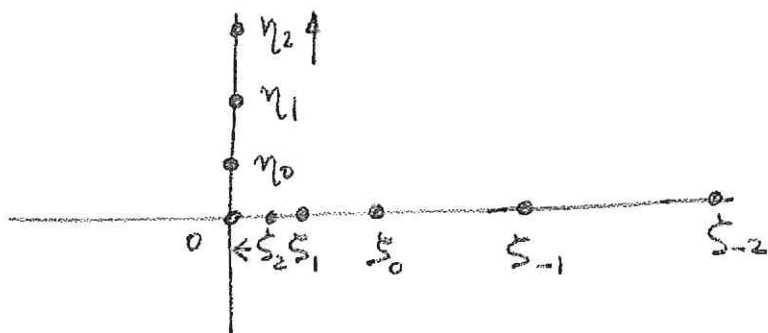


- ② $h(\xi) = \frac{1}{2}\xi$ contracción
 $\xi = 0$ No es estable pues $|h^n(\xi)| \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow -\infty, \xi \neq 0$

Conviene observar que en este ejemplo sí habría estabilidad hacia el futuro.

$$(3) \quad h(\xi) = A\xi, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\xi = 0$ no es estable ni en el futuro ni en el pasado



Un conjunto $A \subset U$ se dice invariante para h si

$$h(A) = A.$$

La estabilidad se puede caracterizar en términos de conjuntos invariantes.

Proposición Son equivalentes:

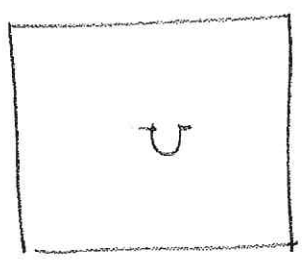
- (i) $\xi = 0$ es estable
- (ii) Existe una ~~base de~~ ^{sistema de} entornos abiertos del origen $\{U_n\}$ que son invariantes
- (iii) Existe ~~una base de~~ ^{sistema} entornos abiertos del origen $\{V_n\}$ que son invariantes y simplemente conexos.

[Por base de entornos entendemos que $0 \in U_{n+1} \subset U_n$

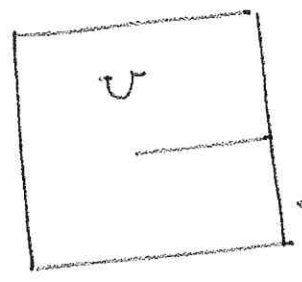
$$\bigcap_n U_n = \{0\}]$$

Nota A subconjunto de \mathbb{R}^2 que sea abierto y simplemente conexo es homeomorfo al propio \mathbb{R}^2 . Birkhoff llamó "curva"

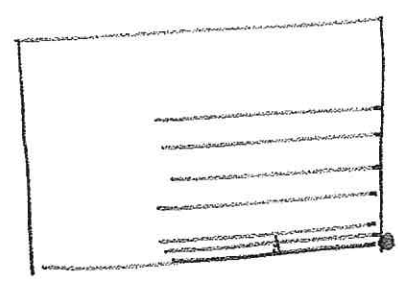
a la frontera de un conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ que sea abierto, acotado y simplemente conexo. Con esta definición una "curva" puede ser un conjunto muy exótico



\curvearrowright ∂U curva de Jordan



$\curvearrowleft \partial U \neq S^1$

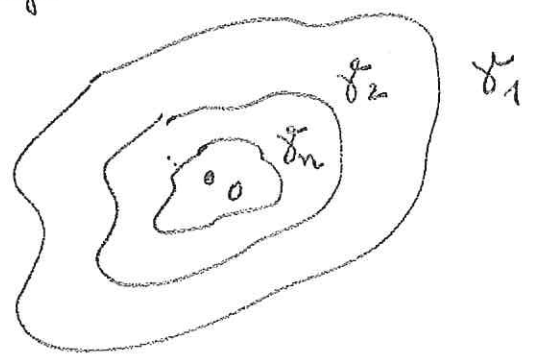


$\curvearrowleft \partial U$ no es localmente conexo y hay un punto en ∂U que no es accesible desde U

