

1. ¿Es estable el movimiento de la Tierra alrededor del Sol?

Para contestar a esta pregunta hay que precisar

- el modelo que se utiliza para describir el movimiento
- el significado del término estabilidad.

Comentamos con el punto a).

1er Modelo $m_S \gg m_{i,T}$ La masa del Sol es muy grande en comparación a la de la Tierra por ello suponemos que el Sol está fijo en el origen de coordena

$x = x(t) \in \mathbb{R}^3$ posición de la Tierra

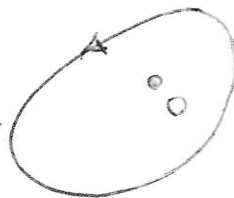


$$m_T \ddot{x} = -G m_S m_{i,T} \frac{x}{\|x\|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

Problema de Kepler

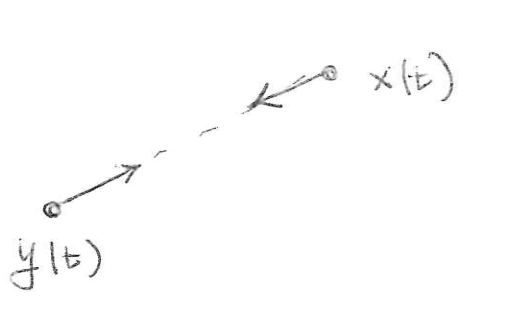
La Tierra sigue una órbita elíptica un periodo aproximado de un año

$\varphi(t)$ solución periódica



2º Modelo Dos cuerpos

$x = x(t)$ posición de la Tierra, $y = y(t)$ posición del Sol



$$\begin{cases} m_T \ddot{x} = -G m_T m_S \frac{y-x}{\|y-x\|^3} \\ m_S \ddot{y} = G m_T m_S \frac{x-y}{\|y-x\|^3} \end{cases}$$

$\frac{d^2}{dt^2} (m_T x + m_S y) = 0$. Fijamos el sistema de referencia de manera que el centro de gravedad esté fijo en el origen

$$m_T x + m_S y = 0$$

$$y = -\frac{m_T}{m_S} x, \quad m_T \ddot{x} = -G m_T m_S \left(1 + \frac{m_T}{m_S}\right)^{-2} \frac{x}{\|x\|^3}$$

Problema de Kepler

3er Modelo Interacciones con otros planetas (Jupiter, ...)
problema de N cuerpos...

La definición de estabilidad más conocida es la de Lyapunov, que vamos a discutir a continuación

2. Estabilidad en sentido de Lyapunov

Consideramos un sistema autónomo

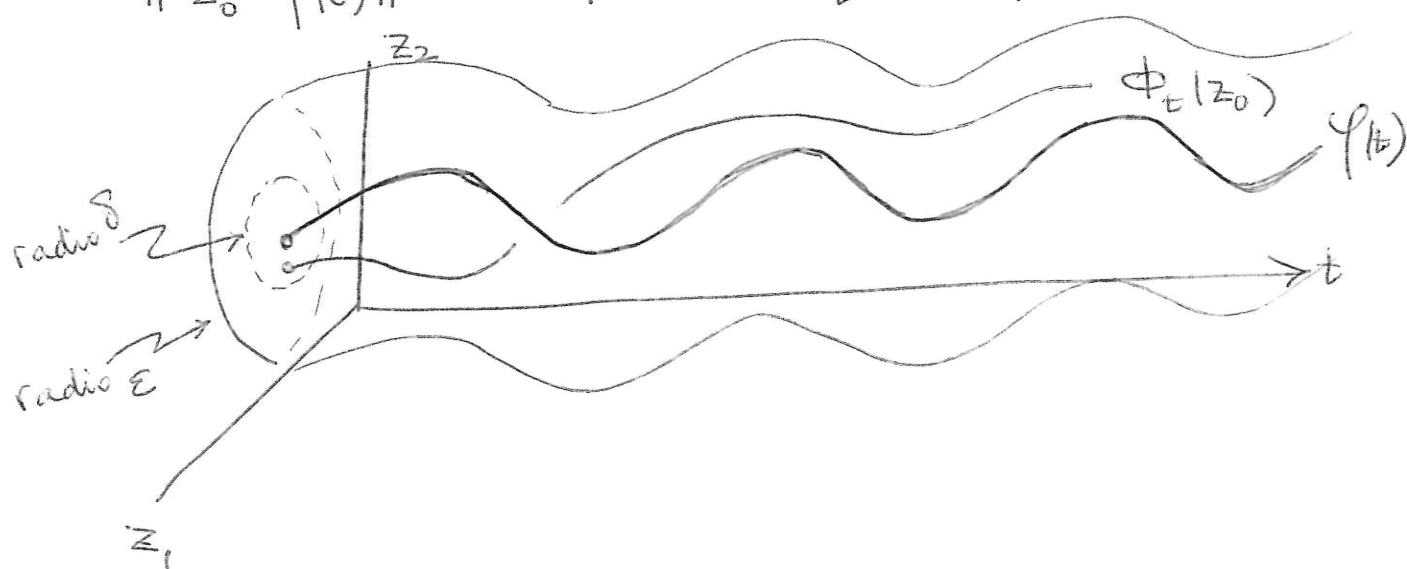
$$\dot{z} = F(z)$$

donde $z \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto y conexo,

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ campo de clase } C^1$$

Usaremos la notación $\Phi_t(z_0)$ para indicar la solución que pasa por z_0 a tiempo $t=0$. A veces también $z(t, z_0)$. El intervalo maximal de definición se designará por $]\alpha, \omega[$, $-\infty \leq \alpha = \alpha(z_0) < 0 < \omega = \omega(z_0) \leq +\infty$.

Dada una solución $\varphi(t)$ definida en $[0, \infty[$, diremos que $\varphi(t)$ es estable si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|z_0 - \varphi(0)\| < \delta$ implica $\|\Phi_t(z_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ si $t \in [0, \omega]$.



Notas 1. Por la teoría de prolongación ha de existir

$\Delta > 0$ tal que si $\|z_0 - \varphi(0)\| < \Delta$ entonces $\omega(z_0) = +\infty$

2. El problema de Kepler está descrito por ecuaciones del 2º orden, entonces la estabilidad se entiende después de pasar a primer orden ($z = (x, y)$, $y = \dot{x}$)

Es decir, la estabilidad se entiende en el espacio de estados (posición / velocidad) y no en el de configuraciones (posiciones)

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{\|x\|^3}, \quad \mu > 0 \rightsquigarrow \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\mu x}{\|x\|^3}$$

$$\Omega = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$$

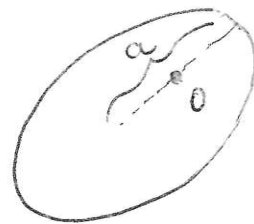
Ejercicio ¿Para qué valores de r y ω es solución la función $x(t) = r(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$?

Ya podemos contestar a la pregunta inicial: el movimiento de la Tierra alrededor del Sol no es estable en sentido Lyapunov. Comenzamos con un argumento intuitivo que se basa en la

3ª Ley de Kepler:

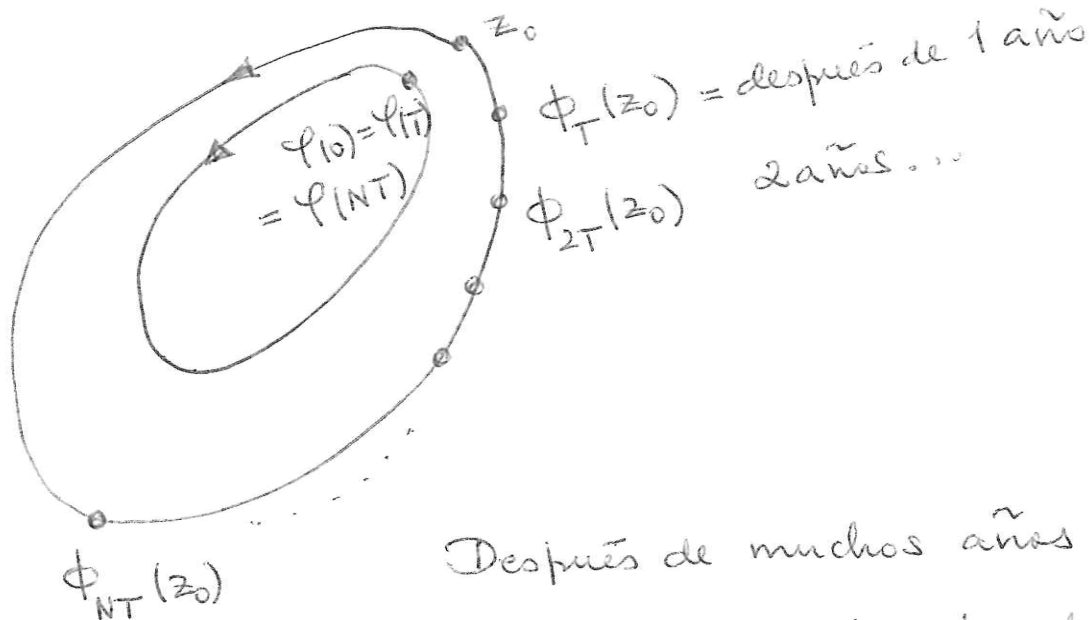
periodo mínimo de una órbita periódica =

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$



a = semi-eje mayor de la elip

Todas las soluciones cercanas describen elipses con semi-ejes próximos pero que pueden cambiar, si a cambia ligeramente también lo hace el periodo y el movimiento tiene un pequeño desfase que se va acumulando a lo largo del tiempo



Después de muchos años (N), $\phi(NT)$ ~~(0)~~ y $\phi_{NT}(z_0)$ pueden estar muy lejos.

