2. Flujos y transformaciones que conservan la medida

Sea Ω un abierto y conexo de $\mathbb{R}^d$ y

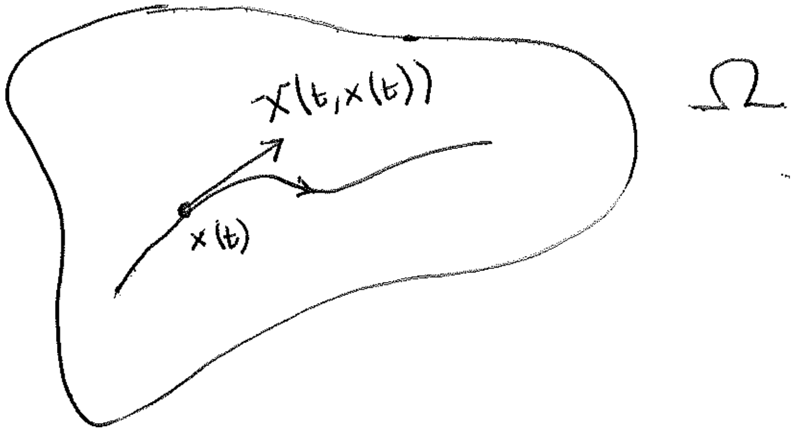
$$X : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad (t,x) \longmapsto X(t,x)$$

un campo de clase $C^{0,1}$. Esto quiere decir que X es continuo y existe la parcial respecto a x, $\frac{\partial X}{\partial x}(t,x)$, además, la aplicación $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \longmapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t,x) \in M_N(\mathbb{R})$ es continua.

Asociamos a este campo la ecuación diferencial

$$\dot{x} = X(t,x)$$

y pensamos que X define el campo de velocidades de un fluido y que cada solución $x(t)$ describe la trayectoria de una partícula que se mueve en el fluido



Dado $\xi \in \Omega$ denotamos por $x(t,\xi)$ a la solución que pasa por ξ en el instante $t=0$. Estará definida en el intervalo maximal $]\alpha, \omega[$ con $-\infty \leq \alpha(\xi) < 0 < \omega(\xi) \leq +\infty$.

Fijado $t \in \mathbb{R}$ consideramos

$$\Omega_t = \{ \xi \in \Omega : \ t \in]\alpha(\xi), \omega(\xi)[\}$$

Condiciones iniciales para las que la solución es prolongable hasta el tiempo t. Observamos $\Omega_0 = \Omega$

<u>Ejercicio 2.1</u> Construye un ejemplo de manera que $\Omega_t = \phi$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

Se sabe por el teorema de dependencia continua que Ω_t es abierto.

Consideramos la aplicación

$$\Omega_t \longrightarrow \Omega, \quad \xi \longmapsto x(t, \xi)$$

"Fotografía del fluido en el instante t"

Se sabe por el teorema de diferenciabilidad de las condiciones iniciales que esta aplicación es de clase C^1 y su matriz jacobiana $Y(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)$ es solución del problema matricial de valores iniciales

$$\dot{Y} = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x(t, \xi)) Y, \quad Y(0) = I_d$$

Ecuación linealizada o variacional a lo largo de $x(t, \xi)$.

Es fácil comprobar que esta transformación es un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen. Para ello conviene observar cuál es la inversa: partimos de una solución que en el tiempo t vale σ y calculamos su posición en el instante 0. En otras palabras, miramos del revés la película del movimiento.

En general puede no ser posible resolver la ecuación variacional aunque se conozca la solución $x(t,\xi)$ de manera explícita. Sin embargo siempre es posible conocer $\det Y(t)$. Recordamos la fórmula de Jacobi-Liouville para sistemas lineales

$$\mathring{Y} = A(t)Y, \; Y(0) = I_d, \quad \det Y(t) = \exp\left\{ \int_0^t \operatorname{tr} A(s)\,ds \right\}$$

que aplicaremos a la ecuación variacional,

$$\det\left\{\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi)\right\} = \exp\left\{ \int_0^t \operatorname{tr}\left\{\frac{\partial X}{\partial x}(s, x(s,\xi))\right\} ds \right\}$$

$$= \exp\left\{ \int_0^t \operatorname{div}_x X(s, x(s,\xi))\,ds \right\}$$

donde $\operatorname{div}_x X = \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial X_d}{\partial x_d}$.

Dado un difeomorfismo de $\mathbb{R}^d$, el determinante de la matriz jacobiana da información sobre cómo se deforma la medida de Lebesgue.