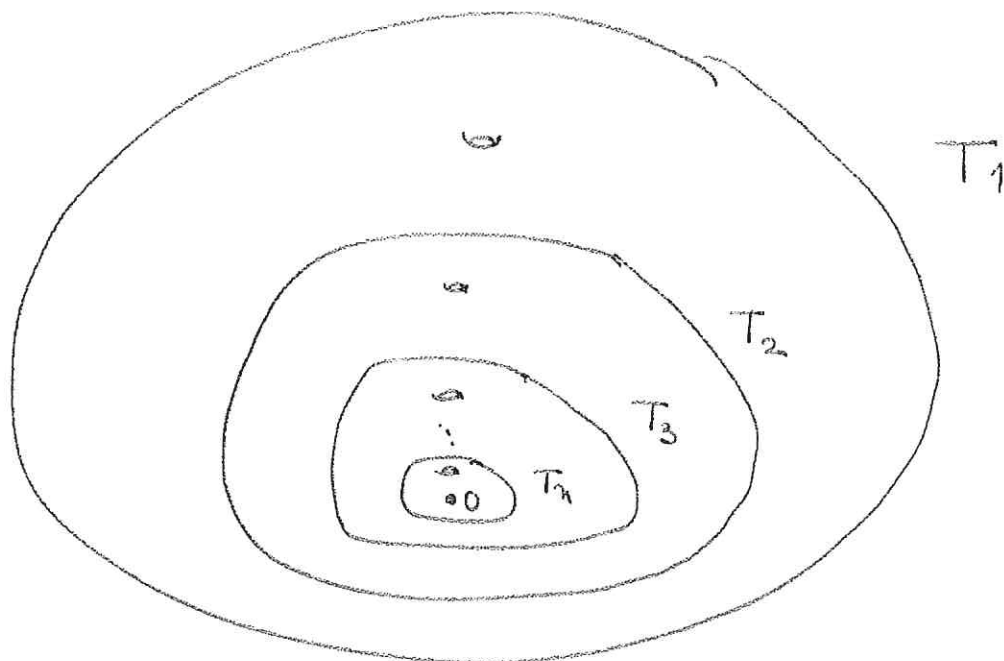
Usando el hecho de que h es un homeomorfismo sobre la imagen se prueba que (iii) se puede ser reformulado como

(iv) Existe una sucesión de "curvas" $\gamma_n (= \partial U_n)$ con 0 en su interior ($0 \in U_n$), $\text{diam } \gamma_n \rightarrow 0$ y que son invariantes por h .

De aquí surge la idea de probar la estabilidad de un punto fijo mostrando la existencia de curvas invariantes



La equivalencia de (i) y (ii) se extiende al ambiente de los espacios métricos generales. La equivalencia con (iii) no es válida en \mathbb{R}^N con $N \geq 3$. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 se puede construir un homeomorfismo con $\dot{f} = 0$ estable y tal que el sistema de entornos invariantes esté constituido por toros macizos con cada uno de ellos contraíbil en el anterior

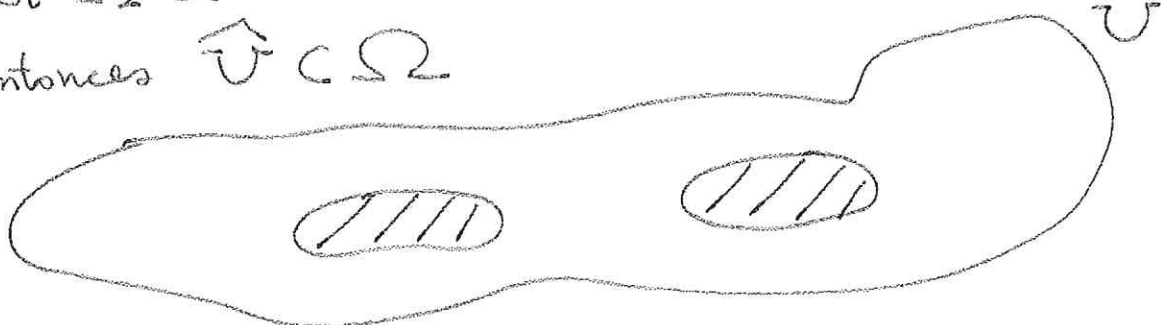


Es posible probar que en ese ejemplo no hay entornos invariantes simplemente conexos.

