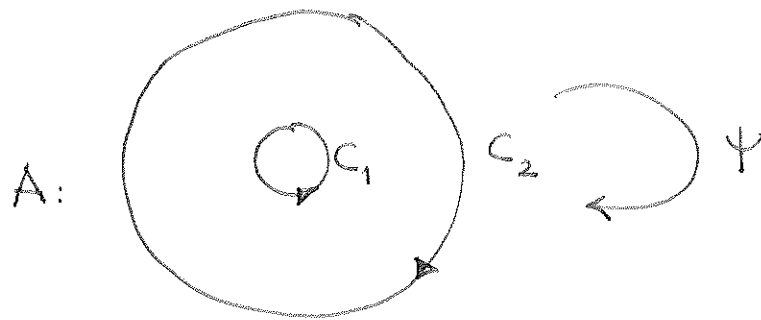


### 3. El último teorema geométrico de Poincaré (Poincaré-Birkhoff)<sup>3.1</sup>

Referencia: J. Moser, E. Zehnder, Notes on Dynamical Systems, Am. Math. Soc. 2005

Pensemos en un anillo cerrado  $A$  y un homeomorfismo  $\Psi: A \rightarrow A$ .

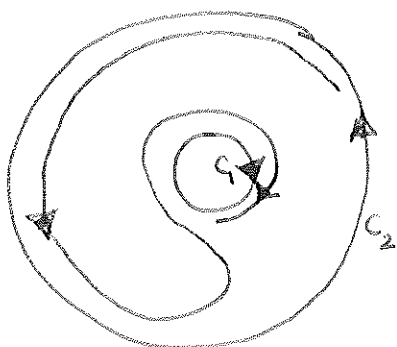


En principio las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  pueden quedar fijas o intercambiarse, pero vamos a imponer que queden fijas,

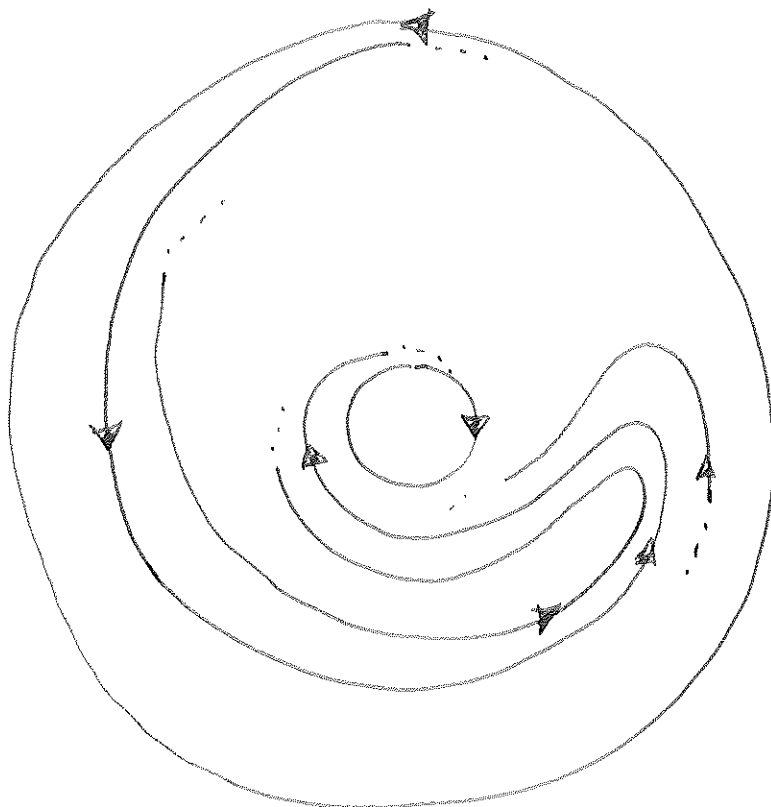
$$\Psi(C_1) = C_1, \quad \Psi(C_2) = C_2.$$

Además supondremos que  $\Psi$  conserva orientación y área. Además suponemos que  $\Psi|_{C_1}$  y  $\Psi|_{C_2}$  "rotan" en sentidos opuestos. Entonces existen al menos dos puntos fijos de  $\Psi$  en  $A$ .

Nota Es esencial que  $\Psi$  conserve áreas. Pensemos en  $h = \phi_1$  para el siguiente flujo:



Las fronteras son órbitas cerradas de ~~período irracional~~ y las órbitas restantes viajan de  $C_2$  a  $C_1$ . Para ello han de tener lo que podemos llamar "un punto de retroceso".



Es intuitivo que  $h$  no tiene puntos fijos si el período de  $C_1$  y  $C_2$  no es 1.