Vamos ahora a dar un argumento riguroso, que se basa en el siguiente

Lema Se supone que $\phi_n(t)$ y $\phi(t)$ son soluciones periódicas de $\dot{z} = F(z)$ con periodos T_n y T . Además,

$$\frac{T_n}{T} \notin \mathbb{Q}$$

$\phi(t)$ no es constante

$$\phi_n(0) \rightarrow \phi(0)$$

Entonces $\phi(t)$ no es estable (Lyapunov).

Si aplicamos este lema al problema de Kepler llegamos a la conclusión de que todas sus soluciones periódicas son inestables. Las soluciones periódicas en Kepler se caracterizan por tener energía

negativa

$$E = \frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 - \frac{\mu}{\|x(t)\|} < 0$$

y momento angular no nulo

$$C = x(t) \wedge \dot{x}(t) \neq 0.$$

Si perturbamos ligeramente las condiciones iniciales la solución sigue siendo periódica ($E < 0, C \neq 0$) pero cambia su periodo. Aquí se aplica la 3ª ley de Kepler y la relación entre energía negativa y semi-eje

$$E = -\frac{1}{2a}.$$

Dada una solución periódica con condiciones iniciales (x_0, y_0) , escogemos $(x_{0n}, y_{0n}) \rightarrow (x_0, y_0)$ de manera que

$$\left(\frac{E_n}{E}\right)^{3/2} \notin \mathbb{Q}, \text{ donde } E_n = \frac{1}{2} \|y_{0n}\|^2 - \frac{\mu}{\|x_{0n}\|},$$

$$E = \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{\mu}{\|x\|}$$

Entonces también los periodos son no conmensurables y se obtiene la inestabilidad de γ .

Para probar el lema usaremos un resultado sobre números irracionales: si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el conjunto

$$\{p + q\alpha / p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\}$$

es denso en \mathbb{R} .

Demostración del Lema Por reducción al absurdo. Si

suponemos que $\varphi(t)$ es estable, entonces

$$\varepsilon_n = \sup_{t \geq 0} \|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \rightarrow 0.$$

Como $\varphi(t)$ no es constante, fijamos $\tau > 0$ tal que

$$\varphi(\tau) \neq \varphi(0)$$

y encontramos sucesiones de enteros p_n, q_n con $q_n > 0$ tales que

$$q_n T + p_n T_n \rightarrow \tau.$$

Entonces

$$0 < \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\| \leq \|\varphi(\tau) - \varphi(q_n T + p_n T_n)\| +$$

$$\|\varphi(q_n T + p_n T_n) - \varphi_n(q_n T + p_n T_n)\| +$$

$$\|\varphi_n(q_n T + p_n T_n) - \varphi(0)\| = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 \rightarrow 0 \text{ porque } \varphi \text{ es continua en } \tau$$

$$I_2 \leq \varepsilon_n \rightarrow 0$$

$$I_3 = \|\varphi_n(q_n T) - \varphi(q_n T)\| \leq \varepsilon_n \rightarrow 0. \quad \square$$

\nearrow
 $\varphi_n T_n$ -periódica
 φT -periódica

La condición $\frac{T_n}{T} \notin \mathbb{Q}$ es esencial. Una solución periódica estable (Lyapunov) se puede

aproximar por otras soluciones periódicas si tienen períodos commensurables.

Ejemplo $\dot{z} = Az$, $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1/4 \\ & & -1/4 & 0 \end{array} \right)$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ período } T = 2\pi$$

$$\varphi_n(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \frac{1}{n} \cos \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{n} \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} \text{ período } T_n = \pi$$

$\varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0)$, $\varphi(t)$ es estable

$$\|\varphi(t) - \varphi_t(z_0)\| = \|e^{At}(\varphi(0) - z_0)\| \leq \|\varphi(0) - z_0\|$$

Observación final Pequeños cambios en las condiciones iniciales se pueden producir por distintas razones (choque de un meteorito con la Tierra, erupción volcánica, ...). Hemos visto que esto puede llevar a un desfase en la posición a largo plazo; sin embargo la elipse que describe la Tierra no debe cambiar mucho.

3. Sistemas autónomos y estabilidad orbital

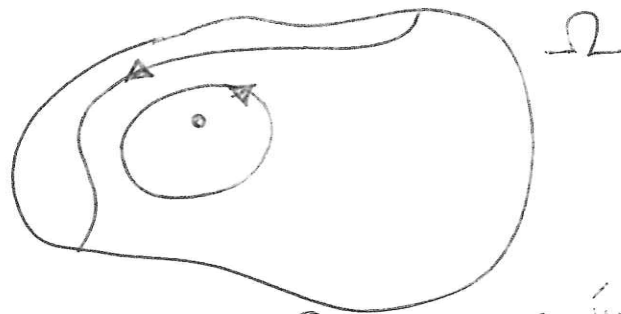
Comenzamos con el sistema

$$\dot{z} = F(z)$$

donde $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ es C^1 . El flujo asociado se denota por $\phi_t(z_0)$. Dado $z_0 \in \Omega$, la órbita que pasa por z_0 es el conjunto

$$\gamma = \{ \phi_t(z_0) : t \in]\alpha, \omega[\} \subset \Omega$$

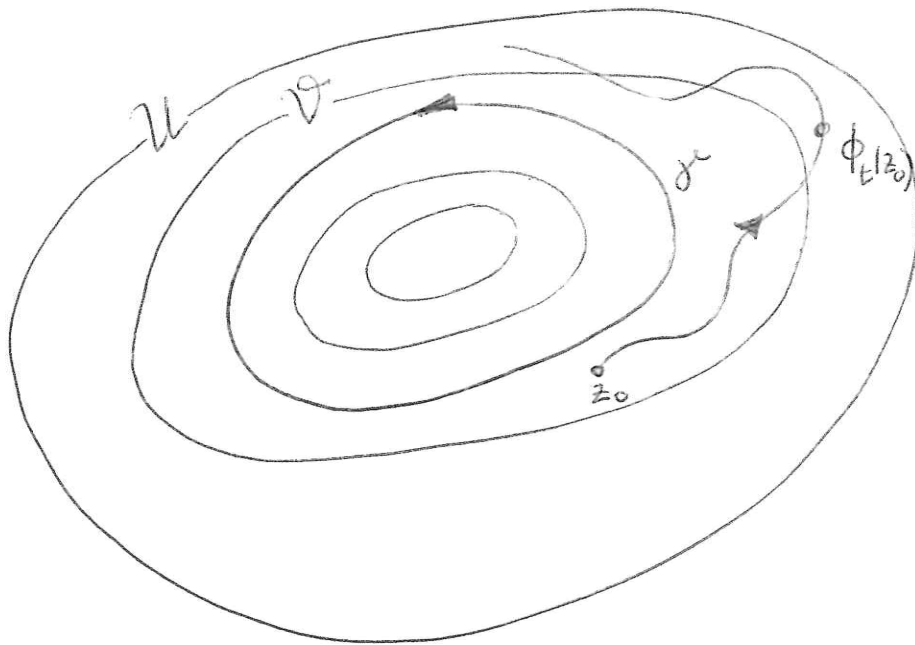
En ocasiones se entiende que γ tiene la orientación inducida por el flujo



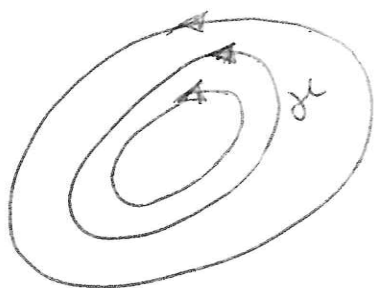
Por cada punto del espacio de fases Ω pasa una única órbita. No hay que confundir órbita y solución. Todas las soluciones obtenidas por traslación en el tiempo $\phi_{t-t_0}(z_0)$ producen la misma órbita. Es un ejercicio interesante demostrar que una solución $\varphi(t)$ es periódica y no constante si y solo si la órbita inducida $\gamma = \{ \varphi(t) : t \in \mathbb{R} \}$ es cerrada; es decir, $\gamma \cong \mathbb{S}^1$.

