Sistemas Hamiltonianos

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ con coordenadas (q,p), $q = (q_1, \dots q_N)$, $p = (p_1, \dots p_N)$ y sea

$$H : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad (t,q,p) \mapsto H(t,q,p)$$

una función dada (el hamiltoniano). Se supone que H está en $C^{0,1}(\mathbb{R}\times\Omega)$ y se define el sistema de $2N$ ecuaciones diferenciales

$$\mathring{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(\cancel{q,p}\, t,q,p), \quad \mathring{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(t,q,p).$$

N = grados de libertad

Ω = espacio de fases

q, p = variables conjugadas.

En notación más sintética, $z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \Omega$

$$\mathring{z} = J \, \nabla_z H(t,z)$$

con $J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$.

En ocasiones se cambia el signo, $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix}$. Se pasa de uno a otro invirtiendo ~~$t \mapsto -t$ el sentido del tiempo~~ cambiando H por $-H$

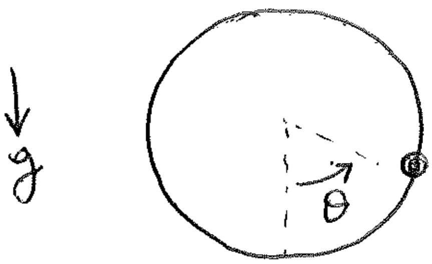
En el caso autónomo $H = H(q,p)$ el propio hamiltoniano es integral primera del sistema;

es decir, si $(q(t), p(t))$ es una solución definida en $]\alpha, \omega[$ entonces $H(q(t), p(t))$ es constante.

Dem. $\frac{d}{dt} H(q,p) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = 0.$

Además, como en todo sistema autónomo, hay invarianza con respecto a traslaciones temporales; es decir, si $(q(t), p(t))$ es solución definida en $]\alpha, \omega[$, $\tau \in \mathbb{R}$, entonces $(q(t-\tau), p(t-\tau))$ solución, $t \in]\alpha+\tau, \omega+\tau[$

Ejemplo Ecuación del péndulo $\ddot{\theta} + a \operatorname{sen}\theta = 0$



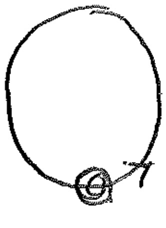
$q = \theta, \; p = \dot{\theta}$

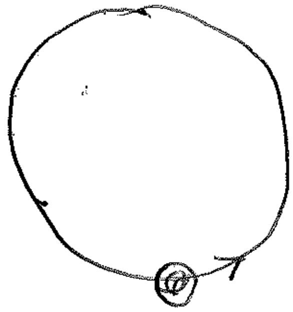
$H(q,p) = \frac{1}{2} p^2 - a\cos q$

Ecuación del péndulo de longitud variable $\ddot{\theta} + a(t)\operatorname{sen}\theta = 0$

$$H(t,q,p) = \frac{1}{2}p^2 - a(t)\cos q$$

Experimento: se impulsa una partícula desde el equilibrio con velocidad 1; si se efectúa el experimento una hora más tarde ¿Se obtiene el mismo resultado?



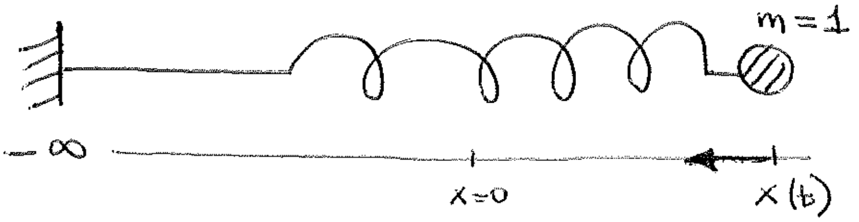


Dada una solución del sistema autónomo $(q(t), p(t))$ definimos la órbita asociada

$$\Gamma = \{ (q(t), p(t)) : t \in]\alpha, \omega[\} \subset \Omega$$

Si hay unicidad para el problema de valores iniciales las órbitas fibran el espacio de fases: por cada punto de Ω pasa una única órbita.