Definición Sean Ω y Ω_1 abiertos de $\mathbb{R}^d$ y $h:\Omega\to\Omega_1$ un homeomorfismo. Diremos que h conserva la medida si

$$\forall A\subset\Omega, \qquad A \text{ medible} \iff h(A) \text{ medible}$$

$$\text{y} \qquad \mu(h(A)) = \mu(A)$$

[μ refiere a la medida de Lebesgue]

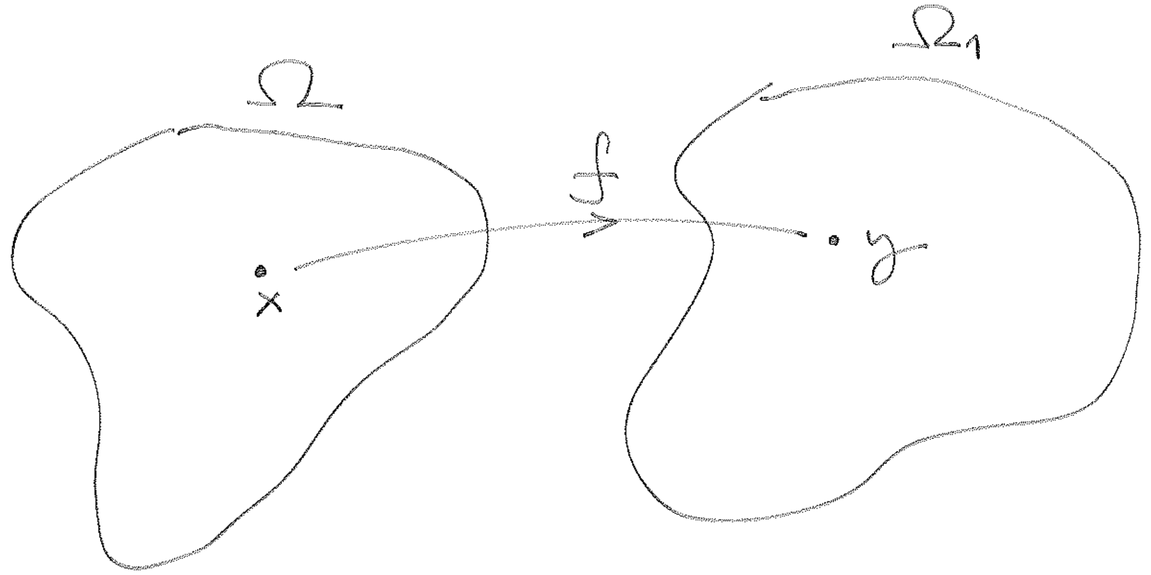
Ejemplos $N=2$, $\Omega=\Omega_1=\mathbb{R}^2$, $h(x)=Ax$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Una contracción no conserva áreas.

Lema Sean Ω y Ω_1 abiertos conexos de $\mathbb{R}^d$ y $f:\Omega\to\Omega_1$ un difeomorfismo de clase C^1. Entonces f conserva la medida si y sólo si $\det f' \equiv 1$ o $\det f' \equiv -1$ en todo Ω.

Dem



Dado $A_1 \subset \Omega_1$ medible, también lo es $A = f^{-1}(A_1)$ y, aplicando el Teorema de cambio de variable, $y = f(x)$,

$$\mu(A_1) = \int_{A_1} dy = \int_A |\det f'(x)|\, dx$$

A partir de esta identidad es fácil concluir.

Proposición El flujo a tiempo t, $\xi \in \Omega_t \mapsto x(t,\xi)$ conserva la medida si ~~y sólo si~~

$$\operatorname{div}_x X \equiv 0.$$

Dem. Es suficiente observar que $\det\left\{\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi)\right\} = 1$; en particular también conserva la orientación.

Ejemplo $\dot{x} = (\sin t)x$, $\cancel{N} = 1$.

$x(t,\xi) = e^{1-\cos t}\xi$. Esta aplicación conserva la longitud si $t = 2\pi$ pero $\operatorname{div}_x X(t,x) = \sin t$.

Consideramos ahora un sistema hamiltoniano

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(t,q,p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(t,q,p)$$

donde $H \in C^{0,2}(\mathbb{R} \times \Omega)$. Definimos $d = 2N$ $x = (q,p)$, $X = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$. Si calculamos la divergencia

$$\operatorname{div}_x X = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

por la regla de las derivadas cruzadas.

Llegamos así al célebre

Teorema de Liouville El flujo a tiempo t de un sistema hamiltoniano de clase $C^{0,2}$ conserva la medida.