Dada una órbita cerrada γ diremos que es estable (en sentido orbital) si para cada entorno U de γ en Ω , existe otro entorno $V \subset U$ de manera que

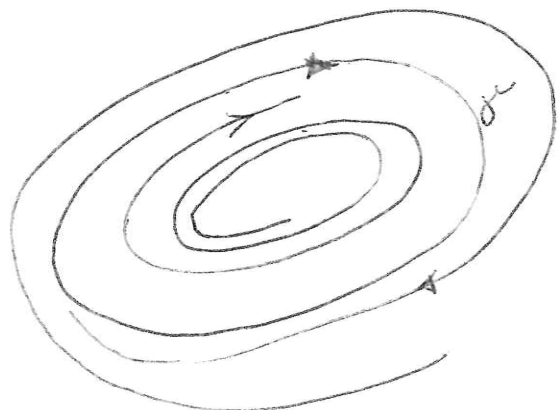
$$\phi_t(z_0) \in U \text{ si } t \geq 0 \text{ y } z_0 \in V$$



- Observaciones
1. En particular $\omega(z_0) = +\infty$ si z_0 está cerca de γ
 2. Si $\varphi(t)$ es una solución periódica estable en sentido Lyapunov entonces la órbita γ es orbitalmente estable, pero el recíproco es falso. Más adelante daremos un ejemplo en esta dirección
 3. En Mecánica Celeste tiene bastante sentido hablar de estabilidad orbital perpetua, que se obtiene al imponer la condición $\phi_t(z_0) \in U$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En los fenómenos disipativos la estabilidad orbital es solo hacia el futuro



estabilidad orbital perpetua



ciclo límite

4. La noción de estabilidad orbital se define para sistemas de primer orden, por eso si la ecuación es de segundo orden hay que hacer el cambio de incógnita $z = (x, y)$ con $\dot{y} = \dot{x}$.

Estabilidad orbital del movimiento de la Tierra

Consideramos el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\mu x}{\|x\|^3}, \quad z = (x, y) \in \Omega = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$$

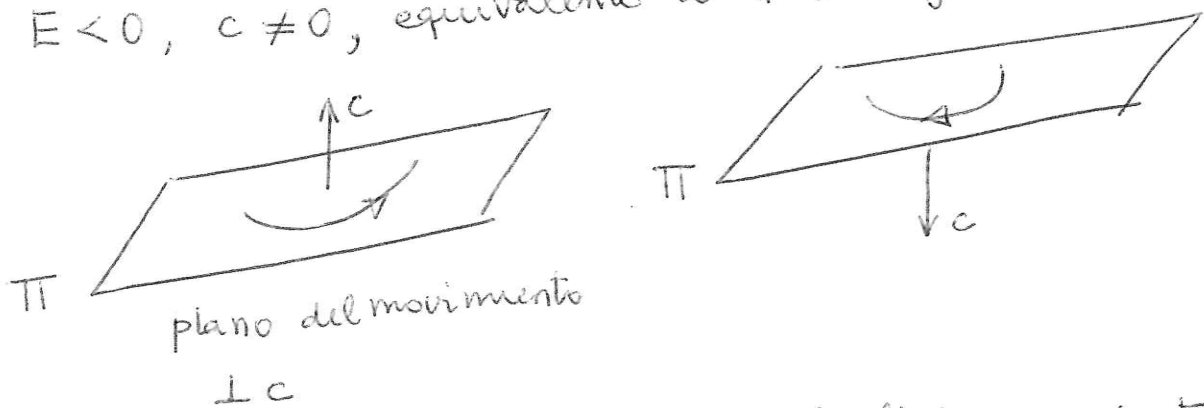
Se sabe que las siguientes cantidades se conservan a lo largo de las soluciones

$$E = \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{\mu}{\|x\|} \quad \text{energía}$$

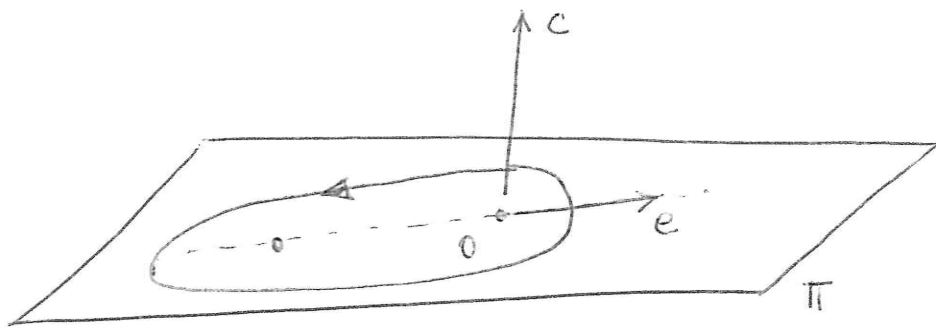
$$C = x \wedge \dot{x} \quad \text{momento angular}$$

$$e = \frac{1}{\mu} \dot{x} \wedge C - \frac{x}{\|x\|} \quad \text{eje de excentricidad}$$

Además, las soluciones periódicas son las que cumplen $E < 0$, $c \neq 0$, equivalente a $\|e\| < 1$ y $c \neq 0$.



$e \in \Pi$, dirección del eje mayor de la elipse, con sentido opuesto al foco \neq Sol, $\|e\| =$ excentricidad de la elipse



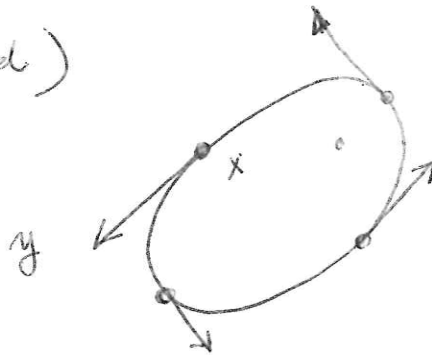
La ecuación de la elipse descrita por $x(t)$ es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(c, e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|x\| + \langle e, x \rangle = \frac{\|c\|^2}{\mu} \\ \langle x, c \rangle = 0 \end{array} \right.$$

Es importante distinguir la órbita astronómica \mathcal{E} y la órbita del sistema de primer orden asociado,

$$\mathcal{J} = \{ (x(t), \dot{x}(t)) : t \in \mathbb{R} \} \subset \Omega$$

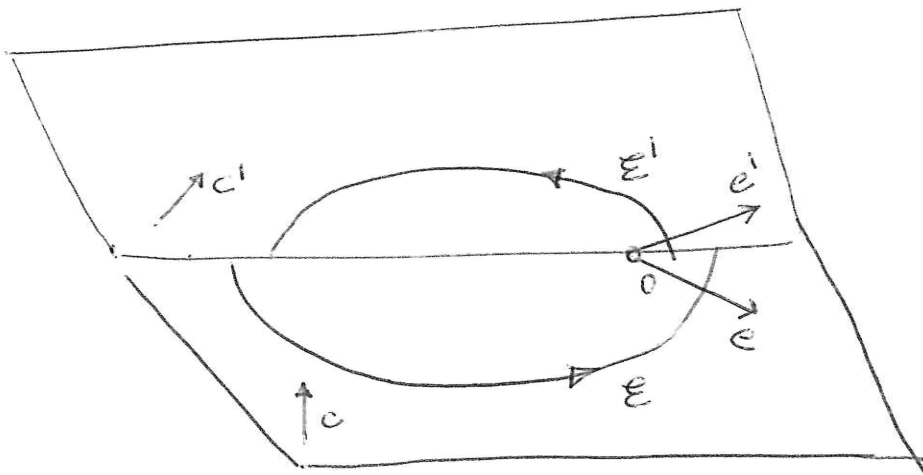
Ahora los puntos de \mathcal{J} están en el espacio de estados (posición / velocidad)



$$\mathcal{J} = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x \in \mathcal{E}, \text{ y vector tangente a } \\ \mathcal{E} \text{ con } x \wedge y = c \end{array} \right\}$$

Observamos que $\mathcal{J} = \mathcal{J}(c, e)$ depende continuamente de c y e .