<u>Ejemplo</u> El oscilador armónico $\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \ \omega > 0$

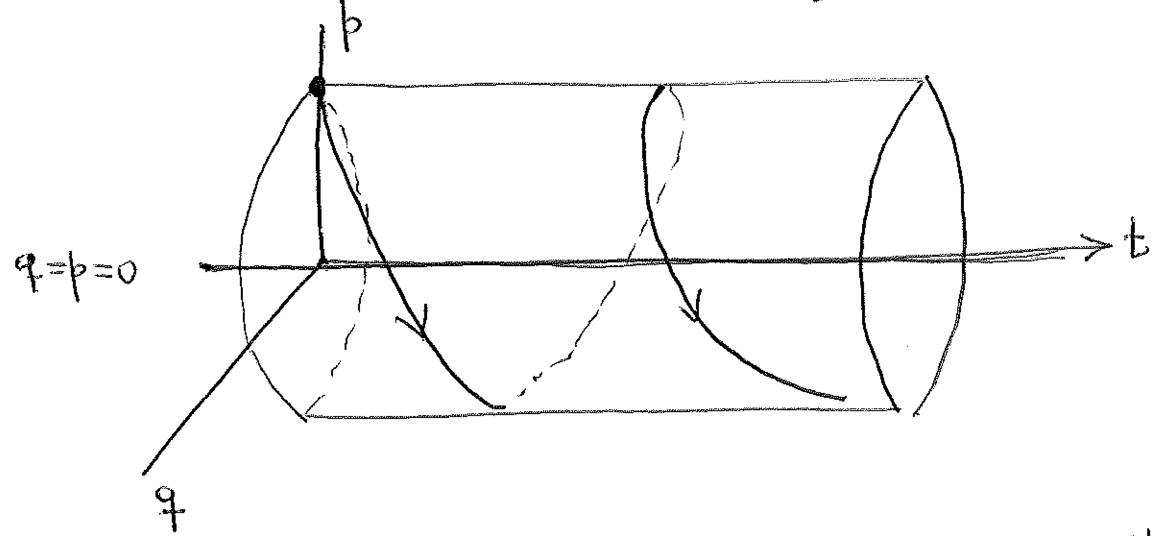


$q = x, \quad p = \dot{x}$

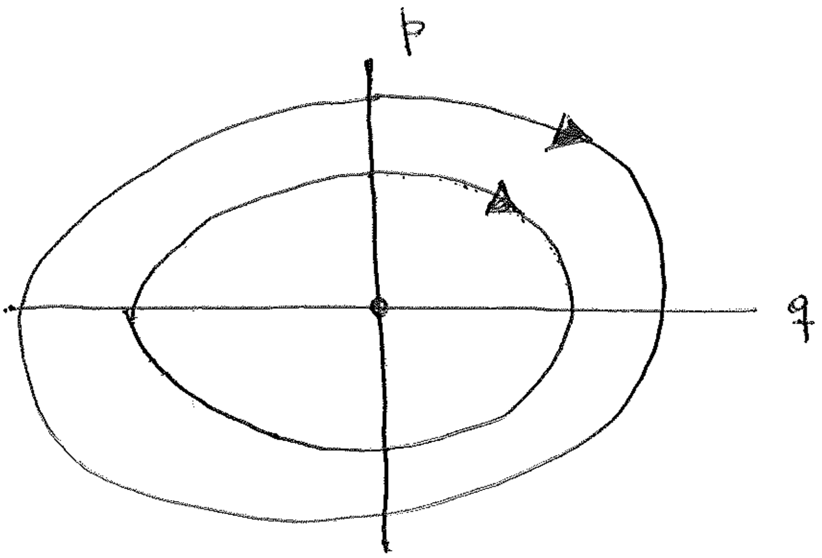
$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2$$

Soluciones: $q(t) = A\cos\omega(t-\tau), \ p(t) = -A\omega\sin\omega(t-\tau)$

Órbitas: elipses $\frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 = \text{cte}$