Una observación sobre topología del plano

Dado un dominio $U \subset \mathbb{R}^2$ con agujeros existe otro dominio \hat{U} que podríamos llamar el "relleno" de U :

- i) \hat{U} es un dominio simplemente conexo, $U \subset \hat{U}$
- ii) Si Ω es un dominio simplemente conexo y $U \subset \Omega$, entonces $\hat{U} \subset \Omega$



Esta construcción es topológica en el siguiente sentido:

Si $\Psi: \Omega \rightarrow \Omega_1$ es un homeomorfismo con Ω, Ω_1 dominios simplemente conexos y $U \subset \Omega$ es un dominio, entonces

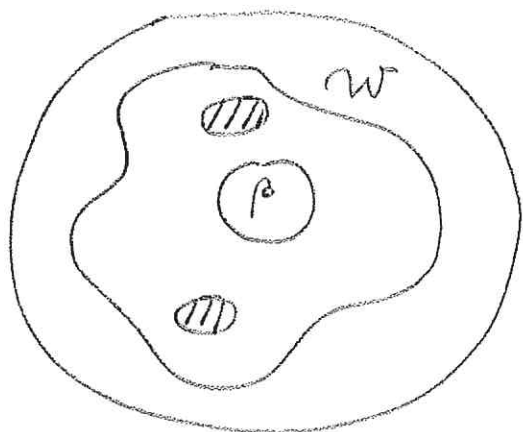
$$\Psi(\widehat{U}) = \widehat{\Psi(U)}$$

Dem. de la proposición (i) \Rightarrow (ii) Dadas ^{una} ~~dos~~ bolas abiertas

~~$\beta = \beta(0, r)$~~ , $B = B(0, R)$, ~~\mathbb{R}~~ con $B \subset U$ encontramos otra más pequeña $\beta = \beta(0, r)$, $r < R$, de manera que

$$h^n(\beta) \subset B \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definimos $W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(\beta)$. Es un abierto invariante que cumple



B

$$\beta \subset W \subset B$$

Haciendo $R \searrow 0$ encontramos la base.

(ii) \Rightarrow (iii) Definimos $V_n = \widehat{U}_n$ y observamos que si U_n está contenido en una bola también lo está V_n . Por ser topológica la construcción del relleno concluimos que V_n es invariante.

(iii) \Rightarrow (i) Es fácil.

Ahora estamos en disposición de explicar por qué el método de las funciones de Lyapunov no suele ser

aplicable para transformaciones que conservan áreas.

Ejercicio 4.5 Demuestre que si h conserva áreas y $\xi=0$ es estable para el futuro entonces también lo es para el pasado.

[Sugerencia: si U es invariante para el futuro, $h(U) \subseteq U$, también lo es $V = \text{int}(\bar{U})$]

Dada una función continua $V: U \cup h(U) \rightarrow \mathbb{R}$

diremos que

• V es una integral primera si $V(h(\xi)) = V(\xi)$

para cada $\xi \in U$

• V es una función de Lyapunov si

$$V(\xi) > 0, \xi \neq 0, \quad V(h(\xi)) \leq V(\xi)$$

para cada ξ .

Ejercicio 4.6 Pruebe que si existe una función de Lyapunov $\xi=0$ es estable para el futuro.

Proposición Si h conserva áreas, toda función de Lyapunov es integral primera en algún entorno del origen.

Dem Si hay una función de Lyapunov el ejercicio 4.6 nos dice que $\xi=0$ es estable para el futuro y el ejercicio 4.5 nos asegura que la estabilidad es perpetua.

Aplicamos la proposición anterior y encontramos un

entorno del origen \mathcal{V} que sea invariante por h y de medida finita. Por el Teorema de recurrencia de Poincaré sabemos que casi todo punto de \mathcal{V} es recurrente. Si $\xi_0 \in \mathcal{V}$ es uno de esos puntos, se encuentra una sucesión de enteros $\sigma(n) \rightarrow +\infty$ de manera que $h^{\sigma(n)}(\xi_0) \rightarrow \xi_0$.

Por ser V función de Lyapunov,

$$V(h^{\sigma(n)}(\xi_0)) \leq V(h^{\sigma(n)-1}(\xi_0)) \leq \dots \leq V(h(\xi_0)) \leq V(\xi_0).$$

Por la continuidad de V , al pasar al límite

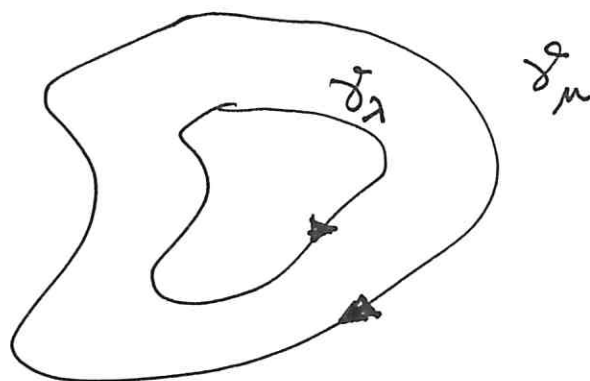
$$V(\xi_0) \leq V(h(\xi_0)) \leq V(\xi_0).$$