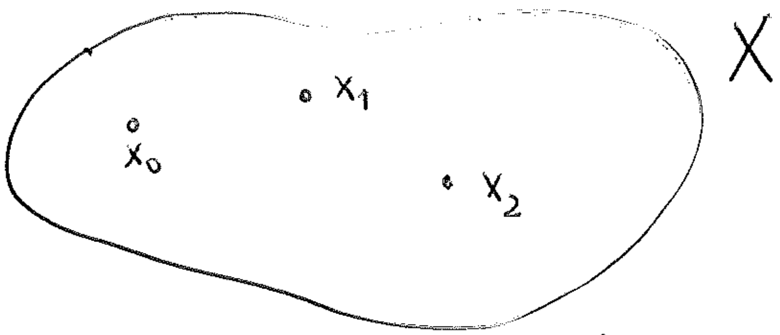
Lectura: Les méthodes nouvelles

Dinámica discreta y recurrencia

Sea X un conjunto y $h: X \to X$ una aplicación dada. Consideramos la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = h(x_n)$$

y pensamos en la sucesión $\{x_n\}$ como una descripción de las posiciones que ocupa una partícula en X a lo largo del tiempo.



Observamos que dado $x_0 \in X$ la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ está bien definida (existencia y unicidad hacia el futuro). Si queremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ esté definida necesitamos h sobreyectiva y si queremos que la sucesión esté determinada por x_0, h inyectiva. En suma si h es biyectiva el "problema de Cauchy" global tiene solución única. Si suponemos que X es un espacio topológico (o métrico) y que h es un homeomorfismo obtendremos dependencia continua: fijado $N\in\mathbb{Z}$, $x_0\in X$ y $\varepsilon>0$ encontramos $\delta>0$:

$$x_0^*\in X,\ d(x_0,x_0^*)<\delta \Longrightarrow d(x_N,x_N^*)<\varepsilon$$

A partir de ahora suponemos que X es un espacio métrico y $h: X\to X$ un homeomorfismo. Un punto $x_0\in X$ se dice recurrente si existen sucesiones de enteros $\alpha_n\to-\infty$, $\omega_n\to+\infty$ de manera que

$$h^{\alpha_n}(x_0)\to x_0\ ,\ h^{\omega_n}(x_0)\to x_0.$$

La partícula regresa a la cercanía de x_0 tanto en el pasado como en el futuro

Ejemplos $X=\mathbb{R}^2$,

h rotación: todos los puntos son recurrentes

h contracción: sólo el origen es recurrente

h traslación: no hay puntos recurrentes

Sea Ω un abierto y conexo de $\mathbb{R}^d$ y

$$\dot{x} = X(x)$$

un sistema autónomo con X de clase C^1, $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Suponemos que todas las soluciones están globalmente definidas. Empleamos la notación $\phi_t(x)$ para designar a la solución que pasa por x para $t=0$. Es bien sabido que se cumplen las propiedades de flujo

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \, , \quad \phi_0 = id.$$

Fijamos $T>0$ y consideramos el difeomorfismo de Ω, $h = \phi_T$. Observamos que

$$h^n = (\phi_T)^n = \phi_{nT}$$

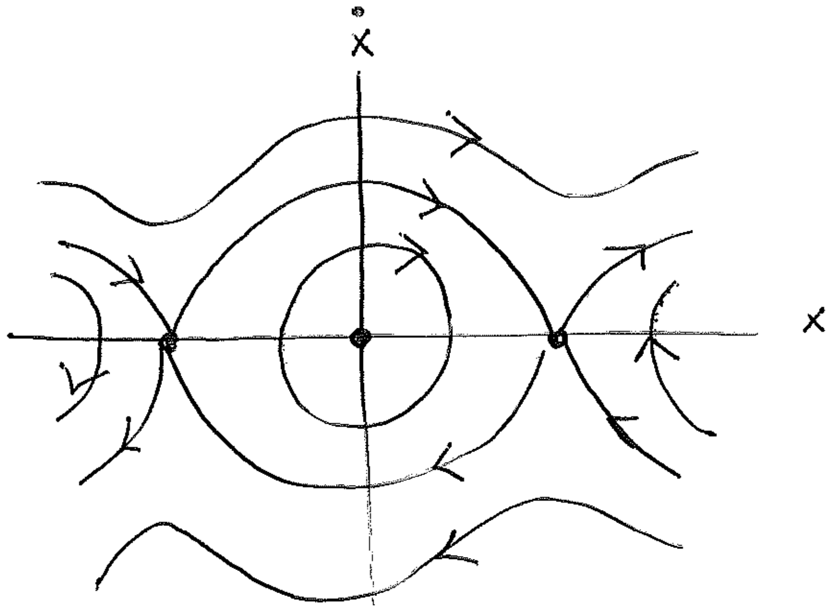
y así, seguir la dinámica discreta de h es tanto como seguir la solución para los tiempos nT, $n \in \mathbb{Z}$. En particular, si x es recurrente para h, existen tiempos $t_n \to +\infty$ y $\tau_n \to -\infty$ tales que