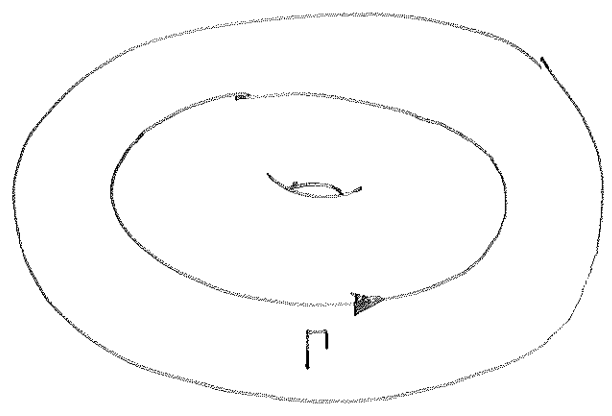
Un programa para la aplicación de este teorema en sistemas hamiltonianos

Consideramos un sistema hamiltoniano autónomo de 2 grados de libertad

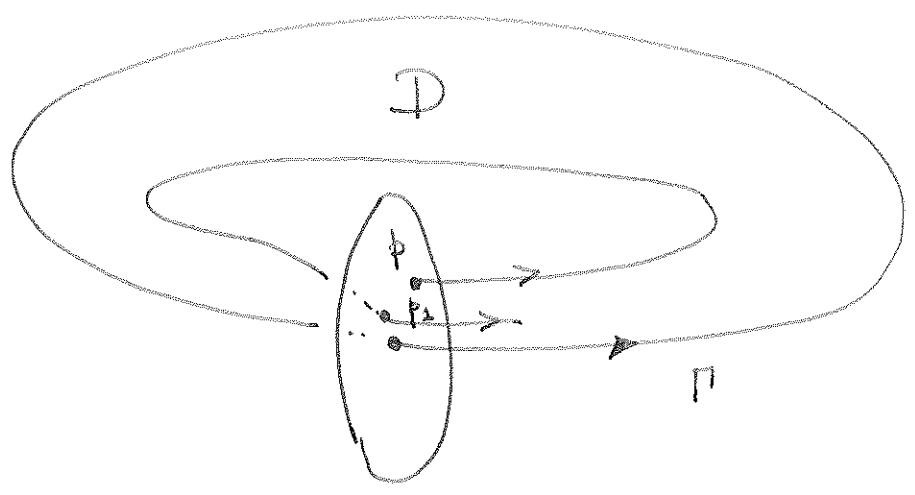
$$\ddot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (q, p) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

y nos fijamos en un nivel de energía  $H = \text{cte}$  que es valor regular, de manera que  $H = \text{cte}$  es una 3-variedad diferenciable. Supongamos que en este nivel de "energía" hay una órbita cerrada estable  $\Gamma$ . Entonces se espera que alrededor de esta órbita cerrada aparezcan toros invariantes.

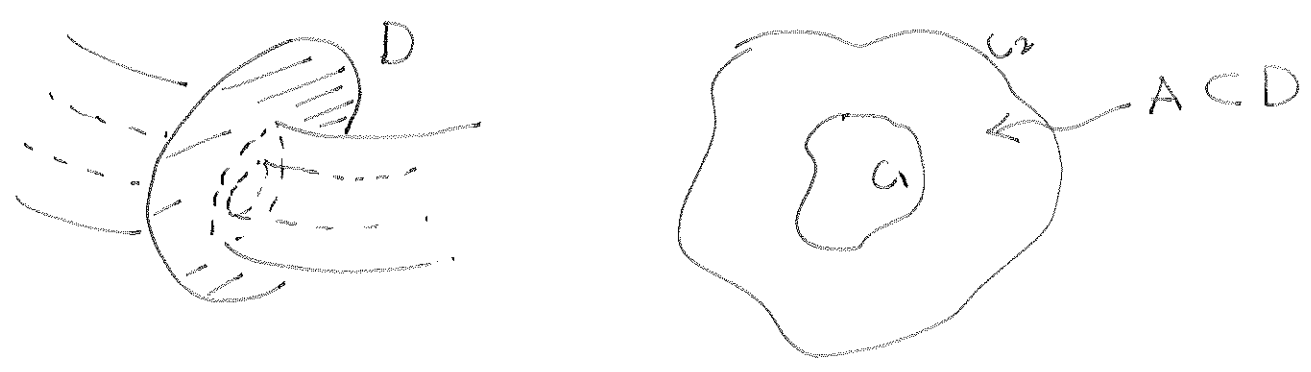
para el flujo <sup>en</sup>  $\vec{H} = cte$



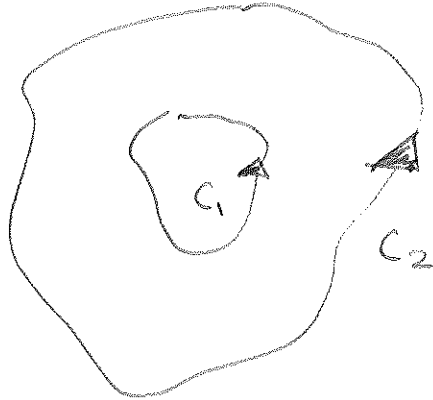
Tomamos un pequeño disco que sea sección transversal para el flujo en  $H = cte$  y corte a  $\Pi$