Gráficas de las soluciones: $(t, q(t), p(t))$ hélices de base elíptica



Más ejemplos

① Presa y Depredador (Volterra)

$$\begin{cases} \dot{u} = (a - bv)u & u, v > 0 \\ \dot{v} = (-c + du)v & a, b, c, d > 0 \end{cases}$$

u = presa, v = depredador

Efectuamos el cambio de variable

$$e^q = u, \quad e^p = v$$

$$\dot{q} = a - be^p, \quad \dot{p} = -c + de^q$$

Buscamos $H = H(q,p)$ de manera que

$$\frac{\partial H}{\partial p} = a - be^p, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = c - de^q$$

$$H = ap + cq - be^p - de^q$$

Ejercicio 1 Demuestra que en las coordenadas originales u y v el sistema de presa y depredador no tiene estructura hamiltoniana

Ejercicio 2 Se considera el sistema $\dot{x} = -x, x \in \mathbb{R}^{2N}$

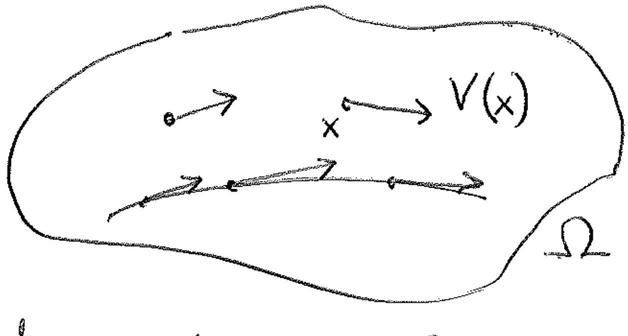
Demuestra que no existe ningún difeomorfismo de $\mathbb{R}^{2N}$ (cambio de variable) $\varphi : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ que transforme el sistema en uno hamiltoniano.

[Sugerencia: Demuestra que $\dot{x} = -x$ no tiene más integrales primeras continuas que las constantes]

(2) Fluidos incompresibles

Sea Ω un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$ y $V : \Omega \to \mathbb{R}^2$ el campo de velocidades. El movimiento de una partícula inmersa en este fluido será

$$\dot{x} = V(x)$$



Obsérvese que el sistema es autónomo porque estamos suponiendo que el fluido es estacionario: la velocidad no cambia con el tiempo. Suponemos también la incompresibilidad

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0$$

La 1-forma

$$\omega = V_1\, dx_2 - V_2\, dx_1$$

es cerrada, $d\omega = \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 =$

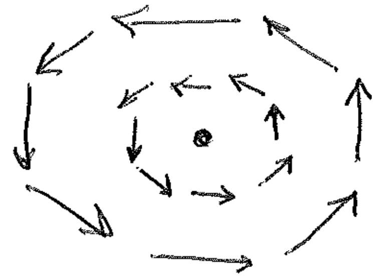
$$(\operatorname{div} V)\, dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

Entonces existe una función (regular si V lo es) $J : \Omega \to \mathbb{R}$ de manera que

$$dJ = \omega .$$

Así, $V_1 = \dfrac{\partial J}{\partial x_2}$, $V_2 = -\dfrac{\partial J}{\partial x_1}$ y el sistema es hamiltoniano.

Ejemplo: $V(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$



$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}\right\} \quad J = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

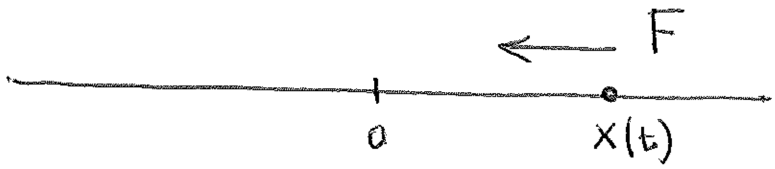
Volvemos al oscilador

Ejercicio 3. En la corona $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2 \}$ encuentra un campo V con divergencia cero de manera que $\dot{x} = V(x)$ no tenga estructura hamiltoniana