Supongamos que γ es una órbita cerrada con momento angular c y eje de excentricidad e . Dado un entorno U de γ encontramos $\delta > 0$ de manera que si $\|c - c'\| < \delta$, $\|e - e'\| < \delta$ entonces $\gamma(c', e') \subset U$. Como c y e dependen continuamente de las condiciones iniciales $z_0 = (x_0, y_0)$ podemos encontrar un entorno V de γ de manera que si $z_0 \in V$ entonces $\|z_0 - z_0'\| < \delta$ el momento c' y el eje e' correspondientes quedan cerca de c y e , por tanto la órbita que pasa por z_0 , $\gamma(c', e')$ queda dentro de U y hay estabilidad orbital perpetua



Observación final No parece fácil extender estas conclusiones a modelos más complicados en los que se tenga en cuenta que la Tierra no es una partícula o bien la interacción con más cuerpos.

4. Sistemas Hamiltonianos

Consideramos un dominio (abierto y conexo) $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.
Los puntos en Ω se designarán por $z = (q, p)$, N es el número de grados de libertad.

Dada una función C^∞
 $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(q, p)$

consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p).$$

Esta definición está preparada para que H sea constante a lo largo de las soluciones (integral primera)

Si $z(t)$ es una solución,

$$\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = \underbrace{\left\langle \frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle}_0 + \underbrace{\left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} \right\rangle}_0$$

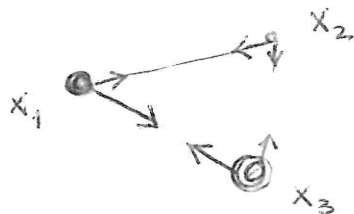
$$\Rightarrow H(q(t), p(t)) = \text{cte}$$

Veamos algunos ejemplos de sistemas de este tipo

Ejemplo 1 Problema de Kepler

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{\|x\|^3}, \quad q = x, \quad p = \dot{x}, \quad H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \frac{\mu}{\|q\|}$$

Ejemplo 2 Problema de N cuerpos



$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{(x_j - x_i)}{\|x_j - x_i\|^3}$$

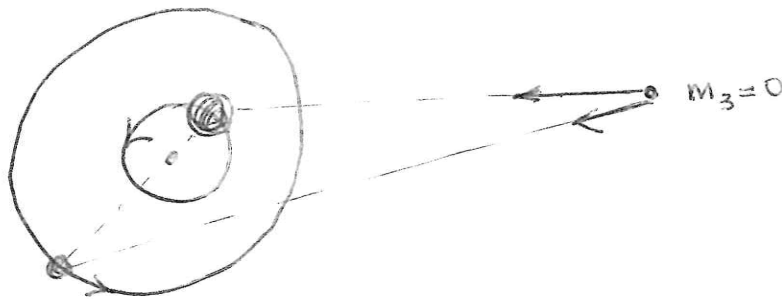
$$q_i = x_i, \quad p_i = m_i \dot{x}_i \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{3N}, \quad N \geq 3$$

$$H(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \|p_i\|^2 - \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

Ejemplo 3 Problema restringido de 3 cuerpos (circular-plano)

Se ubican en un plano dos cuerpos de masa $1-\mu$ y μ donde $\mu \in]0, \frac{1}{2}]$ es un parámetro y un tercer cuerpo de masa despreciable ($m_3 \approx 0$)

Se supone que los cuerpos 1 y 2 (primarias) siguen órbitas circulares



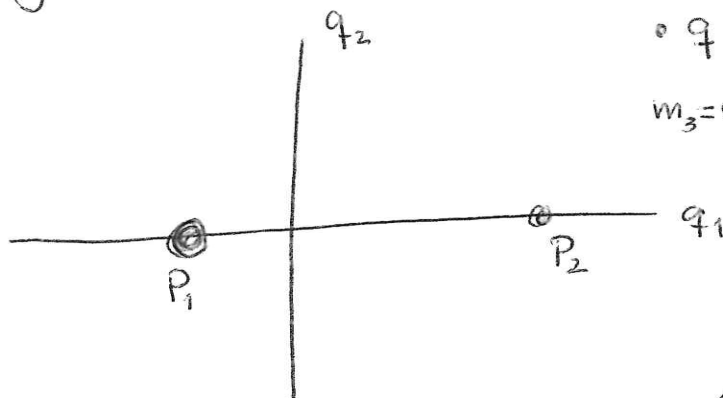
mientras que el tercer cuerpo es atraído por ellas (m_3 no afecta a las primarias). A continuación se ubica un sistema de referencia \odot en el centro de masas, este sistema rota al unísono con las primarias. Después de algunos cálculos se llega al siguiente sistema Hamiltoniano con 2 grados de libertad

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|^2 - \langle q, Jp \rangle - U(q)$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$U(q) = \frac{1-\mu}{\|q - P_1\|} + \frac{\mu}{\|q - P_2\|}, \quad P_1 = (-\mu, 0), \quad P_2 = (1-\mu, 0)$$

Ahora $q = (q_1, q_2)$ representa la posición de la masa pequeña y P_1, P_2 son las posiciones de las primarias (fijas en el sistema de referencia rotatorio).



• $q(t)$ posición de $m_3=0$ respecto al sistema rotatorio

Haciendo cálculos,

$$\Omega = (\mathbb{R}^2 - \{P_1, P_2\}) \times \mathbb{R}^2$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p + Jq \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -Jp + \nabla U(q) \end{aligned} \right\}$$

Podemos reducir el sistema a una ecuación de 2º orden en q ,

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \dot{p} + J\dot{q} = -Jp + \nabla U(q) + Jp + q \\ &= 2(J\dot{q} + q) + \nabla U(q) - q \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{q} - 2J\dot{q} - q = \nabla U(q)}$$

Supongamos que $H \in C^\infty(\Omega)$ es la función Hamiltoniana y designemos por $\Phi_t(z_0)$ al flujo asociado, entonces dicho flujo conserva la forma simpléctica. Vamos a explicar esta frase con más detalle

Forma simpléctica en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

Dados dos vectores $v = (\xi, \eta), \hat{v} = (\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ definimos

$$\omega(v, \hat{v}) = -\langle \xi, \hat{\eta} \rangle + \langle \hat{\xi}, \eta \rangle.$$

Observamos que ω es una forma bilineal alternada y no degenerada.

Si introducimos la matriz $J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$ esta forma se puede escribir como

$$\omega(v, \hat{v}) = \langle Jv, \hat{v} \rangle$$

donde ahora el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Los sistemas Hamiltonianos se pueden escribir en la forma

$$\dot{z} = J \nabla H(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Propiedad importante

$$\omega(\partial_z \phi(t, z) v, \partial_z \phi(t, z) \hat{v}) = \omega(v, \hat{v})$$

para cada $v, \hat{v} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Aquí usamos la notación

$\phi(t, z) = \phi_t(z)$ = solución que pasa por z
en el tiempo $t=0$

Observamos que $\partial_z \phi(t, z)$ es una matriz cuadrada
de dimensión $2N \times 2N$.

Para probarlo comenzamos con un lema algebraico.

Dada una matriz A de dimensión $2N \times 2N$, son
equivalentes:

i) $\omega(Av, A\hat{v}) = \omega(v, \hat{v}) \quad \forall v, \hat{v} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

ii) $A^t J A = J$

Dem $\omega(Av, A\hat{v}) = \langle JAv, A\hat{v} \rangle = \langle A^t JAv, \hat{v} \rangle$

$\langle A^t JAv, \hat{v} \rangle = \langle Jv, \hat{v} \rangle \quad \forall v, \hat{v} \Leftrightarrow A^t J A = J$

Demostración de la propiedad Usamos la notación

$Y(t) = \partial_z \phi(t, z)$ y derivamos respecto a condiciones
iniciales,

$$\partial_t \phi(t, z) = J \nabla H(\phi(t, z)), \quad \phi(0, z) = z \Rightarrow$$

$$\dot{Y}(t) = J D^2 H(\phi(t, z)) Y(t), \quad Y(0) = I.$$

$$\frac{d}{dt} [Y^t J Y] = \dot{Y}^t J Y + Y^t J \dot{Y} =$$

$$- Y^t D^2 H J^t Y + Y^t J^2 D^2 H Y = 0$$

$$\Rightarrow Y^t(t) J Y(t) = Y^t(0) J Y(0) = J.$$

Hemos usado $J^t = -J$, $J^2 = -I$

5. Secciones transversales y transformaciones que conservan áreas

Suponemos que $H: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ definida sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (2 grados de libertad) y $\gamma \subset \Omega$ es una órbita cerrada de