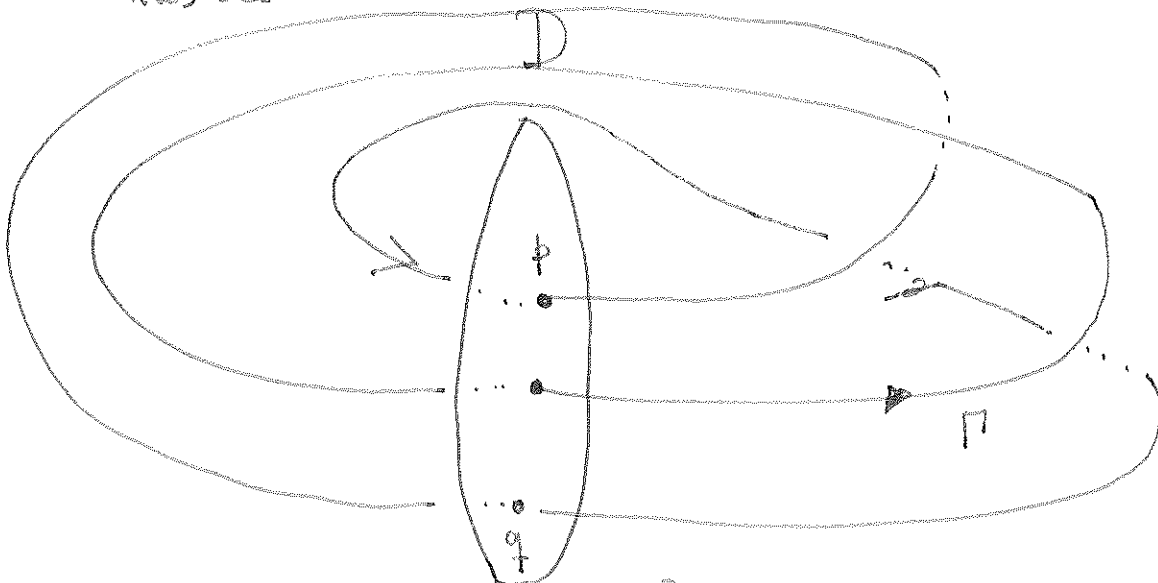
Consideramos la aplicación de retorno  $\Psi(p) = p_2$ .  
 Es claro que el punto  $\Pi \cap D$  será fijo por  $\Psi$ .  
 Además, cada toro invariante se cortará con  $D$  generando una curva de Jordan invariante.  
 Tomemos dos de esos toros, generamos así un "anillo" invariante sobre  $D$



Típicamente  $\Psi$  "rotará" a distinta velocidad sobre  $C_1$  y  $C_2$



Además, por ser el sistema hamiltoniano  $\Psi$  conservará una medida con densidad. A partir de aquí se puede comprobar que muchas iteradas de  $\Psi$ ,  $\Psi^{nk}$ , rotan los círculos  $C_1$  y  $C_2$  en sentido contrario. En consecuencia  $\Psi^{nk}$  tiene al menos 2 puntos fijos. De esta manera pudiere ser posible probar que en el entorno de la solución periódica estable hay infinitas órbitas cerradas que dan un número muy grande de vueltas antes de cerrarse



$p$  y  $q$  puntos fijos de  $h^2$ : la órbita que pasa por ellas da dos vueltas

La demostración de la existencia de toras invariantes para construir el anillo se reveló muy ardua, pasaron más de 50 años hasta que se pudo emplear la teoría KAM para este propósito. Entre tanto surgieron versiones del teorema de Poincaré-Birkhoff que no requieren la invariancia del anillo y son de aplicación más directa.

### Formalización del enunciado

Trabajaremos en el cilindro

$$C = \mathbb{T} \times [a, b] \quad \text{con} \quad \mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$$

con coordenadas  $(\bar{x}, y)$ ,  $\bar{x} = x + 2\pi\mathbb{Z}$ . Consideramos

funciones continuas

$$f, g: \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{que cumplen}$$

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y) + 2\pi, \quad g(x + 2\pi, y) = g(x, y)$$

de manera que

$$\tilde{\Psi}: (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b] \mapsto (f(x, y), g(x, y))$$

sea un homeomorfismo de la banda  $\mathbb{R} \times [a, b]$ .

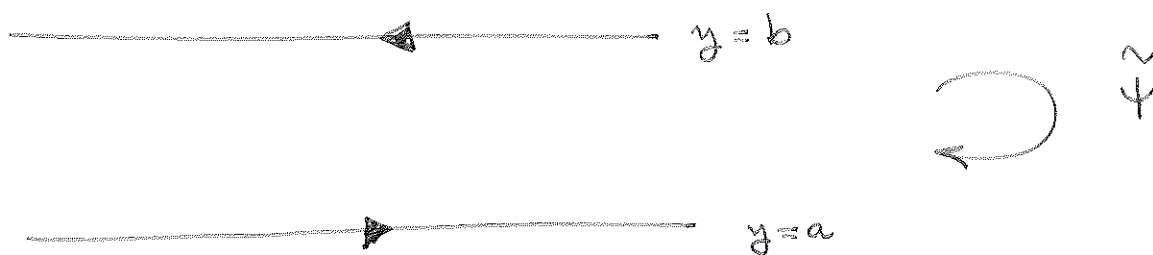
Además suponemos que  $\tilde{\Psi}$  conserva la medida de Lebesgue.

Por último suponemos que

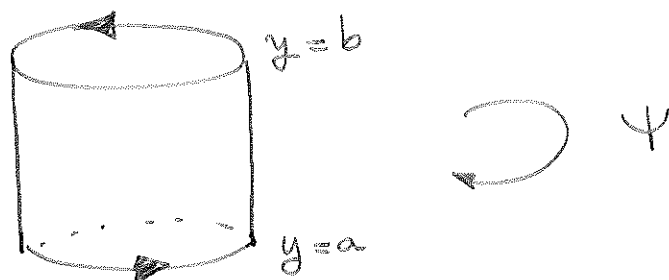
$$g(x, a) = a, \quad g(x, b) = b \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y

$$f(x, a) > x, \quad f(x, b) < x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Inducimos ahora el homeomorfismo del cilindro  $C$



y afirmamos que  $\Psi$  tiene al menos 2 puntos fijos.