Osciladores

Pensamos en una partícula de masa m que se mueve en una recta sometida a un campo de fuerzas $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

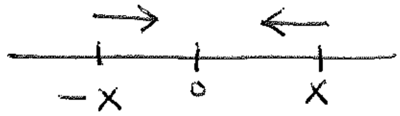
$$m\ddot{x} = F(x)$$



Se supone que la fuerza es atractiva:

$$x\,F(x) < 0 \quad \text{si } x \neq 0$$

y simétrica $\quad F(-x) = -F(x)$



Si además F es regular podemos desarrollar por Taylor en $x=0$,

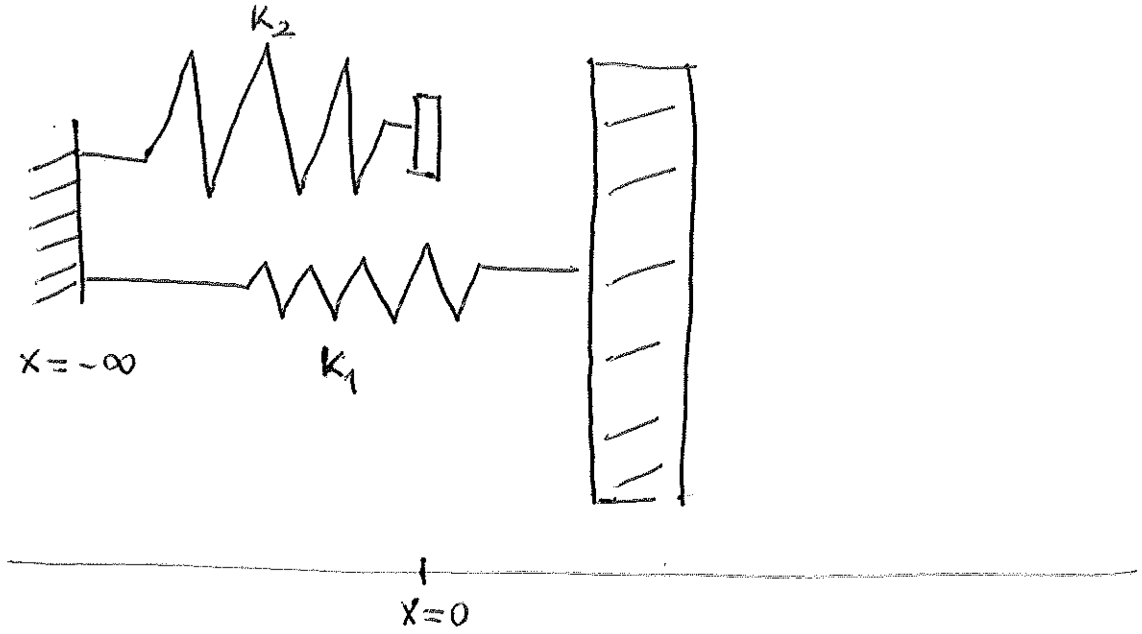
$$F(x) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{F(0)} + F'(0)x + \frac{1}{2}\underset{\substack{\| \\ 0}}{F''(0)}x^2 + \frac{1}{6}F'''(0)x^3 + \dots$$

Si nos quedamos con los términos lineales llegamos a la ley de Hooke $F(x) \simeq F'(0)x$ y volvemos al oscilador armónico. Si llegamos hasta los términos cúbicos

$$m\ddot{x} = -ax - bx^3, \qquad a > 0$$

(Ecuación de Duffing) Si queremos que sea atractiva exigiremos $b > 0$.