Así la función $\xi \in \mathcal{V} \mapsto V(h(\xi)) - V(\xi)$ se anula en casi todo punto de \mathcal{V} . De nuevo la continuidad implica que

$$V(h(\xi)) = V(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{V}.$$

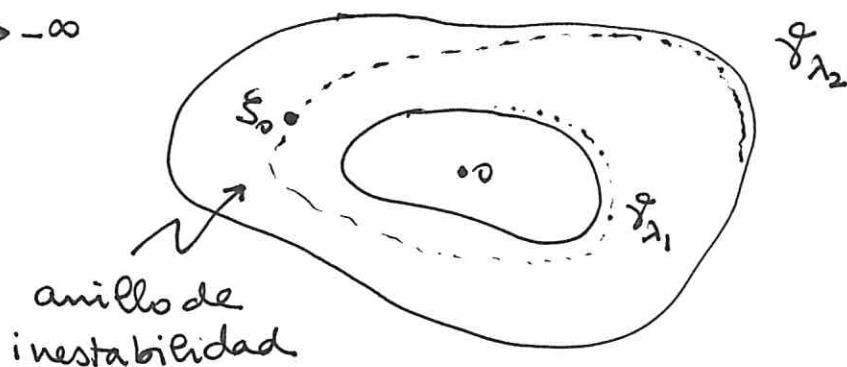
¿Por qué en muchos casos estables las posibles funciones de Lyapunov han de ser extrañas?

Suponemos que $h: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^2$ es un C^∞ -difeomorfismo que conserva áreas y tiene al origen por punto fijo estable. Se sabe que en la situación típica existe una familia de curvas invariantes alrededor de $\xi=0$. Sobre estas curvas



la restricción de h a \mathcal{J}_λ es conjugada a una rotación no conmensurable con 2π . Así las órbitas en \mathcal{J}_λ son densas sobre esta curva y la integral primera V ha de ser constante sobre \mathcal{J}_λ . El complemento de las curvas invariantes es un abierto que contiene el origen en su adherencia. Se sabe que entre dos curvas invariantes consecutivas hay una órbita que las conecta (Birkhoff), es decir $h^n(\xi_0) \rightarrow \mathcal{J}_{\lambda_1}$ si $n \rightarrow +\infty$, $h^n(\xi_0) \rightarrow \mathcal{J}_{\lambda_2}$ si $n \rightarrow -\infty$

si $n \rightarrow -\infty$



Esto hace que $V|_{\mathcal{J}_{\lambda_1}} = V|_{\mathcal{J}_{\lambda_2}}$, lo que no es posible si V tiene un mínimo estricto en $\xi=0$ y V es localmente equivalente a $W(x,y) = x^2 + y^2$ (~~no conjugado a V~~) ($V = W \circ \Psi$, Ψ homeomorfismo)

El grupo simpléctico

Sea $\mathcal{S}p(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de matrices 2×2 que cumplen $\det A = 1$ (conservan área y orientación)

Se trata de un grupo de Lie de dimensión 3 que se puede pensar como una hiper-cuadrada en \mathbb{R}^4 ,

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

$$xt - yz = 1$$

ecuación cuadrática

Clasificamos las matrices de $Sp(\mathbb{R}^2)$ según la configuración de los valores propios μ_1, μ_2 . Como $\mu_1 \mu_2 = 1$, al igual que para la ecuación de Hill,

• elíptica $|\mu_1| = |\mu_2| = 1, \mu_1 = \bar{\mu}_2 \neq \pm 1$



• hiperbólica $|\mu_1| < 1 < |\mu_2|$



• parabólica $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$

El modelo de matriz elíptica es una rotación $R[\theta]$ con $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Toda matriz elíptica se puede expresar en la forma

$$A = PR[\theta]P^{-1} \quad \text{con } \det P \neq 0.$$

Esto es consecuencia de la forma canónica de Jordan.

Las matrices $R[\theta]$ y $R[-\theta]$ son conjugadas en el grupo lineal general pero no en $Sp(\mathbb{R}^2)$. Es decir, es posible encontrar P con $\det P \neq 0$ tal que

$$R[-\theta] = PR[\theta]P^{-1}$$

pero seguro que $\det P < 0$ (¡Pruébese!).

En consecuencia podemos decir que el sentido de giro en una rotación no es un invariante lineal pero sí es un invariante simpléctico.