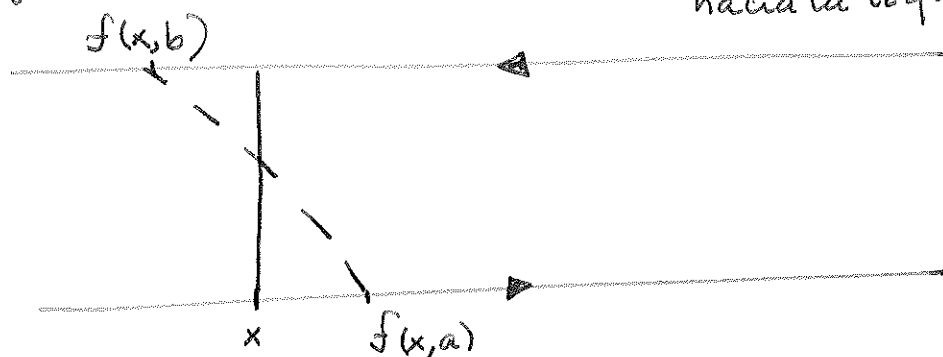
La demostración completa es complicada. Vamos a ~~obtener~~ presentar dos demostraciones con hipótesis adicionales.

1) Caso de aplicaciones twist Imponemos la condición extra:

Para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in [a, b] \mapsto f(x, y)$  es decreciente (estricta)

$f(x, 0) \searrow$

Para interpretar geométicamente esta condición observamos que si consideramos el segmento vertical  $\{x\} \times [a, b]$ , su imagen por  $\tilde{\Psi}$  (o por  $\Psi$ ) se tuerce hacia la izquierda (de ahí el nombre "twist")

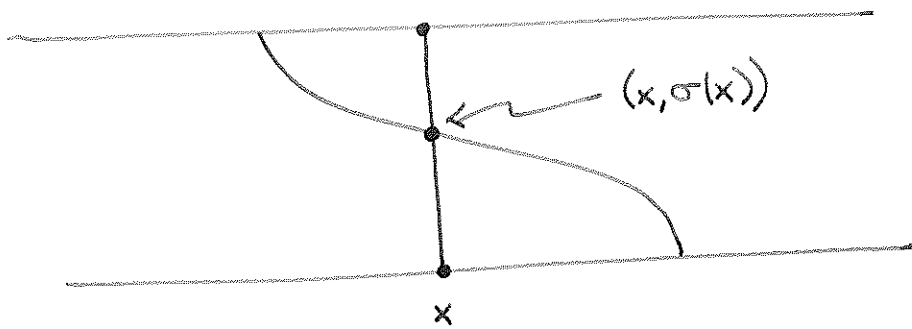


## Demostración del $T^a$ para el caso twist

Dado  $x \in \mathbb{R}$  resolvemos la ecuación en  $y \in [a, b]$

$$x = f(x, y).$$

Como  $x - f(x, a) < 0$ ,  $x - f(x, b) > 0$  podemos aplicar Bolzano y concluir que hay una solución  $y = \sigma(x) \in ]a, b[$ . Además esta solución es única gracias a la monotonía de  $f(x, \cdot)$ . Geométricamente estamos calculando el corte de cada segmento vertical con su imagen.

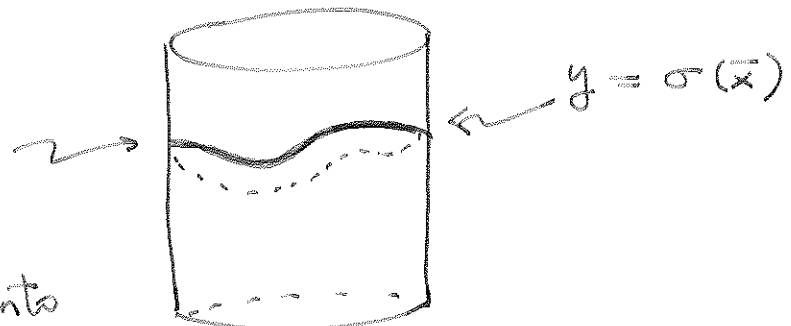


Es fácil probar que  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow ]a, b[$  es continua. Además