Una manera interesante de crear osciladores no lineales consiste en usar muelles lineales con topes. Ejemplo:



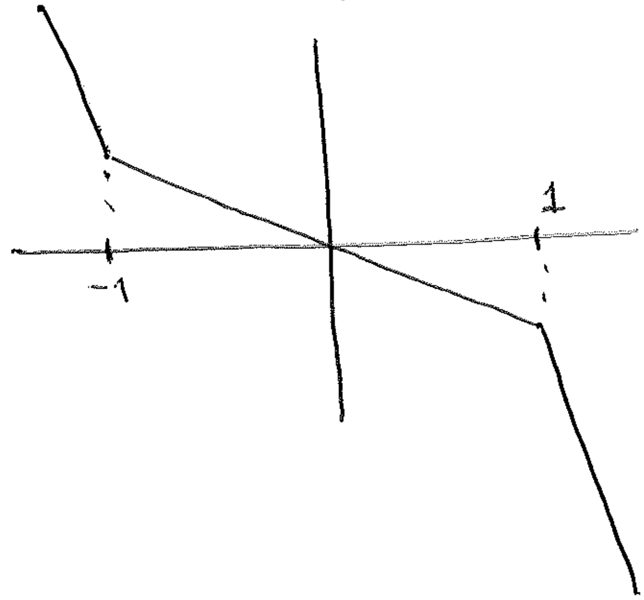
Para $x>0$ sólo actúa el muelle 1, para $x<0$ se superponen los dos muelles,

$$m\ddot{x} = \begin{cases} -k_1 x\,, & x \geq 0 \\ -(k_1+k_2)x\,, & x<0 \end{cases} = -k_1 x^+ - (k_1+k_2)x^-$$

$$\ddot{x} + a x^+ - b x^- = 0\,, \qquad a,b>0\,,\ a \neq b$$

<u>Oscilador asimétrico</u>

<u>Ejercicio</u> 4 Construye una máquina que [illegible] la ecuación $\ddot{x} = F(x)$ con F del tipo



A menudo los osciladores están sometidos a fuerzas externas que dependen del tiempo y se llega así a la ecuación

$$m\ddot{x} = F(x) + h(t)$$

que se dota de la estructura hamiltoniana

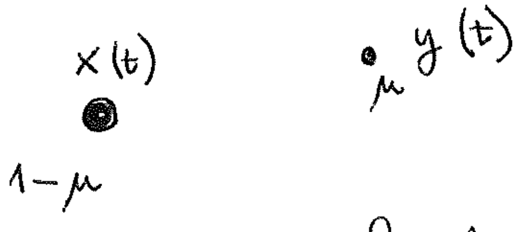
$$q = x, \quad p = m\dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = F(q) + h(t)\cancel{q} \end{cases} \qquad H(t,q,p) = V(q) - h(t)q + \frac{1}{2m}p^2$$

$$V' = -F$$

Soluciones circulares del problema de 2 cuerpos

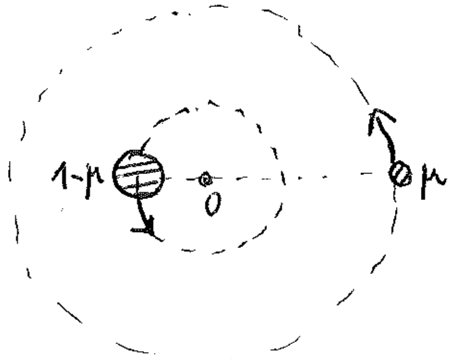
Consideramos un universo newtoniano con dos masas $\mu \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ y $1-\mu$



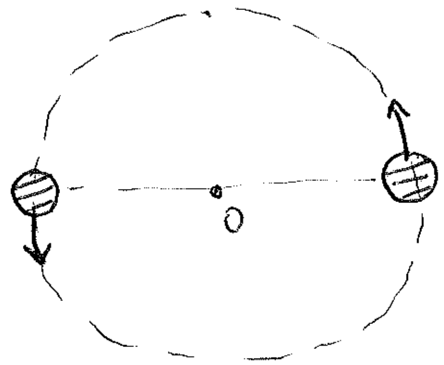
De acuerdo a la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal

$$\begin{cases} (1-\mu)\ddot{x} = G\mu(1-\mu)\dfrac{y-x}{\|y-x\|^3} \\ \\ \mu\ddot{y} = G\mu(1-\mu)\dfrac{x-y}{\|x-y\|^3} \end{cases}$$