Ejercicio 4.7 Descríba la topología del conjunto de matrices que tienen los valores propios $e^{\pm i\theta}$ con $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Sugerencia: hay 2 componentes conexas.

La forma normal de Birkhoff

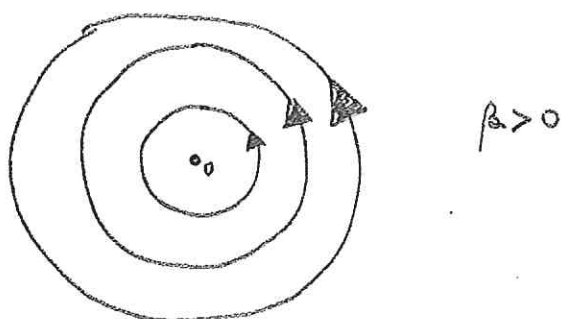
Partimos del difeomorfismo de \mathbb{R}^2 ,

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(\xi) = R[\theta + \beta |\xi|^2] \xi$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Esta transformación conserva áreas ya que un cálculo muestra que

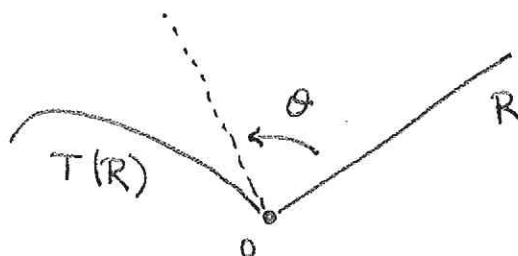
$$\det T'(\xi) \equiv 1.$$

Observamos que las circunferencias centradas en el origen son invariantes y cada una de ellas rotan a distinta velocidad angular (ésta es el papel de β)



A veces T se llama aplicación twist pues tuerce los rayos que emanan del origen

A veces emplearemos la notación $T_{\theta, \beta}$



Consideramos una aplicación de clase C^3 , $F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que está definida en un entorno Ω del origen y cumple

$$F(0) = 0, \quad \det F'(\xi) = 1 \text{ en } \Omega.$$

Si la matriz jacobiana $F'(0)$ es hiperbólica se sabe por el primer método de Lyapunov que $\xi=0$ es inestable para F . Así, sólo cabe esperar estabilidad en los casos elípticos y parabólicos. Nos centraremos en el caso elíptico.

Teorema (Birkhoff) Suponemos que $F'(0)$ es conjugada a $R[\theta]$ en el grupo $Sp(\mathbb{R}^2)$. Además,

$$\theta \in [0, 2\pi[, \quad \theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}.$$

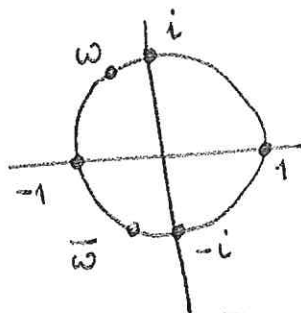
Entonces existe una transformación Ψ analítica en $\xi=0$ que cumple $\Psi(0)=0$, $\det \Psi' \equiv 1$, y ~~números $\theta \in [0, 2\pi[$~~ un número $\beta \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi = T_{\theta, \beta} + R$$

donde R es un resto que cumple $\partial^\alpha R(0) = 0, |\alpha| \leq 3$.

Observaciones 1. La restricción sobre los ángulos dicen que $e^{i\theta}$ no es raíz de la unidad de orden ≤ 4

$$w^2 + w + 1 = 0$$



Los ángulos no tratados por el Teorema son las llamadas resonancias fuertes y requieren formas normales más complicadas.

2. La versión original de Birkhoff trataba órdenes arbitrarios: si $F \in C^{2n+1}$ se conjuga (hasta el orden $2n+1$) con $R[\theta + \beta_1|\xi|^2 + \beta_2|\xi|^4 + \dots + \beta_n|\xi|^{2n}] \xi$. Para esta formulación se van ~~eliminando~~ ^{excluyendo} más raíces de la unidad.
3. El cambio de variable Ψ no es único pero el número β sí que lo es (un invariante simpléctico no lineal).
4. Birkhoff llamó "estable" al punto $\xi=0$ si $\beta \neq 0$. A principios de los sesenta Moser probó que si $F \in C^{333}$ y $\beta \neq 0$ entonces $\xi=0$ es estable en el sentido de Lyapunov. También lo hizo Arnold para $F \in C^\omega$. Más adelante Russmann y Herman rebajaron la diferenciabilidad. Si $F \in C^4$, $\beta \neq 0$ entonces $\xi=0$ es estable.