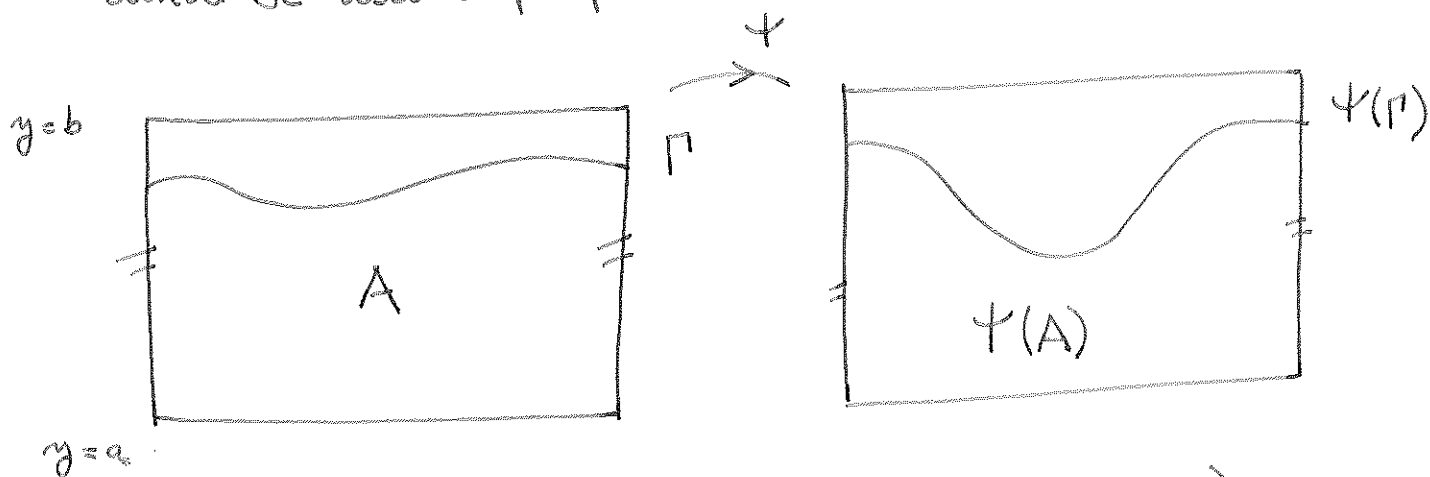
$$\sigma(x + 2\pi) = \sigma(x),$$

como consecuencia de la propiedad de periodicidad de  $f$ . Entonces  $y = \sigma(\bar{x})$  define una curva de Jordan  $\Gamma$  en el cilindro

Puntos cuya imagen tiene el mismo argumento

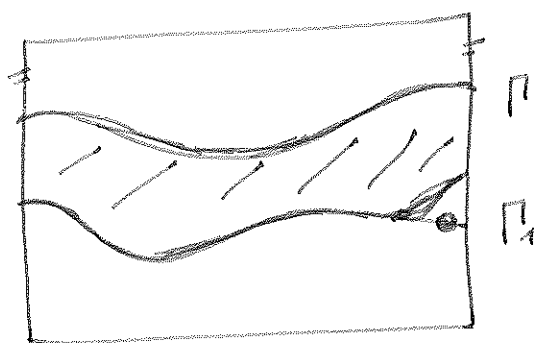


Como  $\Psi$  es un homeomorfismo,  $\Psi(\Gamma)$  es también una curva de Jordan no contractil en  $\mathbb{C}$ . Afirmamos que  $\Gamma \cap \Psi(\Gamma)$  contiene al menos dos puntos; es aquí donde se usa la propiedad de conservar áreas

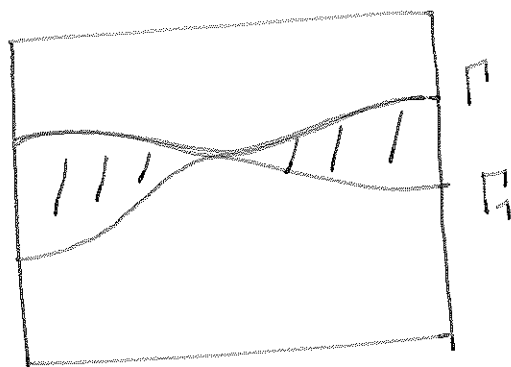


$$A = \{y < \Gamma(x)\} \quad \mu(\Psi(A)) = \mu(A)$$

Es claro que esta propiedad no puede ser válida si  $\Gamma$  y  $\Gamma_1 = \Psi(\Gamma)$  no se cortan o lo hacen en un punto



0 intersecciones



1 intersección

Vamos a mostrar que los puntos en  $\Gamma \cap \Gamma_1$  son fijos para  $\Psi$ . Para ello observamos que tanto  $\Gamma$  como  $\Gamma_1$  son curvas que se pueden parametrizar de forma explícita,



$$\Gamma: y = \sigma(x)$$

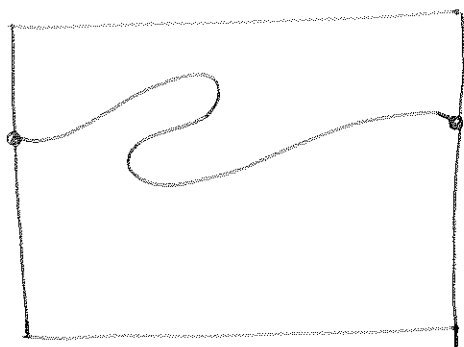
$$\Gamma_1 = \Psi(\Gamma): \begin{cases} x_1 = f(x, \sigma(x)) \\ y_1 = g(x, \sigma(x)) \end{cases}$$

Por definición de  $\Gamma_1$ ,

$$x_1 = x$$

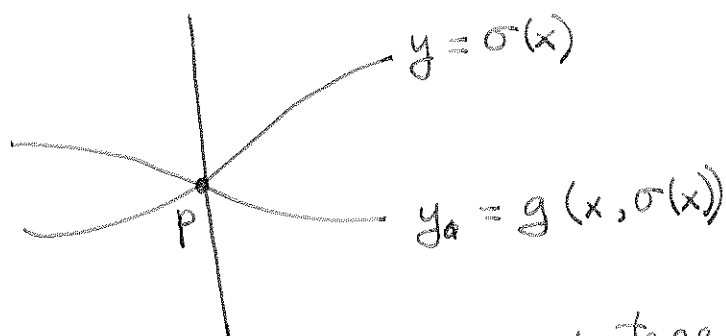
$$\Rightarrow \Gamma_1: y_1 = g(x_1, \sigma(x_1))$$