Supondremos que $G=1$ y buscamos soluciones que roten alrededor del origen (centro de masas) a velocidad angular constante



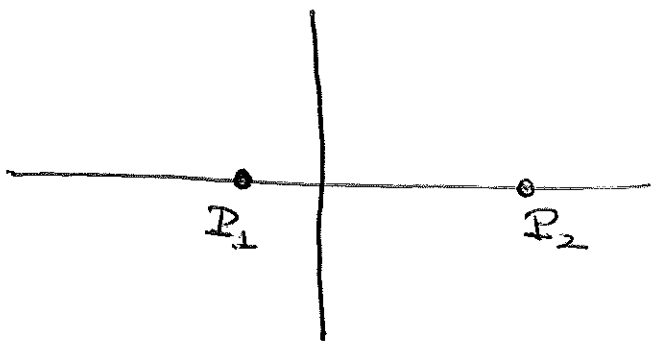
$\mu \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$



$\mu = \frac{1}{2}$

Hacemos $x(t) = R[\omega t] P_1$, $y(t) = R[\omega t] P_2$

donde P_1 y P_2 están en el eje x



$$R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación,

$$-\omega^2 (1-\mu) R[\omega t] P_1 = \mu (1-\mu) R[\omega t] \frac{P_2 - P_1}{\|P_2 - P_1\|^3}$$

$P_1 = (-\alpha, 0)$, $P_2 = (\beta, 0)$

Como el centro de masas está en el origen

$$(1-\mu) P_1 + \mu P_2 = 0 \implies \alpha = \lambda\mu,\ \beta = \lambda(1-\mu),\ \lambda > 0$$

$$\omega^2 \lambda \mu = \frac{\mu}{\lambda^2} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{1}{\lambda^3} \,.$$ Haremos $\lambda = 1$ y $\omega = 1$

De esta forma $P_1 = (-\mu, 0)$, $P_2 = (1-\mu, 0)$ y la unidad de longitud es la distancia entre los cuerpos.

El problema de dos cuerpos tiene una estructura hamiltoniana con las variables conjugadas

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \; q_1 = x, \; q_2 = y \;, \; p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \; p_1 = (1-\mu)\dot{x}, \; p_2 = \mu \dot{y}$$

$$(p, q) \in \left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 - \Delta\right) \times \left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\right)$$

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = y \right\}$$ espacio de colisiones (variedad lineal de 2 dim en $\mathbb{R}^4$)

y el hamiltoniano

$$\frac{1}{2(1-\mu)} \|p_1\|^2 + \frac{1}{2\mu} \|p_2\|^2$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \frac{\mu(1-\mu)}{\|q_1 - q_2\|}$$

El problema restringido de 3 cuerpos (plano y circular)

Suponemos tres cuerpos con masas $1-\mu, \mu, \varepsilon$ y posiciones en el plano $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$. Se cumplirá

$$\cancel{(1-\mu)}\, \ddot{r}_1 = \cancel{(1-\mu)}\, \mu \frac{(r_2 - r_1)}{\|r_2 - r_1\|^3} + \cancel{(1-\mu)}\, \varepsilon \frac{(r_3 - r_1)}{\|r_3 - r_1\|^3}$$

$$\cancel{\mu}\, \ddot{r}_2 = \cancel{\mu}(1-\mu) \frac{r_1 - r_2}{\|r_1 - r_2\|^3} + \cancel{\mu}\, \varepsilon \frac{r_3 - r_2}{\|r_3 - r_2\|^3}$$

$$\cancel{\varepsilon}\,\ddot{r}_3 = \cancel{\varepsilon}(1-\mu)\frac{r_1-r_3}{\|r_1-r_3\|^3} + \cancel{\varepsilon}\mu\frac{r_2-r_3}{\|r_2-r_3\|^3}$$

Simplificando y haciendo $\varepsilon \searrow 0$ (el tercer cuerpo tiene masa despreciable) obtenemos que r_1 y r_2 son soluciones de un problema de 2 cuerpos y r_3 cumple una ecuación que depende de r_1 y r_2. (Este proceso no tiene justificación desde el punto de vista de la mecánica Newtoniana, que requiere $\varepsilon>0$. Tiene una justificación matemática por la dependencia continua del parámetro ε)

Supondremos que r_1 y r_2 son soluciones circulares

$$r_1(t) = R[t]\,P_1, \quad r_2(t) = R[t]\,P_2$$

y así $r_3(t)$ será solución de un sistema no autónomo y 2π-periódico en t.