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1,2.$$

Si llamamos h a la energía de γ ; $H|_\gamma = h$, observamos que el conjunto de nivel

$$N_h = \{z \in \Omega : H(z) = h\}$$

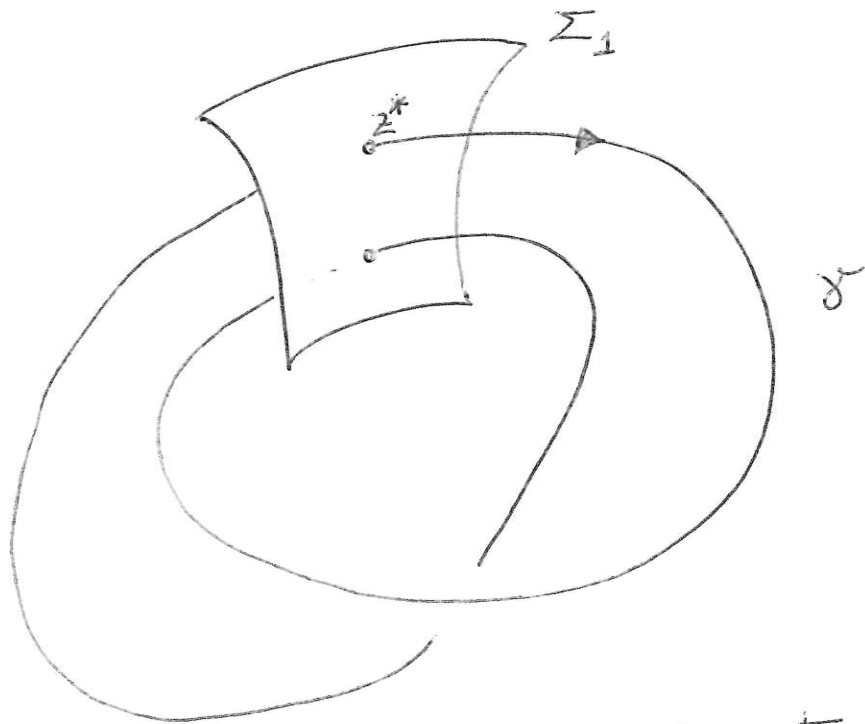
es una hiper-superficie regular en un entorno de γ . De hecho $\nabla H(z) \neq 0$ para cada punto $z \in \gamma$, pues en otro caso se trataría de puntos críticos que darían lugar a soluciones constantes. Como H se conserva a lo largo de las órbitas el conjunto N_h es invariante por el flujo $\phi_t(z)$. Esto reduce la dimensión del sistema pues podemos pensar que se trata de una ecuación diferencial definida en N_h . Vamos a construir una sección transversal en N_h . Para ello fijamos $z^* \in \gamma$, $z^* = (q^*, p^*)$ y suponemos por ejemplo que

$$\frac{\partial H}{\partial q_2}(q^*, p^*) \neq 0.$$

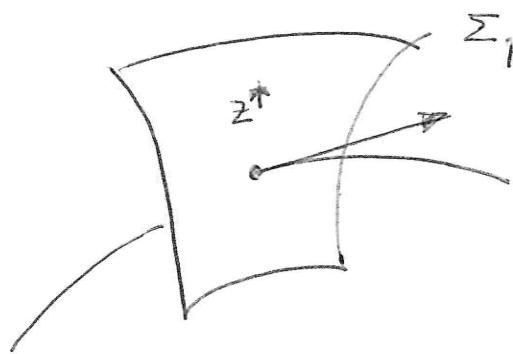
(Recordamos que $\nabla H(z^*) \neq 0$). Definimos el conjunto

$$\Sigma : \begin{cases} H(q, p) = h \\ p_2 = p_2^* \end{cases}$$

En un entorno de z^* el conjunto Σ es una superficie regular y la proyección $\Psi(q, p) = (q_1, p_1)$ es un difeomorfismo local en z^* , $\Psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$. A partir de ahora $\Sigma_1 \subset \Sigma$ será un entorno de z^* donde Ψ es un difeomorfismo sobre su imagen $\Psi(\Sigma_1) \subset \mathbb{R}^2$.



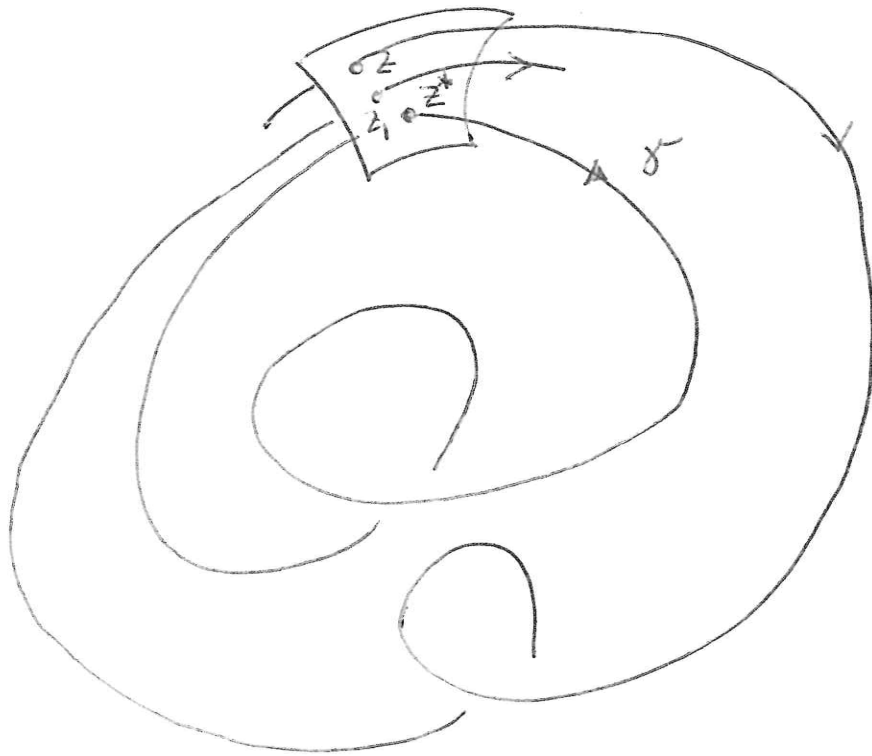
Observamos que el vector tangente a γ en z^* es transversal a Σ_1



pues si $z(t)$ es la solución con $z(0) = z^*$, $\dot{z}(0) = J \nabla H(z^*)$,
 y en particular $\dot{p}_2(0) = -\frac{\partial H}{\partial q_2}(z^*) \neq 0$. Por otra parte
 el plano tangente a $z^* \Sigma_1$ en z^* está dado por

$$v \in \mathbb{R}^4 \mid v \perp \nabla H(z^*), \quad v_4 = 0$$

Por dependencia continua los puntos ^{de Σ_1} próximos a z^* retornarán a Σ_1 en un tiempo próximo al periodo de γ^*



Si llamamos $\tau^* > 0$ a un periodo de γ^* , $\phi_{\tau^*}(z^*) = z^*$, buscamos la aplicación de retorno P que asigna a un punto $z \in \Sigma_1$ un punto de la órbita $z_1 \in \Sigma_1 \cap \gamma^*$ de manera que el tiempo empleado en viajar de z a z_1 esté próximo a τ^* . De manera más precisa, como H es integral primera, consideramos el problema de funciones implícitas

$$p_2(\tau, z) = p_2^*, \quad \tau = \tau(z^*).$$

Aquí $\phi_t(z) = (q(t, z), p(t, z))$ y se cumple la condición de transversalidad porque $\frac{\partial p_2}{\partial \tau}(\tau^*, z^*) = -\frac{\partial H_0}{\partial q_2}(z^*) \neq 0$

Entonces existe una función $\tau = \tau(z)$ definida en un entorno $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$ de z^* que cumple $\tau \in C^\infty$,

$$p_2(\tau(z), z) = p_2^*, \quad \tau(z^*) = \tau_*.$$

Definimos $P: \Sigma_1 \cap \mathcal{U} \rightarrow \Sigma_1$, $P(z) = \Phi_{\tau(z)}(z)$ y observamos que z^* es un punto fijo de P . Los posibles puntos periódicos de P producirán órbitas cerradas que retornan a Σ_1 un cierto número de veces antes de cerrarse. Todas esas órbitas estarían en el nivel $H=h$.