Para preparar la demostración del Teorema necesitamos introducir alguna notación compleja. Dada una función

$$F: \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{D} \text{ abierto}, \quad 0 \in \mathcal{D}, \quad F(0) = 0$$

de clase C^3 empleamos las notaciones

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad F = F(z, \bar{z}),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right).$$

Así el desarrollo de Taylor de F se expresa como

$$F(z, \bar{z}) = az + b\bar{z} + cz^2 + dz\bar{z} + e\bar{z}^2 + fz^3 + gz^2\bar{z} + hz\bar{z}^2 + j\bar{z}^3 + \dots$$

Observamos que estamos tratando con funciones diferenciables en sentido real, serán holomorfas sólo cuando $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$.

Ahora podemos expresar la condición de conservar áreas y orientación ($\det F' \equiv 1$) como

$$|\partial_z F|^2 - |\partial_{\bar{z}} F|^2 = 1.$$

Así, las aplicaciones lineales del grupo simpléctico se expresarán como

$$F(z, \bar{z}) = az + b\bar{z}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

En particular las rotaciones son de la forma $z_1 = \lambda z$ con $\lambda = e^{i\theta}$. La aplicación twist se expresa como

$$T(z, \bar{z}) = e^{i(\theta + \beta|z|^2)} z.$$

Su desarrollo hasta tercer orden es

$$\begin{aligned} T(z, \bar{z}) &= e^{i\theta} (1 + i\beta|z|^2 + \dots) z \\ &= \lambda \left(\frac{z}{1} + i\beta z^2 \bar{z} + \dots \right) \end{aligned}$$

Demostración del Teorema. Lo vamos a hacer para el caso en que las derivadas de 2º orden de F se anulan. La razón es que los cálculos se simplifican pero las ideas centrales de la prueba ya están en este caso. Suponemos

$$F(z, \bar{z}) = \lambda z + \mathcal{F}_3(z, \bar{z}) + o(|z|^3)$$

donde $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq \pm 1$ y \mathcal{F}_3 es un polinomio homogéneo de grado 3

Vamos a buscar el cambio de variables de la forma

$$\Psi(z, \bar{z}) = z + \Psi_3(z, \bar{z}) + \dots$$

donde Ψ_3 es de nuevo un polinomio homogéneo de grado 3. La identidad $\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi = R + T$ es equivalente a

$$F \circ \Psi = \Psi \circ (T + R).$$

Desarrollando hasta el tercer orden,

$$F \circ \Psi = \lambda \Psi + F_3(\Psi, \bar{\Psi}) + \dots =$$

$$\lambda z + \lambda \Psi_3(z, \bar{z}) + F_3(z, \bar{z}) + \dots$$

$$\Psi \circ (T + R) = T + \Psi_3(T + R, \bar{T} + \bar{R}) + \dots$$

$$= \lambda z + i\lambda \beta z^2 \bar{z} + \Psi_3(\lambda z, \lambda \bar{z}) + \dots$$

Llegamos a la ecuación

$$\Psi_3(\lambda z, \lambda \bar{z}) - \lambda \Psi_3(z, \bar{z}) = F_3(z, \bar{z}) - i\lambda \beta z^2 \bar{z}$$

donde F_3 es el dato y Ψ_3, β son las incógnitas.

Haciendo

$$\Psi_3(z, \bar{z}) = A z^3 + B z^2 \bar{z} + C z \bar{z}^2 + D \bar{z}^3$$

$$F_3(z, \bar{z}) = a z^3 + b z^2 \bar{z} + c z \bar{z}^2 + d \bar{z}^3,$$

y sustituyendo en la ecuación

$$A(\lambda^3 - \lambda)z^3 + \underbrace{B(\lambda^2 \bar{\lambda} - \lambda)}_0 z^2 \bar{z} + C(\lambda \bar{\lambda}^2 - \lambda)z \bar{z}^2 +$$

$$+ D(\bar{\lambda}^3 - \lambda)\bar{z}^3 = a z^3 + (b - i\lambda\beta)z^2 \bar{z} + c z \bar{z}^2 + d \bar{z}^3$$

$$\Rightarrow A = \frac{a}{\lambda^3 - \lambda}, \quad \lambda^3 - \lambda \neq 0 \text{ pues } \lambda^2 \neq 1$$

$$C = \frac{c}{\bar{\lambda} - \lambda}, \quad \bar{\lambda} - \lambda \neq 0 \text{ pues } \lambda \notin \mathbb{R}$$

$$D = \frac{d}{\bar{\lambda}^3 - \lambda}, \quad \bar{\lambda}(\bar{\lambda}^3 - \lambda) = \bar{\lambda}^4 - 1 \neq 0$$

Observamos que B puede tomar cualquier valor mientras que β está determinado por

$$b = i\lambda\beta$$

De esta forma hemos determinado el desarrollo de Taylor de un posible Ψ . Quedan pendientes dos cuestiones:

¿Cómo se sabe que existe una Ψ analítica, que conserva áreas y tiene ese desarrollo de Taylor?