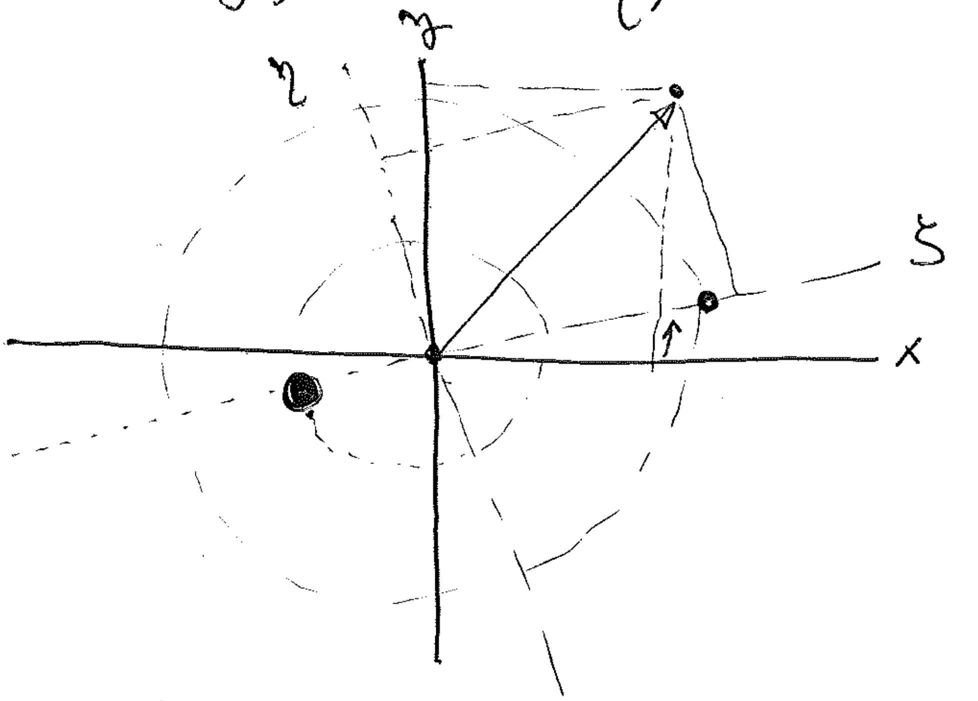
$$\ddot{r}_3 = (1-\mu)\frac{R[t]P_1-r_3}{\|R[t]P_1-r_3\|^3} + \mu\frac{R[t]P_2-r_3}{\|R[t]P_2-r_3\|^3}$$

Vamos a efectuar el cambio de variable

$$r_3 = R[t]\,z, \quad z=z(t)$$

Es decir, observamos la posición del satélite desde un punto ubicado en el centro de masas y que gira a la misma velocidad que las primarias

$$r_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$



Observamos que el nuevo sistema no es inercial.

Un cálculo prueba que

$$R[t] = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \dot{R}[t] = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t & -\cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

$$= +J\,R[t] = +R[t]\,J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{R}[t] = +J\,\dot{R}[t] = J^2 R[t] = -R[t]$$