Vamos a calcular la diferencial de P como una función entre superficies. Para ello necesitamos conocer el plano tangente, dado $z \in \Sigma_1$

$$T_z(\Sigma_1) = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : v \perp \nabla H(z), v_4 = 0 \right\}$$

$$v = (\xi, \eta).$$

Dado $z \in \Sigma_1 \cap \mathcal{U}$ se cumple

$$(dP)_z: T_z(\Sigma_1) \rightarrow T_{P(z)}(\Sigma_1),$$

$$(dP)_z v = \langle \nabla \tau(z), v \rangle J \nabla H(P(z)) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(\tau(z), z) v$$

Dem Por definición de diferencial,

$$(dP)_z v = \left. \frac{d}{ds} P(\alpha(s)) \right|_{s=0} \text{ donde } \alpha = \alpha(s) \text{ es una curva}$$

en Σ_1 , que cumple $\alpha(0) = z$, $\dot{\alpha}(0) = v$. Por la regla de la cadena,

$$(dP)_z v = \left. \frac{d}{ds} \phi(\tau(\alpha(s)), \alpha(s)) \right|_{s=0} =$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau(\alpha(0)), z) \langle \nabla \tau(z), v \rangle +$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(\tau(z), z) v. \text{ Como } \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, z) = J \nabla H(\phi(t, z)),$$

llegamos a la fórmula. \square

Ahora es fácil deducir que P preserva la forma symplectica; es decir, si $z \in \Sigma_1 \cap \mathcal{U}$,

$$\omega((dP)_z v, (dP)_z \hat{v}) = \omega(v, \hat{v}) \quad \forall v, \hat{v} \in T_z(\Sigma_1).$$

$$\text{Dem } \omega((dP)_z v, (dP)_z \hat{v}) =$$

$$\langle \nabla \tau(z), v \rangle \cdot \langle \nabla \tau(z), \hat{v} \rangle \underbrace{\omega(J \nabla H(P(z)), J \nabla H(P(z)))}_{\substack{0 \\ \text{pues } \omega \text{ es} \\ \text{antisimétrica}}}$$

$$+ \langle \nabla \tau(z), v \rangle \omega(J \nabla H(P(z)), \frac{\partial \phi}{\partial z}(\tau(z), z) v)$$

$$+ \langle \nabla \tau(z), \hat{v} \rangle \omega(J \nabla H(P(z)), \frac{\partial \phi}{\partial z}(\tau(z), z) \hat{v})$$

$$+ \omega\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}(\tau(z), z) v, \frac{\partial \phi}{\partial z}(\tau(z), z) \hat{v}\right)$$

Como la diferencial $(dP)_z v$ está en $T_{P(z)}(\Sigma_1)$, deducimos que $(dP)_z v \perp \nabla H(P(z))$. Por otra parte, $J \nabla H(P(z))$ también es ortogonal a $\nabla H(P(z))$. De la fórmula de la diferencial se deduce que $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(\tau(z), z) v \perp \nabla H(P(z))$.

$$\text{Así, } \omega(J \nabla H(P(z)), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\tau(z), z) v) \\ = \langle \underset{-I}{J^2} \nabla H(P(z)), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\tau(z), z) v \rangle = 0$$

y el segundo y tercer sumando se anulan.

Para el último sumando recordamos que el flujo Hamiltoniano preserva la forma simpléctica. \square

~~En principio podría ocurrir que la restricción de ω~~

a \mathbb{R}^2 conviene ahora calcular la restricción de ω a $T_z(\Sigma_1)$.

Si $v, \hat{v} \in T_z(\Sigma_1)$ se cumple $v_4 = \hat{v}_4 = 0$ y

$$\omega(v, \hat{v}) = \langle Jv, \hat{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4=0 \\ -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4=0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ = v_3 \hat{v}_1 - v_1 \hat{v}_3.$$

Como la proyección $v \mapsto (v_1, v_3)$ define un isomorfismo entre $T_z(\Sigma_1)$ y \mathbb{R}^2 deducimos que la restricción de ω a $T_z(\Sigma_1)$ es una forma no degenerada.

El lema que sigue es muy fácil de probar:

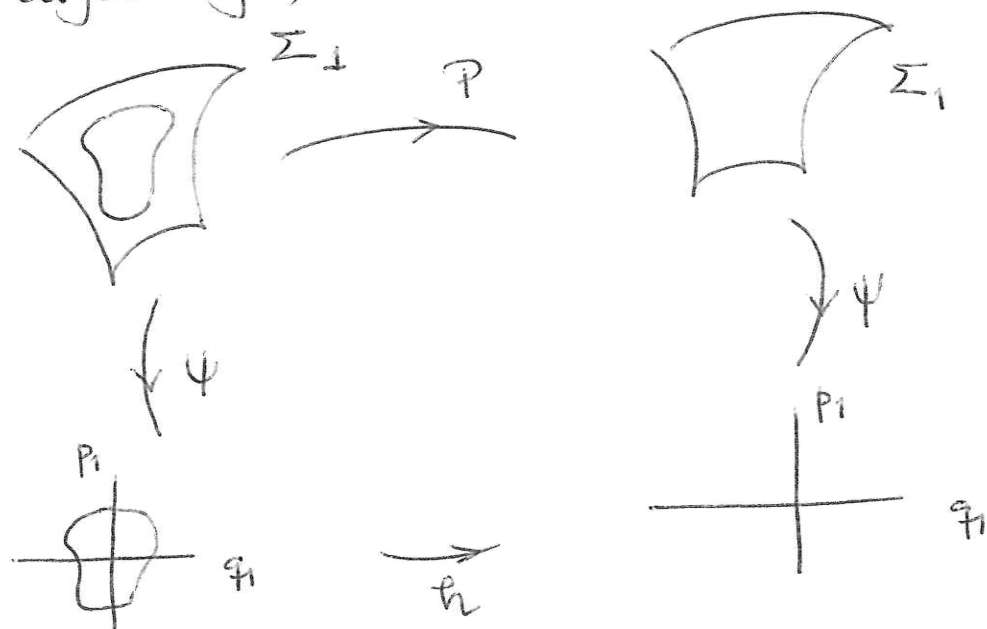
Dado un espacio vectorial V de dimensión 2, una forma bilineal antisimétrica $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y un endomorfismo $L: V \rightarrow V$ se cumple

$$\omega(Lv, L\hat{v}) = (\det L) \omega(v, \hat{v}) \quad \text{si } v, \hat{v} \in V.$$

Llegamos así a la conclusión

$$\det (dP)_z = 1 \quad \text{si } z \in \Sigma_1 \cap \mathcal{U}.$$

En general Σ será una superficie curva y resulta más fácil trabajar en el plano q_1, p_1 que sabemos es localmente difeomorfo,



$h = \Phi \circ P \circ \Psi^{-1}$ es un difeomorfismo local de \mathbb{R}^2 alrededor del punto fijo (q_1^*, p_1^*) que cumple $\det h'(q_1, p_1) = 1$. Es decir,

h conserva área y orientación

Concretamos la discusión anterior para el caso del problema de Kepler plano,

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{\|x\|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

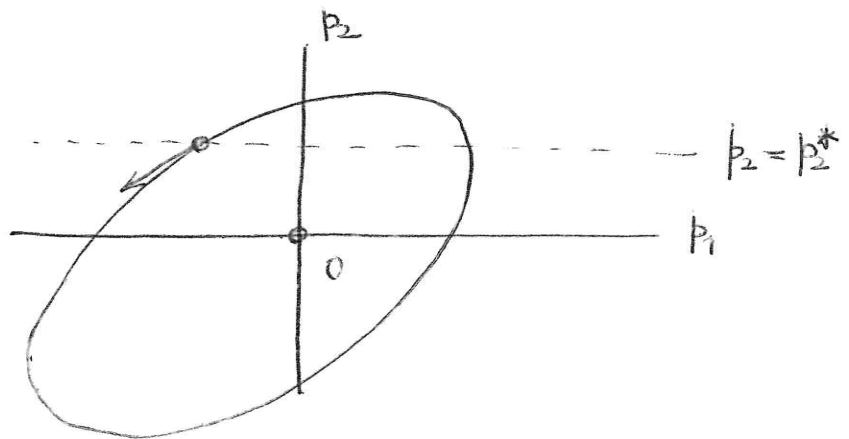
Para hacer la discusión más visual definimos $q = \dot{x}$, $p = x$ de manera que

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \|q\|^2 - \frac{\mu}{\|p\|}.$$

Si γ es una órbita cerrada ($H < 0$, $q \wedge p \neq 0$), como

$$\frac{\partial H}{\partial q} = q, \quad \text{escogemos un punto } z^* = (q^*, p^*) \text{ con } q_2^* \neq 0$$

(la velocidad no es horizontal). Las órbitas en $H = h$ cercanas a γ serán elipses con el mismo semi-eje ($H = -\frac{1}{2a}$) pero ángulo de inclinación y excentricidad variables.