En consecuencia, tanto  $\Gamma$  como  $\Gamma_1$  cortan cada segmento vertical en un único punto,



$\Gamma_1$  no puede ser de esta manera

Sea  $p \in \Gamma \cap \Gamma_1$ ,  $p = (\bar{x}, y)$ . Entonces  $p$  es el único punto de intersección de  $\Gamma$  o  $\Gamma_1$  con el segmento  $\{\bar{x}\} \times [a, b]$



Por estar  $p$  en  $\Gamma$  su imagen  $\Psi(p)$  ha de tener la misma coordenada horizontal  $\bar{x}$ , como pertenece a  $\Psi(\Gamma)$ , será el único punto de intersección de  $\Gamma_1 \cap (\{\bar{x}\} \times [a, b])$ ;

es decir,  $\Psi(p) = p$ .

Ejercicio 3.1 Prueba el resultado anterior sustituyendo la hipótesis  $\Psi$  conserva áreas por la siguiente condición topológica:

Si  $E \subset \mathbb{C}$  es un abierto saturado con  $\Psi(E) \subset E$ ,  <sup>$\circ E \subset \Psi(E)$</sup>   
entonces  $\Psi(E) = E$ .

(E abierto saturado =  $E = \text{int}(\bar{E})$ )

Ejercicio 3.2 [difícil] Construye un ejemplo de un homeomorfismo del plano que conserva áreas y para el que existe un abierto acotado  $E$  de manera que  $\Psi(E) \subset E$  con inclusión propia.

Ejercicio 3.3 Demuestra que si  $\Psi$  conserva áreas en  $\mathbb{C}$  entonces también se cumple la condición del Ejercicio 3.1

Ejercicio 3.4 Sean  $p_1, p_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones  $2\pi$ -periódicas y continuas con

$$0 < p_1(x) < p_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \text{que conserva áreas y va}$$

Demuestra que hay un homeomorfismo  $h$  de

$$C = \{ (\bar{x}, y) : p_1(x) \leq y \leq p_2(x) \} \quad \text{en}$$

$$C_1 = \{ (\bar{x}_1, y_1) : a_1 \leq y_1 \leq a_2 \}.$$

Sugerencia: busca un cambio del tipo  $x_1 = A(x)$ ,  
 $y_1 = B(x) + C(x)y$

Ejercicio 3.5 Formula el  $T^a$  de Poincaré-Birkhoff para anillos topológicos estrellados.

2) Uso de la función generatriz Imponemos la hipótesis

extra:

$$f, g \in C^1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in [a, b].$$

~~(Intuitivamente esto dice que la transformación tiene un sentido de giro anti-horario.)~~

Una vez que  $f$  y  $g$  son  $C^1$  la condición de conservar áreas se expresa en términos del jacobiano y orientación

$$f_x g_y - f_y g_x = 1 \quad \text{en } \mathbb{R} \times [a, b]$$

Vamos a construir una función generatriz para  $\Psi$ . Describimos en primer lugar el proceso formal; para ello escribimos la transformación

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y)$$

y pensamos que las variables independientes son ahora  $x_1$  e  $y$ . De la primera ecuación podemos despejar  $x$ ,

$$x = u(x_1, y)$$

y la condición  $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$  nos asegura que  $u$  es  $C^1$ .

De la segunda ecuación obtenemos

$$y_1 = g(u(x_1, y), y) \equiv v(x_1, y).$$

También  $v \in C^1$ .

En las nuevas coordenadas la transformación se expresa como

$$x = u(x_1, y), \quad y_1 = v(x_1, y).$$

Para buscar puntos fijos debemos hacer  $x_1 = x$ ,  $y_1 = y$ , es decir,

$$x_1 = u(x_1, y), \quad y = v(x_1, y).$$

Probaremos que estas ecuaciones tienen una estructura variacional, en el sentido de la existencia de una función

$\bar{W} = \bar{W}(x_1, y)$  de clase  $C^2$  y tal que

$$u = \frac{\partial \bar{W}}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \bar{W}}{\partial x_1}.$$

Si definimos  $w = w(x_1, y)$  por la fórmula

$$\bar{W} = x_1 y + w$$

observamos que los puntos fijos de  $\Psi$  coinciden con los puntos críticos de  $w$ .

La función generatriz  $\bar{W}$  (o  $w$ ) permite dar una formulación variacional del problema de

puntos fijos.