$$r_3 = R[t]\,z \implies \dot{r}_3 = \dot{R}[t]\,z + R[t]\,\dot{z}$$

$$= +R[t]\,J z + R[t]\,\dot{z}$$

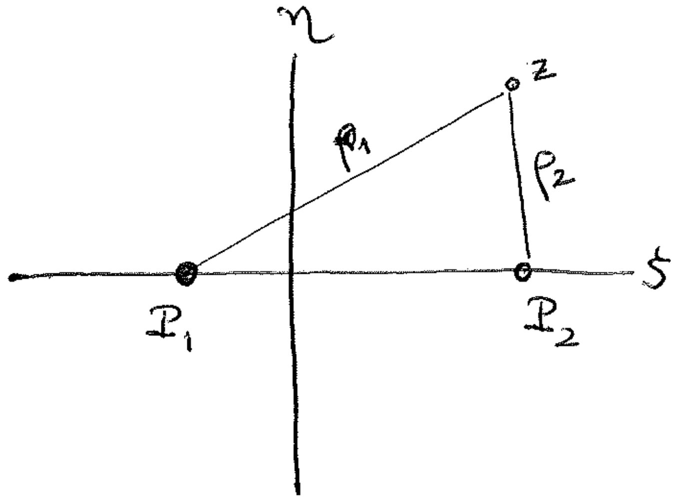
$$\ddot{r}_3 = \ddot{R}[t]\,z + 2\dot{R}[t]\,\dot{z} + R[t]\,\ddot{z}$$

$$= -R[t]\,z + 2R[t]\,J\,\dot{z} + R[t]\,\ddot{z}$$

Como $R[t]$ es una isometría lineal

$$\ddot{z} + 2J\dot{z} - z = (1-\mu)\frac{P_1 - z}{\|P_1 - z\|^3} + \mu\frac{P_2 - z}{\|P_2 - z\|^3}$$

Hemos llegado a un sistema autónomo definido en $\mathbb{R}^2 - \{P_1, P_2\}$



Hay que entender el alcance exacto del cambio de variable (que depende del tiempo periódicamente): un equilibrio en z se corresponde a una solución periódica en r_3, ...

En notación por coordenadas

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi = \dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}(-\mu - \xi) + \dfrac{\mu}{\rho_2^3}(1-\mu-\xi) \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta = -\dfrac{1-\mu}{\rho_1^3}\eta + \dfrac{\mu}{\rho_2^3}\eta \end{cases}$$

<u>Ejercicio 5</u> ¿Qué ocurriría si las primarias giraran en sentido horario? ¿Se llegaría a las mismas

ecuaciones?

Vamos a mostrar que el sistema tiene una estructura hamiltoniana pero para ello debemos escoger las variables conjugadas con cuidado, definimos

isomorfismo lineal

$$q = z \, , \quad p = Jz + \dot{z} \qquad \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ J & I_N \end{pmatrix}$$

[Motivación: $r = R[t]z$, $\dot{r} = R[t](Jz + \dot{z})$]

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\| p - Jq \|^2 - \frac{1}{2}\|q\|^2 + U(q)$$

$$U(q) = -\frac{1-\mu}{\|P_1 - q\|} - \frac{\mu}{\|P_2 - q\|}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q} = q + Jp - q + \nabla U(q) \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} = p - Jq \end{cases}$$

(Observación: J isometría $\|p - Jq\| = \|Jp + q\|$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= p - Jq \\ \dot{p} &= Jp - \nabla U(q) \end{aligned} \right\}$$

$$\ddot{q} = \dot{p} - J\dot{q} = Jp - \nabla U(q) - J\dot{q}$$

$$= -J\dot{q} - J^2 q - \nabla U(q) - J\dot{q} = -2J\dot{q} + q - \nabla U(q)$$

La cantidad H se mantiene constante a lo largo de las soluciones. Para casi todo valor $H = cte$ define una variedad de tres dimensiones, entonces el problema de 3 cuerpos restringido se puede pensar como un sistema autónomo sobre dicha variedad.

Ejercicio 6 (El principio de Galileo visto desde un sistema giratorio)

Consideramos una partícula que sigue la ley

$$\ddot{r} = 0$$

y se efectúa el ~~cambio~~ cambio de variable $r = R[t]z$. Encuentra la ecuación diferencial para z y asocia a dicha ecuación una estructura hamiltoniana. Describe las trayectorias $z(t)$.