¿Cómo se sabe que β es real?

La respuesta a las dos preguntas se sigue del

siguiente

Lema Sea Ψ una aplicación analítica (real) en un entorno de $z=0$ que conserva áreas y cumple

$$\Psi(z, \bar{z}) = z + m z^3 + n z^2 \bar{z} + p z \bar{z}^2 + q \bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

con $m, n, p, q \in \mathbb{C}$.

Entonces $n + \bar{n} = 0$, $3m + \bar{p} = 0$.

Recíprocamente, dadas $m, n, p, q \in \mathbb{C}$ cumpliendo estas identidades, existe Ψ es las condiciones anteriores.

Aplicamos la primera parte del lema a

$$\bar{\lambda} F_3(z, \bar{z}) = z + \bar{\lambda} a z^3 + \bar{\lambda} b z^2 \bar{z} + \bar{\lambda} c z \bar{z}^2 + \bar{\lambda} d \bar{z}^3$$

$$\Rightarrow \bar{\lambda} b + \lambda \bar{b} = 0, \quad 3\bar{\lambda} a + \lambda \bar{c} = 0$$

De la primera identidad y $b = i \lambda \beta$ deducimos que $\beta = \bar{\beta}$. Por otra parte observamos que los candidatos a coeficientes $A, B=0, C, D$ que se han calculado cumplen las dos ecuaciones. La segunda parte del lema nos dice que Ψ existe.

Notas 1. En el caso general hay que tratar primero con los términos de 2º orden que, después de un cambio de variables, se eliminan.

2. En el caso $F = \lambda z + F_3$ es fácil calcular β ,

$$\beta = \frac{1}{i\lambda} b = \frac{1}{2i\lambda} \frac{\partial^3}{\partial z \partial \bar{z}^2} F(0).$$

Esta identidad la vamos a utilizar para realizar un cálculo efectivo de la forma normal en una ecuación diferencial

Demostración del Lema Desarrollamos la identidad

$$|\partial_z \psi|^2 - |\partial_{\bar{z}} \psi|^2 = 1$$

hasta segundo orden. De

$$\partial_z \psi = 1 + 3mz^2 + 2nz\bar{z} + p\bar{z}^2 + \dots$$

$$\partial_{\bar{z}} \psi = nz^2 + 2p z\bar{z} + 3q\bar{z}^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} |\partial_z \psi|^2 &= \partial_z \psi \cdot \overline{\partial_z \psi} = (1 + 3mz^2 + 2nz\bar{z} + p\bar{z}^2 + \dots) \cdot \\ &\quad (1 + 3\bar{m}\bar{z}^2 + 2\bar{n}z\bar{z} + \bar{p}z^2 + \dots) \\ &= 1 + (3m + \bar{p})z^2 + 2(n + \bar{n})z\bar{z} + (3\bar{m} + p)\bar{z}^2 + \dots \end{aligned}$$

$$|\partial_z \psi|^2 = O(|z|^3) \Rightarrow 3m + \bar{p} = 0, \quad n + \bar{n} = 0$$

Para hacer el recíproco construiremos ψ como el flujo de un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad.

En notación compleja,

$$\dot{z} = 2i \partial_z H(z, \bar{z})$$

donde $H = H(z, \bar{z})$ toma valores reales. Buscaremos

H como un polinomio homogéneo de grado 4,

$$H(z, \bar{z}) = \alpha z^4 + \beta z^3 \bar{z} + \gamma z^2 \bar{z}^2 + \bar{\beta} z \bar{z}^3 + \bar{\alpha} \bar{z}^4$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Para esta formulación se ha tenido en cuenta que

$H = \overline{H}$. La solución del sistema Hamiltoniano que

para z para $t=0$ se denotará por $\phi(t; z, \bar{z})$. Desarrollan-
do por Taylor en t ,

$$\phi(t; z, \bar{z}) = \phi(0; z, \bar{z}) + \dot{\phi}(0; z, \bar{z})t + \frac{1}{2} \ddot{\phi}(0; z, \bar{z})t^2 + \dots$$