$$\phi_{t_n}(x) \to x, \quad \phi_{\tau_n}(x) \to x.$$

Ejemplo: Ecuación del péndulo $\ddot{x} + \operatorname{sen} x = 0$

Fijamos $T=1$, $h = \phi_1$, $\Omega = \mathbb{R}^2$ o

$$\Omega = \left(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}\right) \times \mathbb{R}$$



Si lo consideramos en el plano, son recurrentes los equilibrios y los puntos sobre órbitas cerradas. Si se considera en el cilindro todas las órbitas, salvo las homoclinas, están compuestas por puntos recurrentes.

Teorema de recurrencia de Poincaré

Partimos de un espacio métrico (X,d) que es separable (existe un subconjunto denso y numerable). Se supone además que sobre X hay definida una medida, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y que los abiertos son medibles ($\mathcal{A}$ contiene a los borelianos)

$$\boxed{\mu(X) < \infty}.$$

Sea $h: X \to X$ un homeomorfismo que conserva la medida; es decir,

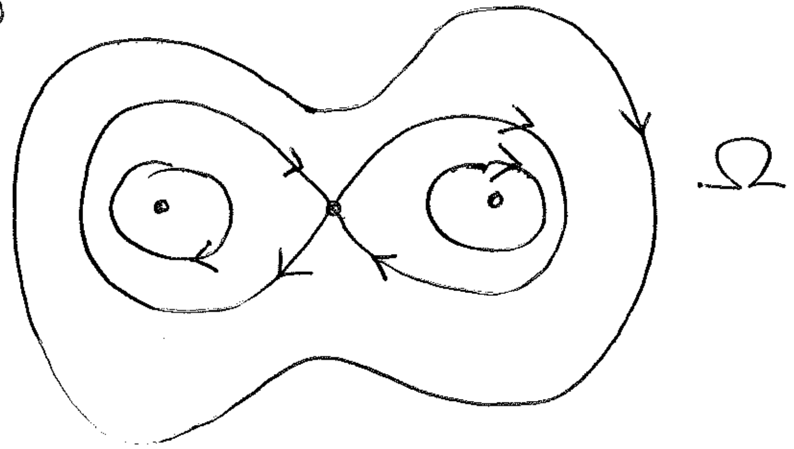
$$A \in \mathcal{A} \iff h(A) \in \mathcal{A}, \quad \mu(h(A)) = \mu(A).$$

Entonces casi todo punto de X es recurrente.

Ejemplos

1. Ecuación de Duffing

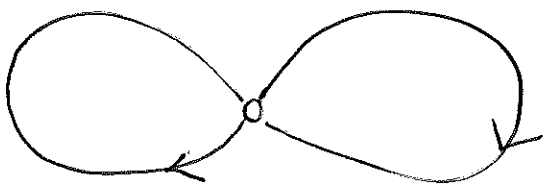
$\ddot{x} + x^3 - x = 0$



Ω es la región delimitada por una órbita

$h = \phi_1$, μ medida de Lebesgue (se conserva gracias al T^a de Liouville)

Puntos no recurrentes

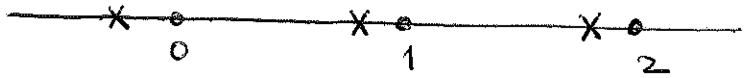


de medida cero.

2. $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\bar{x} \in X$, $\bar{x} = x + \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$

$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$

donde $\|\bar{x}\| = dist(x, \mathbb{Z})$



μ medida de Haar $\qquad \pi : \mathbb{R} \to X$

$$A \subset X, \quad \mu(A) = \mu_{Leb}\left(\pi^{-1}(A) \cap [0,1]\right)$$

$h : X \to X, \quad h(\bar{x}) = \overline{x+\alpha} \quad$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ fijado

h conserva la medida por ser μ la medida de Haar

Para casi todo x, existe $n_k \to +\infty$:

$$\overline{x + n_k\alpha} = h^{n_k}(\bar{x}) \to \bar{x}$$

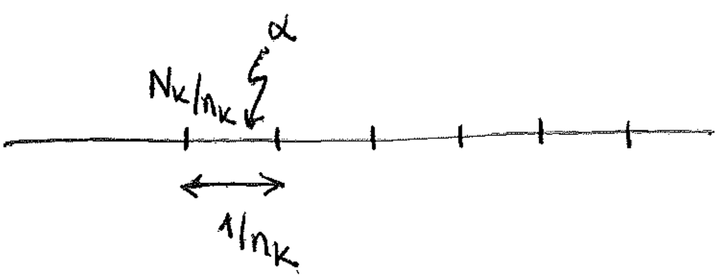
$$\Longrightarrow \exists N_k \in \mathbb{Z} : \quad x + n_k\alpha - N_k \cancel{\alpha} \to x$$

$$\Longrightarrow \quad n_k\alpha - N_k \to 0 \Longrightarrow \left|\alpha - \frac{N_k}{n_k}\right| = o\left(\frac{1}{n_k}\right)$$

Propiedad de aproximación de números reales por racionales. Conviene observar que la estimación

$$\left|\alpha - \frac{N_k}{n_k}\right| = O\left(\frac{1}{n_k}\right)$$

es obvia



$$\left|\alpha - \frac{N_k}{n_k}\right| \leq \frac{1}{n_k}$$

Ejercicio 2.2 Se supone que la medida de un abierto no vacío es positiva y X está en las condiciones anteriores. Demuestra que si $h: X \to X$ conserva la medida entonces no hay atractores ni repulsores.

[Definición de atractor: $h(p)=p$, existe V abierto, $p \in V$, $\forall x \in V$, $h^n(x) \to p$ si $n \to +\infty$

repulsor: atractor para h^{-1}]. Probar que la hipótesis sobre la medida de los abiertos es esencial.

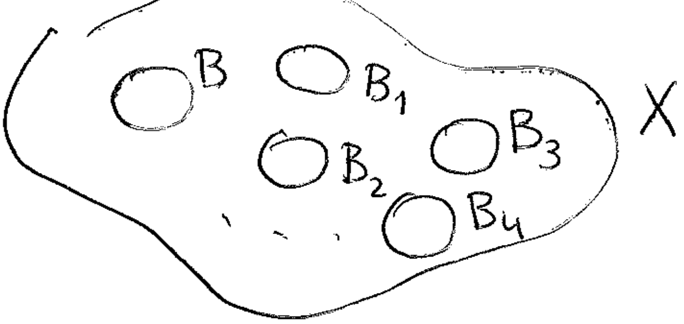
Un intento de demostración. Suponemos que la medida de las bolas es positiva.

Dado $x \in X$ fijamos una bola B centrada en x y observamos que ha de existir $n \geq 1$ de manera que

$$B \cap h^n(B) \neq \phi.$$

Para justificar esto observamos en primer lugar que los conjuntos $h^n(B), n \geq 0$, no pueden ser disjuntos dos a dos pues en otro caso

$$\mu(X) \geq \mu\Big(\bigcup_{n \geq 0} h^n(B)\Big) = \sum_n \underbrace{\mu(h^n(B))}_{\mu(B)} = \infty$$