Para dar precisión a lo anterior necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

Lema Sean  $A, B \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [a, b])$  con

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Son equivalentes:

(i)  $\exists W \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [a, b]) : \frac{\partial W}{\partial x} = A, \frac{\partial W}{\partial y} = B$

(ii)  $\int_0^{2\pi} A(x, a) dx = 0$

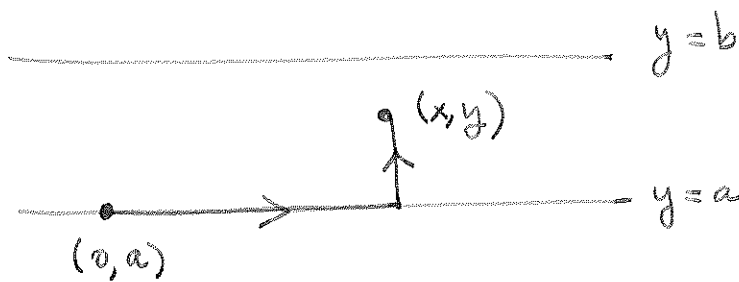
Dem. (i)  $\Rightarrow$  (ii) Es suficiente observar que

$$W(2\pi, a) - W(0, a) = \int_0^{2\pi} A(x, a) dx$$

y  $W$  es periódica en  $x$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) La función

$$\bar{W}(x, y) = \int_0^x A(\xi, a) d\xi + \int_a^y B(x, \eta) d\eta$$



es de clase  $C^2$  y sus derivadas parciales son  $A$  y  $B$ . Falta por comprobar que  $W$  es periódica en  $x$ ,

$$\begin{aligned} W(x+2\pi, y) - W(x, y) &= \int_0^{x+2\pi} A(\xi, a) d\xi - \int_0^x A(\xi, a) d\xi \\ &= \int_x^{x+2\pi} A(\xi, a) d\xi = \int_0^{2\pi} A(\xi, a) d\xi \end{aligned}$$

(pues  $B$  es periódica)  $\nearrow$   $\hat{A}$  periódica

Ejercicio 3.6 Sea  $\Lambda^1(C)$  el espacio de 1-formas en  $C$  de clase  $C^\infty$ ,

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy.$$

Se definen los subespacios de  $\Lambda^1(C)$

$$\mathcal{L} = \{ \omega \in \Lambda^1(C) : d\omega = 0 \}$$

$$\mathcal{E} = \{ \omega \in \Lambda^1(C) : \exists f \in C^\infty(C), df = \omega \}$$

¿Qué dimensión tiene el espacio cociente  $\mathcal{L}/\mathcal{E}$ ?

Demostración de  $T^a$  P-B en el caso 2)

---

Consideramos la ecuación

$$x_1 = f(x, y), \quad x, x_1 \in \mathbb{R}, y \in [a, b]$$

en la incógnita  $x$ . Como  $f$  es creciente en dicha variable y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = \pm\infty$  observamos que tiene una única solución  $x = u(x_1, y)$ .

$$\left[ f(x+2\pi, y) = f(x, y) + 2\pi \Rightarrow f(x+2\pi N, y) = f(x, y) + 2\pi N \right]$$

Además, por el  $T^a$  de la función implícita  $u$  es de clase  $C^1$ . De la condición de periodicidad de la  $f$  se sigue que  $u$  cumple

$$u(x_1 + 2\pi, y) = u(x_1, y) + 2\pi.$$

Definimos

$$v(x_1, y) = g(u(x_1, y), y)$$

y observamos que  $v \in C^1$  y

$$v(x_1 + 2\pi, y) = v(x_1, y).$$

De la construcción se sigue que hay una correspondencia biyectiva entre los puntos fijos de  $\Psi$  y los de

$$(x_1, y) \in \mathbb{R} \times [a, b] \mapsto (u(x_1, y), v(x_1, y)).$$

Vamos a comprobar que  $v$  cumple la condición de exactitud,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\text{De } f(u(x_1, y), y) = x_1, \quad 1 = f_x u_{x_1} + \cancel{f_y} \Rightarrow$$

$$u_{x_1} = \frac{1}{f_x}, \quad f_x u_y + f_y = 0, \quad u_y = -\frac{f_y}{f_x}$$

$$\text{De } v(x_1, y) = g(u(x_1, y), y),$$

$$v_y = g_x u_y + g_y = -\frac{g_x f_y}{f_x} + g_y.$$

La conclusión se sigue de la conservación de áreas

$$f_x g_y - f_y g_x = 1.$$

Encontramos una función  $W \in C^2(\mathbb{R} \times [a, b])$ :

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = v, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = u.$$

Definimos  $w(x_1, y) = W(x_1, y) - x_1 y$  y las ecuaciones de punto fijo se reducen a  $\nabla w = 0$ .

Para probar la periodicidad de  $w$  en  $x_1$  aplicamos el lema con

$$A(x_1, y) = v(x_1, y) - y, \quad B(x_1, y) = u(x_1, y) - x_1.$$

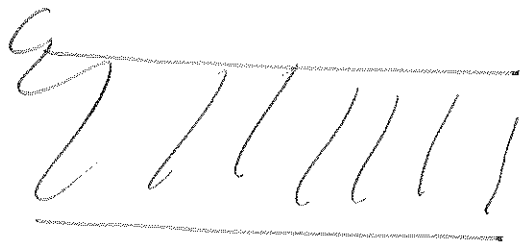
Verificamos que

$$\int_0^{2\pi} [v(x_1, a) - a] dx_1 = 0$$

Para ello efectuamos el cambio de variable  $x_1 = f(x, a)$

$$\int_0^{2\pi} [v - a] dx_1 = \int_{\textcircled{a}}^{\textcircled{a} + 2\pi} \underbrace{[g(x, a) - a]}_a f_x(x, a) dx$$

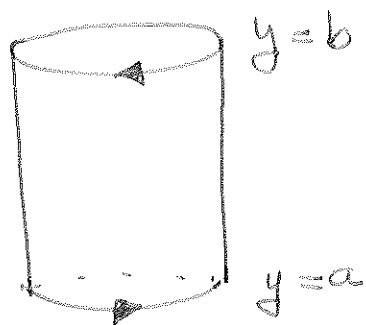
$\psi$ :



$$= 0.$$

Buscamos puntos críticos de la función  $w$  definida en la banda  $\mathbb{R} \times [a, b]$  y periódica en  $x_1$ . La podemos pensar como una función del cilindro





y por tanto alcanzará su máximo y su mínimo.

