DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Examen de septiembre. 8 de septiembre, 2010

PRIMERA PARTE

Apellidos y Nombre ____

DNI _________________________ **Grupo** ___________

Elige una de las dos preguntas siguientes:

1. Partiendo de un número dado $x_0 \in \mathbb{R}$ construimos una sucesión por medio del método iterativo

$$x_{n+1} := 1 + \operatorname{sen}(e^{-x_n}) \,. \tag{1}$$

   (a) Suponiendo que la sucesión obtenida es convergente, demuestra que su límite debe ser un punto fijo de la función

$$f(x) := 1 + \operatorname{sen}(e^{-x}) \,.$$

   (b) Justifica que f tiene un único punto fijo $x_* > 0$.

   (c) Para calcular x_* de manera aproximada se propone partir de una aproximación bastante buena x_0 y usar el método iterativo (1). ¿Convergerá el método?

   (d) Programa el ordenador para que calcule 15 iteraciones del método anterior partiendo de $x_0 = 0$.

2. A continuación usaremos la partición $\Delta : 0 = x_0 < 1/3 = x_1 < 2 < 1 = x_2$ del intervalo $[0, 1]$. La función $f(x) := 1 + \operatorname{sen}(e^{-x})$ es la misma que anteriormente. Se pide:

   (a) Describe una base del espacio, denotado por $M_0^1(\Delta)$ o $S(1, 0, \{x_0, x_1, x_2\})$, de funciones lineales a trozos con nodos sobre esta partición.

   (b) Justifica que hay una única función p en este espacio que coincide con f sobre los tres nodos de la partición. Escribe p como combinación lineal de la base anterior.

   (c) Usando la regla del trapecio compuesta sobre esa partición, calcula una aproximación γ de $\int_0^1 f(x)dx$.

   (d) Usa el ordenador para dibujar una gráfica en la que aparezcan la función f, el polinomio p, y los puntos donde p interpola a f.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Examen de septiembre. 8 de septiembre, 2010

SEGUNDA PARTE

Apellidos y Nombre ____

DNI ________________________ **Grupo** __________

1. En el intervalo $[0,2]$ se considera la partición $\Delta = \{0 = x_0 < 1 = x_1 < 2 = x_2\}$.

   a) Justifica que existe un único polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2$ que cumple $p(0) = 3$, $p(1) = -1$, $p(2) = 5$.

   b) ¿Es posible expresar este polinomio como combinación lineal de los polinomios de Lagrange l_0, l_1, l_2 asociados a la partición Δ?

   c) Escribe explícitamente el polinomio de Lagrange l_0.

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -\alpha & 0 \\ -2 & 3+\alpha & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Deduzca los valores de α para los que A admite descomposición LU y realice la descomposición para $\alpha = 1$;

   b) resuelva el sistema $Ax = b$ a partir de la descomposición LU para $b = (4,4,1)^t$.

3. En el espacio $C[0,2\pi]$ consideramos el producto escalar usual

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

   y la función $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$.

   a) Encuentra la mejor aproximación de la función f en el subespacio H generado por las funciones $1, \cos x, \operatorname{sen} x$.

   b) Encuentra la mejor aproximación de la función f en el subespacio $H = \mathbb{P}_2$.