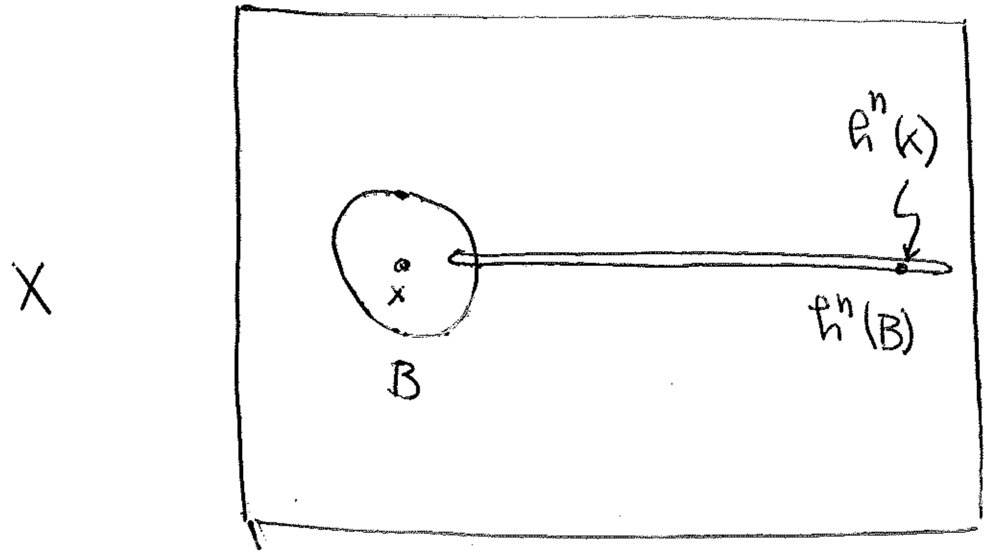


Por tanto existen $m > p$ tales que

$$h^m(B) \cap h^p(B) \neq \phi$$

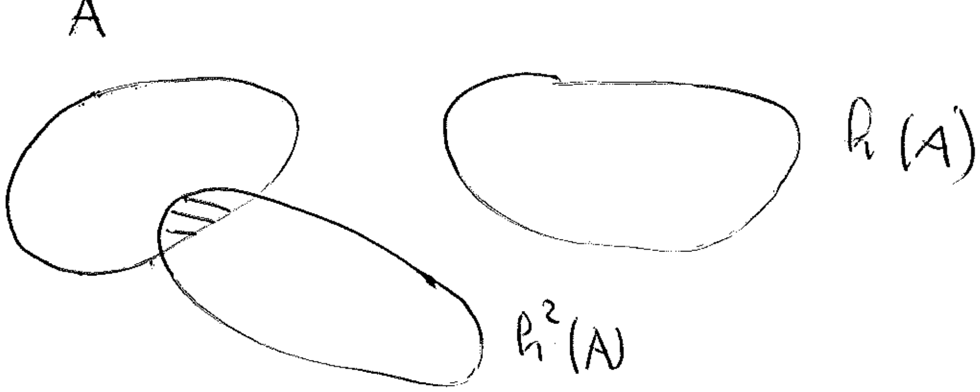
$$\Longrightarrow h^{m-p}(B) \cap B \neq \phi$$

Sin embargo esta propiedad de las bolas no es suficiente para probar el teorema como muestra el siguiente dibujo



<u>Demostración</u> Dado $A \in \mathcal{A}$ definimos

$$A_\infty = A - \bigcup_{i=1}^{\infty} [\, h^i(A) \cap A \,]$$



A_∞ = puntos que empiezan en A pero no regresan a ese conjunto en el futuro

Observamos que $A_\infty \in \mathcal{A}$ y afirmamos que

(*) $$\mu(A_\infty)=0.$$

Para ello repetimos la construcción para cada n, partiendo de $A_n = h^n(A)$ y obtenemos

$$A_{n\infty} = A_n - \bigcup_{i=n+1}^{\infty} (A_i \cap A_n)$$

Observamos que $h(A_{n\infty}) = A_{n+1,\infty}$. Además los conjuntos $A_{n\infty}$ son disjuntos dos a dos pues si $m>n$

$$A_{m\infty} \subset A_m, \quad A_{n\infty} \cap A_m = \phi \Rightarrow A_{m\infty} \cap A_{n\infty} = \phi$$

Como h conserva la medida,

$$\mu(A_{n\infty}) = \mu(A_{m\infty})$$

y, por ser X de medida finita, concluimos que

$$\mu(A_{n\infty}) = 0 \text{ para cada } n.$$

Una vez que hemos probado la propiedad (*) consideramos una base numerable de la topología $\{\mathcal{U}^\lambda ; \lambda \in \mathbb{N}\}$. Los conjuntos $\mathcal{U}^\lambda$ son abiertos y dados $x \in \mathcal{U}$ abierto existe $\lambda \in \mathbb{N} : x \in \mathcal{U}^\lambda \subset \mathcal{U}$.

Por ejemplo: $\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in \mathcal{D}, n \geq 1\}$ donde $\mathcal{D}$ es un conjunto denso y numerable

Consideramos el conjunto

$$Z_1 = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathcal{U}^{\lambda}_{\infty}$$

que tiene medida cero. Obsérvese que cada $\mathcal{U}^{\lambda} \in \mathcal{A}$. Tomamos $x \in X - Z_1$ y $n \geq 1$.

Existirá λ_n : $x \in \mathcal{U}^{\lambda_n} \subset B(x, \frac{1}{n})$

Como x no está en $\mathcal{U}^{\lambda_n}_{\infty}$ ha de existir $\sigma_n \geq 1$ de manera que $x \in h^{\sigma_n}(\mathcal{U}^{\lambda_n})$. Por tanto $h^{-\sigma_n}(x) \in \mathcal{U}^{\lambda_n} \subset B(x, \frac{1}{n})$.

Hemos obtenido una sucesión de enteros $\sigma_n \geq 1$ de manera que $d(h^{-\sigma_n}(x), x) \leq \frac{1}{n}$.