La aplicación h vendrá del segundo retorno a Σ y será simplemente la identidad.

6. Estabilidad de puntos fijos y estabilidad isoenergética

Suponemos que X es un espacio métrico y $T: \mathcal{D} \subset X \rightarrow X$ una transformación de X (\mathcal{D} es abierto y T es homeomorfismo de \mathcal{D} en $T(\mathcal{D})$). Los puntos fijos de T originan las soluciones constantes de la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

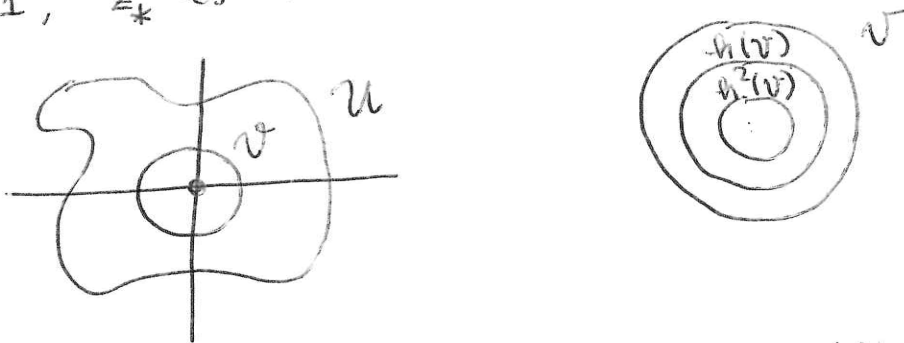
Dado $x_* \in \mathcal{D}$, $x_* = T(x_*)$, diremos que x_* es estable si para cada entorno $U = U(x_*)$ existe otro entorno $V = V(x_*)$ de manera que $T^n(V)$ está bien definido y cumple

$$T^n(V) \subset U \text{ para cada } n \geq 0.$$

Si se sustituye $n \geq 0$ por $n \in \mathbb{Z}$ tendremos la estabilidad perpetua

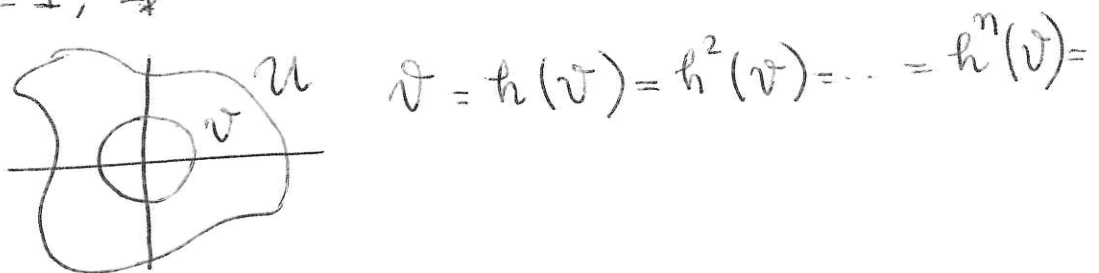
Ejemplo $X = \mathbb{C}$, $T(z) = \lambda z$,

Si $|\lambda| < 1$, $z_* = 0$ es estable (para el futuro)

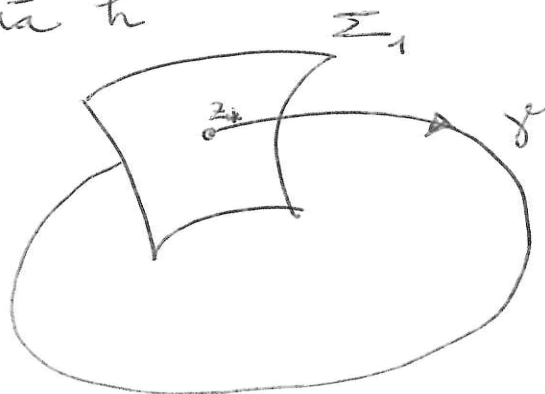


Si $|\lambda| > 1$, $z_* = 0$ es inestable pues todas las órbitas no triviales cumplen $z_n = \lambda^n z_0$, $|z_n| \rightarrow \infty$

Si $|\lambda| = 1$, $z_* = 0$ es estable perpetua



Pensemos ahora q en un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad y una órbita cerrada \mathcal{J} . Fijamos $z_* \in \mathcal{J}$ y construimos una sección transversal Σ_1 en el nivel de energía h

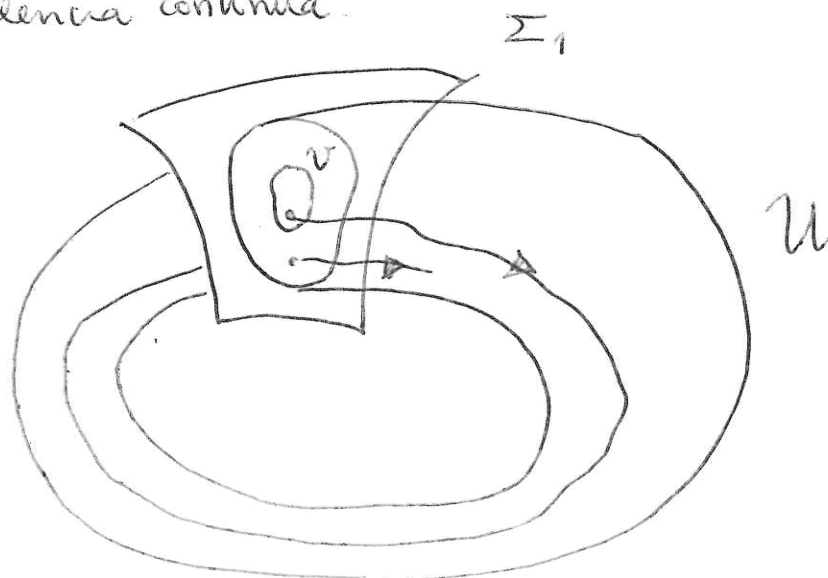


La transformación $P: \Sigma_1' \subset \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ se ajusta al marco anterior, $X = \Sigma_1$, $\mathcal{D} = \Sigma_1'$, $T = P$, pero ¿cómo se interpreta la estabilidad del punto fijo z_* en el sistema continuo?

Proposición El punto fijo z_* es estable para P si y solo si la órbita \mathcal{J} es estable en sentido orbital e isoenergético.

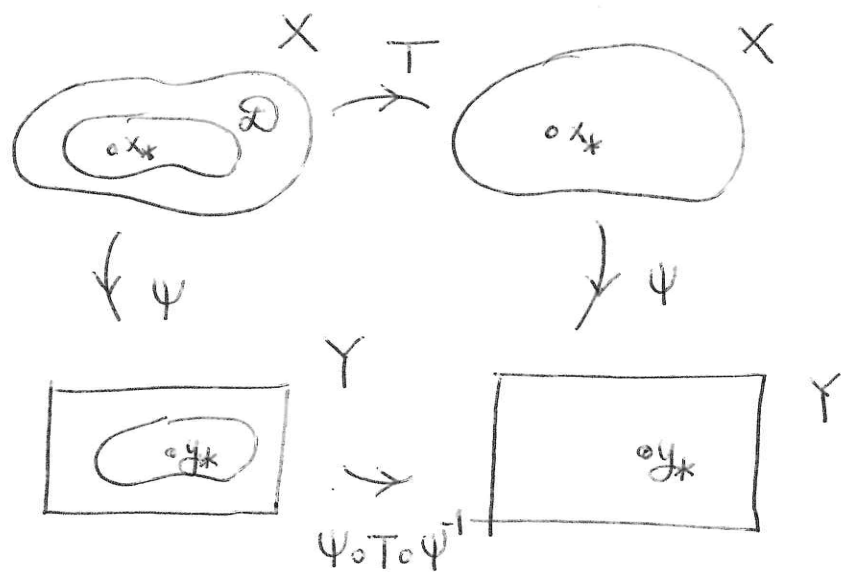
Diremos que \mathcal{J} es estable en sentido isoenergético si es estable orbital cuando nos restringimos a las órbitas en el nivel de energía h .

La demostración de esta Proposición es un ejercicio en dependencia continua.



A partir de este resultado es fácil concluir que las órbitas cerradas del problema de Kepler son estables isoenergéticas, pues en ese caso $P = id$, todos los puntos son fijos y estables. Conviene observar que la estabilidad isoenergética es más débil que la estabilidad orbital en todo el espacio de fases y por tanto ya conocíamos este resultado.