De la ecuación $\dot{\phi} = 2i \partial_{\bar{z}} H(z, \bar{z}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= 2i \left[\partial_{\bar{z}\bar{z}} H \dot{z} + \partial_{\bar{z}\bar{z}} H \dot{\bar{z}} \right] = \\ & 2i \left[2i \partial_{\bar{z}\bar{z}} H \partial_{\bar{z}} H - 2i \partial_{\bar{z}\bar{z}} H \overline{\partial_{\bar{z}} H} \right] \end{aligned}$$

Evaluando en $t=0$ observamos que

$$\phi(0; z, \bar{z}) = z, \quad \dot{\phi}(0; z, \bar{z}) = 2i \partial_{\bar{z}} H(z, \bar{z}) \text{ polinomio homogéneo de grado 3}$$

$$\ddot{\phi}(0; z, \bar{z}) \text{ polinomio homogéneo de grado 5} \dots$$

Así, para $t=T$

$$\begin{aligned} \Psi(z, \bar{z}) = \phi(T; z, \bar{z}) &= z + 2iT \partial_{\bar{z}} H(z, \bar{z}) + O(|z|^5) \\ &= z + 2iT \left[\beta z^3 + 2\gamma z^2 \bar{z} + 3\bar{\beta} z \bar{z}^2 + 4\bar{\alpha} \bar{z}^3 \right] \end{aligned}$$

y se ajustan los coeficientes m, n, p, q .

A continuación vamos a calcular la forma normal de Birkhoff en un problema concreto.

Ecuación de Hill no lineal

$$\ddot{x} + x + \alpha(t)x^3 = 0, \quad \alpha(t+T) = \alpha(t) \text{ continua}$$

$$x \equiv 0$$

Usaremos notación compleja, $z = x + ix'$,

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{x}' = \dot{x} - ix - i\alpha(t)x^3 = -iz - i\alpha(t)x^3$$

Pretendemos calcular la forma normal de Birkhoff de la aplicación de Poincaré

$$z(0) \longmapsto z(T)$$

Aplicamos la fórmula de variación de constantes pensando que $-i\alpha(t)x(t)^3$ es el término no homogéneo,

$$\dot{z} = -iz + b(t) \implies z(t) = e^{-it} z(0) + \int_0^t e^{-i(t-s)} b(s) ds$$

$$z(t) = e^{-it} z(0) + i \int_0^t e^{-i(t-s)} \alpha(s) x(s)^3 ds$$

Sabemos que

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t + O(|z|^2)$$

(Esto se sigue de la diferenciabilidad respecto

de condiciones iniciales). Combinando ambas

fórmulas llegamos al desarrollo de Taylor hasta

tercer orden para la aplicación de Poincaré

$$z(T) = e^{-iT} z(0) - i \int_0^T e^{-i(T-s)} \alpha(s) (x_0 \cos s + y_0 \sin s)^3 ds \\ + O(|z(0)|^4)$$

Teniendo en cuenta $x_0 = \frac{z(0) + \overline{z(0)}}{2}$,

$$y_0 = \frac{z(0) - \overline{z(0)}}{2i}$$

encontramos la expresión compleja,

$$P(z, \bar{z}) = e^{-iT} z - i \int_0^T e^{-i(T-s)} \alpha(s) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \cos s + \frac{z - \bar{z}}{2i} \sin s \right)^3 ds \\ + \dots$$

Para evitar las resonancias fuertes eliminamos

$$T = 2N\pi, \frac{\pi}{2} + 2N\pi, \frac{2\pi}{3} + 2N\pi, \pi + 2N\pi, \frac{3\pi}{2} + 2N\pi$$

En los restantes casos sabemos que

$$\beta = \frac{1}{2i} e^{-iT} \frac{\partial^3}{\partial z \partial \bar{z}^2} P(0) \neq 0$$

Haciendo cálculos

$$\frac{\partial^3}{\partial z \partial \bar{z}^2} P(0) = C \int_0^T e^{is} \alpha(s) (\cos s - i \sin s)^2 (\cos s + i \sin s) ds$$

con $C \neq 0$,

$$= C \int_0^T e^{is} \alpha(s) e^{-2is} e^{is} ds$$

$$= C \int_0^T \alpha(s) ds$$

Si $\int_0^T \alpha(s) ds \neq 0 \implies x \equiv 0$ es estable