Distinguimos dos casos:

a) $\{\sigma_n\}$ está acotada

Extraemos una parcial constante y encontramos $\sigma \geq 1$ de manera que

$$d(h^{-\sigma}(x), x) \longrightarrow 0$$

Es decir, $h^{-\sigma}(x) = x$, x es un punto periódico y entonces recurrente, $h^{n\sigma}(x) = x$.

b) $\{\sigma_n\}$ no está acotada

Extraemos una parcial $\{\sigma_{n_k}\} \to +\infty$

y $h^{-\sigma_{n_k}}(x) \to x$.

Hemos probado que los puntos en $X - Z_1$ son recurrentes para el pasado. Ahora repetimos el juego haciendo una definición de A_∞ hacia el pasado o, si se quiere, repetimos el argumento para h^{-1}. Obtenemos un nuevo conjunto $\hat{Z}_1$ y todos los puntos en $X - (Z_1 \cup \hat{Z}_1)$ son recurrentes.

Una aplicación al problema restringido

Siegel-Moser Lectures on Celestial Mechanics §37

Consideramos la formulación hamiltoniana con

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\|p - Jq\|^2 - G(q),$$

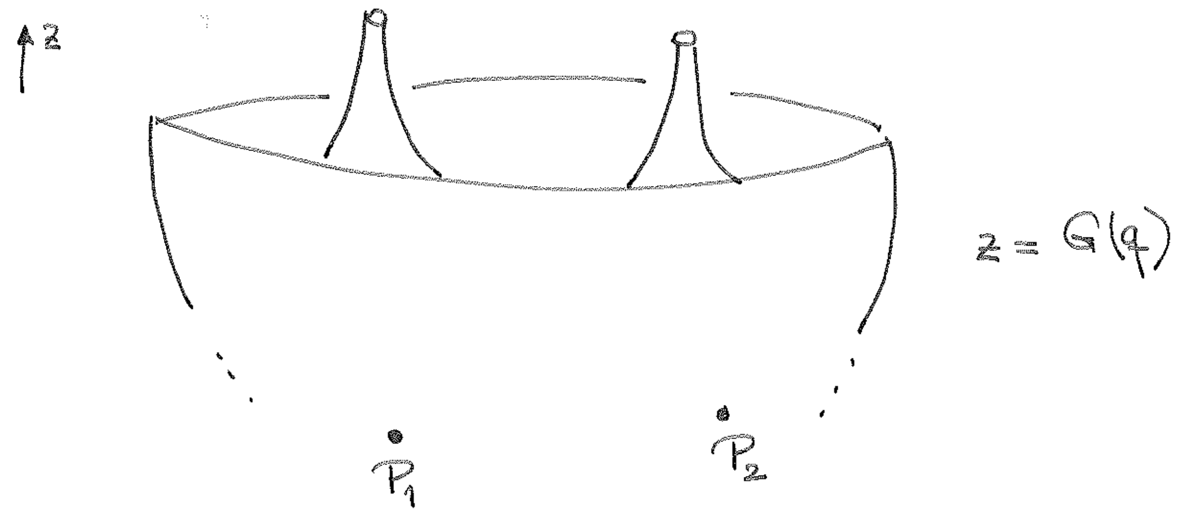
$$G(q) = \frac{1}{2}\|q\|^2 + \frac{1-\mu}{\|q - P_1\|} + \frac{\mu}{\|q - P_2\|}$$

$$q \in \mathbb{R}^2 - \{P_1, P_2\}, \quad p \in \mathbb{R}^2$$

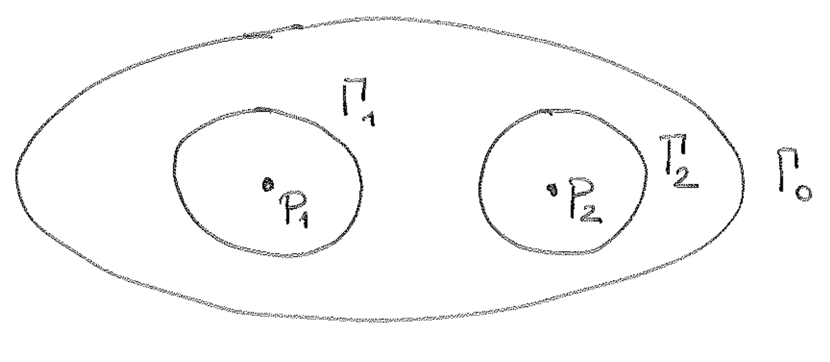
Sabemos que H es una integral primera

Vamos a probar que si H es una constante negativa y grande y la solución empieza cerca de una primaria, entonces casi seguro que es recurrente.