La noción de punto fijo estable es invariante por conjugación topológica: si $\Psi: U \subset X \rightarrow W \subset Y$ es un homeomorfismo entre abiertos U y W , $x_* = T(x_*)$ es estable para T si y solo si $y_* = \Psi(x_*)$ es estable para $\Psi \circ T \circ \Psi^{-1}$



Por eso a partir de ahora trabajaremos con la transformación $h = \Psi \circ P \circ \Psi^{-1}$ definida en el plano y que cumple

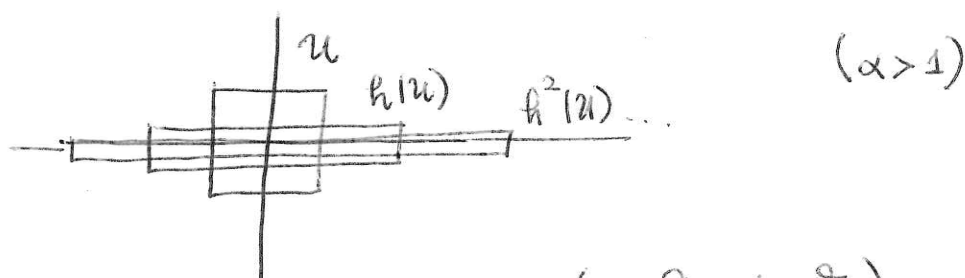
$$\det h' = 1.$$

7. Transformaciones que conservan áreas

Consideramos $h: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ^{de clase C^∞} con \mathcal{D} abierto y $\det h'(x) = 1$ para cada $x \in \mathcal{D}$. Suponemos que $x_* \in \mathcal{D}$ es un punto fijo de h , por el teorema de la función inversa h es un difeomorfismo local en el entorno de x_* . Comenzamos con algunos ejemplos:

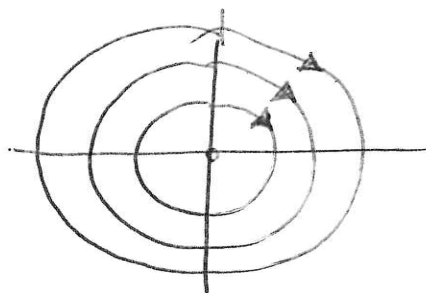
1. $h(x) = D_\alpha x$, $D_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha \neq 1$ el punto fijo $x_* = 0$ es inestable

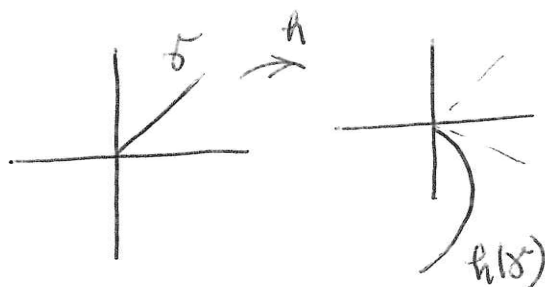
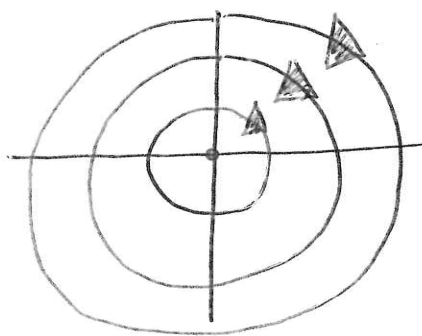


2. $h(x) = R[\theta]x$, $R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$x_* = 0$ es estable



3. $h(x) = R[\theta + \beta \|x\|^2]x$, $\beta \neq 0$ aplicación Twist



h tuerce los rayos

$x_* = 0$ estable

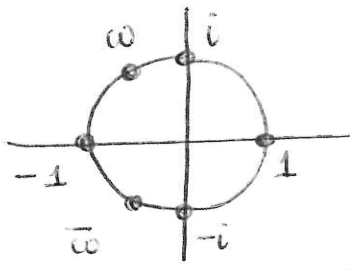
Se puede probar que si x_* es un punto fijo entonces el espectro de la matriz $h'(x_*)$ cumple una propiedad especial

$$x_* \text{ estable} \implies \sigma(h'(x_*)) \subset \mathbb{D}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Esta condición es necesaria para la estabilidad pero no es suficiente. Para encontrar condiciones suficientes para la estabilidad Birkhoff trabajó con las derivadas de orden superior de h y probó lo siguiente: supongamos que

$$\sigma(h'(x_*)) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$$

$$\text{con } \theta \neq \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k < n, \quad n \leq 4$$



Entonces existe un difeomorfismo local Ψ con $\Psi(0) = x_*$ tal que

$$\Psi^{-1} \circ h \circ \Psi(x) = R[\theta + \beta \|x\|^2]x + O(\|x\|^4)$$

si $x \rightarrow 0$

Dicho de otra manera, si se evitan las resonancias fuertes $(1, -1, \omega, \bar{\omega}, i, -i)$ hay un cambio de variable que lleva h a la transformación twist más una pequeña perturbación.

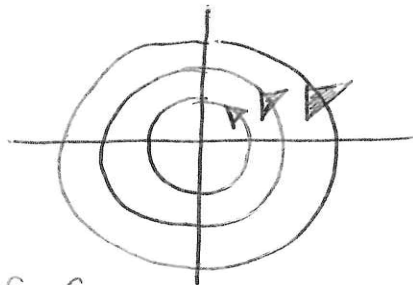
Birkhoff llamó al punto fijo estable (formul) si $\beta \neq 0$, pero no pudo probar que era estable.

Este resultado,

$$\beta \neq 0 \Rightarrow x_* \text{ estable}$$

se probó con la teoría KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Una observación crucial para la prueba es que la aritmética de números irracionales juega un papel crucial. La transformación twist tiene circunferencias invariantes que forman un continuo en el que el número de rotación varía continuamente

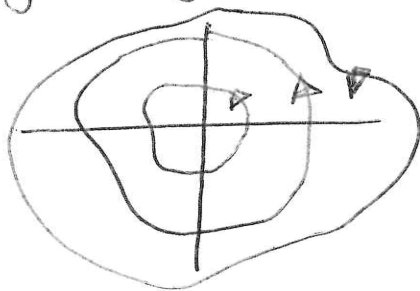
$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \beta r^2 \\ r_1 = r \end{cases}$$



Número de rotación de $r=r_0$,

$$\omega_0 = \beta r_0^2.$$

Al perturbar por $O(\|x\|^4)$ algunas de las circunferencias persisten y se deforman como curvas invariantes

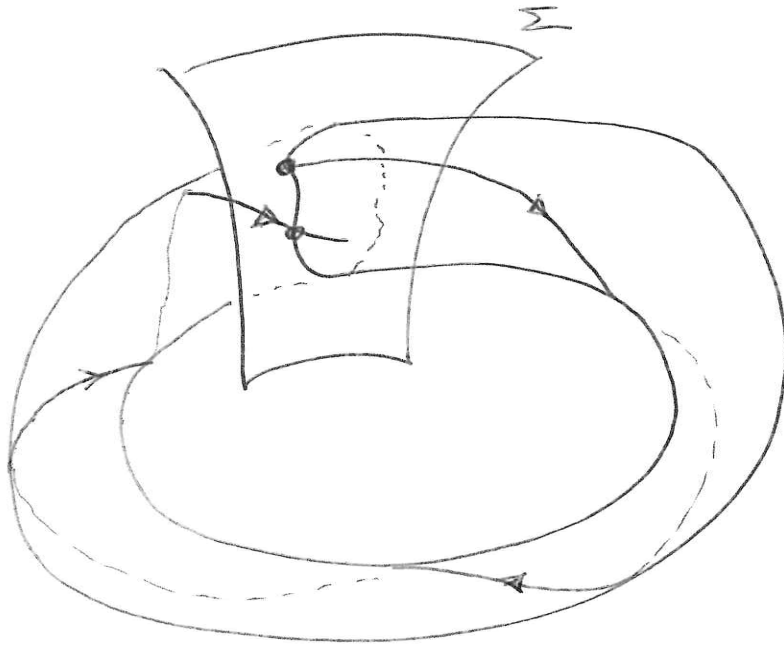


Son aquellas para las que el número de rotación ω_0 es no conmensurable con 2π en un sentido fuerte. Condición diofántica:

$$\left| \frac{\omega_0}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^{2+\sigma}} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$$c > 0, \sigma \geq 0$$

Al volver al sistema continuo estas curvas invariantes producirán toros invariantes



Las órbitas sobre el toro no se cierran, se enrollan densamente. Los toros invariantes implican la estabilidad orbital isoenergética. Con más trabajo se puede probar que hay estabilidad orbital en todo el espacio de fases.

~~Podría probarse existencia de órbitas~~