Esto no garantiza la existencia de puntos críticos pues en principio ambos podrían estar en los bordes  $y=a$ ,  $y=b$ . Ahora entran en juego las condiciones de rotación sobre las fronteras,

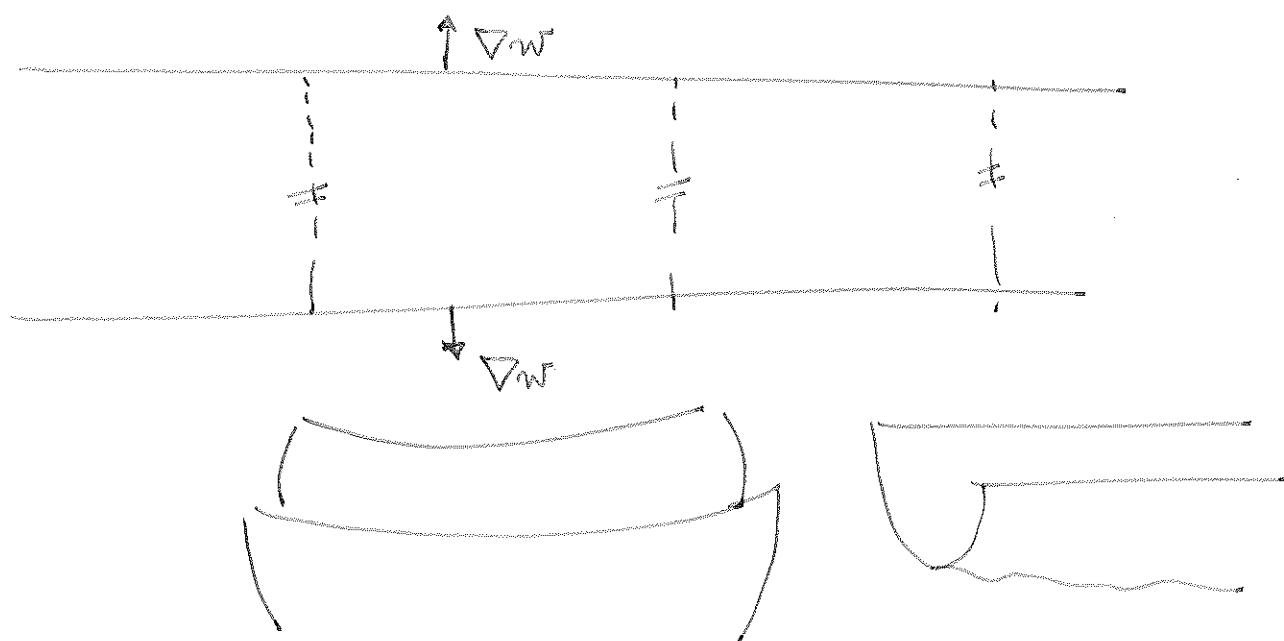
$$\text{De } f(x, a) > x, \quad x_1 = f(u(x_1, a), a)$$

$$\text{Se sigue que } x_1 > u(x_1, a) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = u - x_1 < 0$$

en  $y=a$

De igual modo  $\frac{\partial w}{\partial y} > 0$  en  $y=b$ .

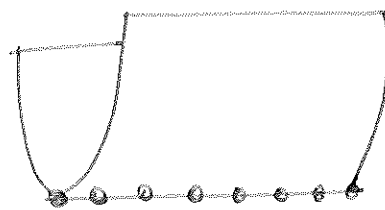
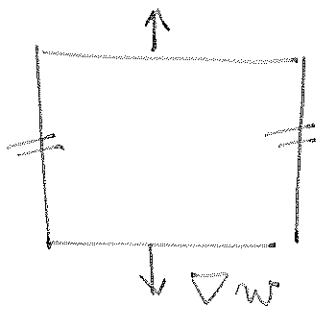
Si pensamos en la gráfica de  $w$  esto nos dice que hay un ascenso en la dirección normal a los bordes



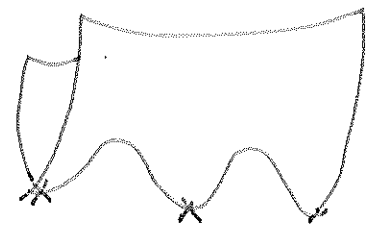
Conviene observar que  $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$  en  $y = a, b$

Así, es claro que el mínimo no se puede encontrar en el borde y ya hemos encontrado un primer punto crítico. El segundo punto crítico es más delicado y utiliza un argumento tipo paso de montaña. Daremos sólo una idea intuitiva de cómo se consigue.

Puede ocurrir que haya más de un mínimo esencialmente distinto



continuo de  
mínimos



2 mínimos  $\neq$

En ese caso ya tenemos 2 puntos críticos.

Si hay un único mínimo que se repite periódicamente es posible encontrar un punto de silla