Para dar precisión a esta afirmación (y probarla) comenzamos pensando en la gráfica de la función G. Además de los dos puntos singulares P_1 y P_2 donde $G \to +\infty$, hay 5 puntos críticos, 3 sillas y 2 mínimos globales. Además G es coerciva, $G(q) \to +\infty$ si $\|q\| \to \infty$. A partir de aquí podemos describir el conjunto $\{G \geq c_*\}$ para c_* grande



Existen tres curvas de Jordan Γ_1, Γ_2 y Γ_0 que forman el conjunto de nivel $G = c_*$ y tienen la posición del dibujo



Denotamos por $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ las regiones interiores delimitadas por Γ_1 y Γ_2 y $\mathcal{E}$ es la región exterior a Γ_0.

Se cumple

$$G(q) > c_* \Longrightarrow q \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{E}$$

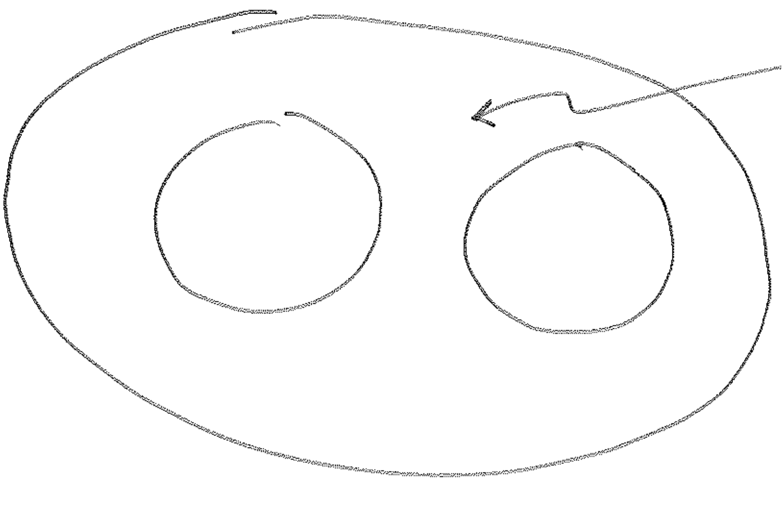
Fijamos $c_1 > c_2 > c_*$ y consideramos el conjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{X} = \left\{ (q,p) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} -c_1 \leq H(q,p) \leq -c_2, \\ q \in \mathcal{R}_1 - \{P_1\} \end{array} \right\}$$

Este conjunto tiene la siguiente propiedad de invarianza débil: si $(q(t),p(t))$ es una solución con $(q(0),p(0)) \in \mathcal{X}$ entonces $(q(t),p(t)) \in \mathcal{X}$ $\forall t \in]\alpha,\omega[$

Esto se sigue del hecho de que H es integral primera y $\mathcal{R}_1$ es una componente conexa de $G > c_*$ pues si $(q,p) \in \mathcal{X}$,

$$G(q) = -H(q,p) + \frac{1}{2}\|p - Jq\|^2 \geq c_2 > c_*$$



zona prohibida en el nivel $H = -c$, $c > c_*$

Además X tiene medida finita pues, dado $q \in \mathcal{R}_1 - \{P_1\}$,

$$-c_1 + G(q) \leq \frac{1}{2}\|p - Jq\|^2 = H(q,p) + G(q) \leq$$

$$\leq -c_2 + G(q)$$

Esto dice que p se mueve en una corona circular centrada en Jq y radios $\sqrt{2(G(q)-c_i)}$, $i=1,2$,

Así,
$$\mu_{\mathbb{R}^4}(X) \leq \mu_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{R}_1)\, 2\pi\,(c_1 - c_2).$$

No podemos aplicar el teorema de recurrencia en la región $\mathcal{X}$ porque hay soluciones que no están definidas en todo $\mathbb{R}$. Se puede probar que el conjunto

$$Z_1 = \{(q_0,p_0) \in \mathcal{X} : \text{la solución que } \cancel{\text{empieza en } (q_0,p_0)} \text{ pasa en algún instante por } (q_0,p_0) \text{ cumple } \alpha > -\infty \text{ o } \omega < \infty\}$$

tiene medida cero. De hecho estas soluciones colisionan con P_1. Ahora el conjunto $X = \mathcal{X} - Z_1$ es invariante por el flujo y es ahí donde podemos aplicar el Teorema de recurrencia con

$h(q,p) = \Phi_T(q_0,p_0)$, Φ_t flujo asociado al problema restringido

Ejercicio Justifica la recurrencia en las variables $(z,\dot{z})$. ~~o incluso respecto al sistema~~