DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos de 1º L. Matemáticas. 7 de septiembre de 2009

ALUMNO:	**D.N.I.:**

PARTE II: TEORÍA.

1. En este ejercicio $\alpha > 0$ es un parámetro y $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se designa por $p(x)$ al polinomio de interpolación de Lagrange para los datos

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2$$

con $x_0 = \alpha, x_1 = -\alpha, x_2 = 0$. Se pide:

   a) Escribe de manera explícita la base de polinomios de Lagrange ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 y expresa p como combinación lineal de dicha base.

   b) Se emplea la aproximación

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx \simeq \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)dx.$$

   ¿Qué célebre fórmula de cuadratura se obtiene mediante este proceso?

   c) Se supone a partir de ahora que f es derivable tantas veces como sea necesario. ¿Qué fórmula de derivación numérica se obtiene mediante la aproximación $f'(0) \simeq p'(0)$?

   d) Justifica la estimación

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{K_3}{6}|x|(\alpha^2 - x^2), \quad x \in [-\alpha, \alpha]$$

   donde K_3 es una cota de $|f'''|$ en $[-\alpha, \alpha]$.

   e) Se supone $f(x) = x^4$. Construye una tabla de diferencias dividas para el cálculo de $p(x)$.

2. Decide de forma razonada la validez de cada afirmación (responda sólo a 4 de ellas).

   a) Para $x_0 > 0$ la iteración funcional $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ converge a $\sqrt{2}$.

   b) La función $s(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & -1 \leq x < 0 \\ ax + 1 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ pertenece, para algún valor de a, al espacio $M_2^3(\Delta)$ donde $\Delta : -1 = x_0 < x_1 = 0 < x_2 = 2$.

   c) Para el producto escalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ la mejor aproximación de $f(x) = x^2$ en $\mathbb{P}_1$ es $p^\star(x) = 1 + x$.

   d) Alguna de las propiedades siguientes es cierta.
      - toda matriz cuadrada regular ($det(A) \neq 0$) admite descomposición LU;
      - toda matriz con descomposición LU es regular;
      - las matrices tridiagonales son invertibles

   e) El polinomio que interpola los valores $f(x_0),\ f(x_1),\ f'(x_0)$, tiene el mismo grado que el interpolante para $f(x_0),\ f(x_1),\ f'(x_1)$.

   f) Las diferencias divididas de cualquier orden para la función $f(x) = e^x$ son positivas.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Examen de septiembre. 7 de septiembre 2009

PRIMERA PARTE

Elige una de las dos preguntas siguientes:

1. Partiendo de un número dado $x_0 \in \mathbb{R}$ construimos una sucesión por medio del método iterativo

$$x_{n+1} := 1 + \operatorname{sen}(e^{-x_n}) . \qquad (1)$$

   (a) Suponiendo que la sucesión obtenida es convergente, demuestra que su límite debe ser un punto fijo de la función
   $$f(x) := 1 + \operatorname{sen}(e^{-x}) .$$

   (b) Justifica que f tiene un único punto fijo $x_* > 0$.

   (c) Para calcular x_* de manera aproximada se propone partir de una aproximación bastante buena x_0 y usar el método iterativo (1). ¿Convergerá el método?

   (d) Programa el ordenador para que calcule 15 iteraciones del método anterior partiendo de $x_0 = 0$.

2. A continuación usaremos la partición $\Delta : 0 = x_0 < 1/3 = x_1 < 2 < 1 = x_2$ del intervalo $[0, 1]$. La función $f(x) := 1 + \operatorname{sen}(e^{-x})$ es la misma que anteriormente. Se pide:

   (a) Describe una base del espacio $M_0^1(\Delta)$.

   (b) Justifica que hay una única función $p \in M_0^1(\Delta)$ que coincide con f sobre los tres nodos de la partición, y escribe p como combinación lineal de la base anterior.

   (c) Usando la regla del trapecio compuesta sobre esa partición, calcula una aproximación γ de $\int_0^1 f(x)dx$.

   (d) Usando el siguiente

   Teorema 1 *Se supone que $f \in C^2[a, b]$. Entonces el error cometido por la fórmula del trapecio compuesta al estimar $\int_a^b f(x)dx$ usando una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ puede acotarse como sigue:*
   $$|\mathcal{E}^{TC}(f)| \leq \frac{h^2(b-a)}{12} K_2 ,$$
   donde $h := \max_{1 \leq i \leq N}(x_i - x_{i-1})$ es el diámetro de la partición y K_2 es una cota de $|f''|$ en $[a, b]$.

   encuentra un intervalo $[\gamma - \epsilon, \gamma + \epsilon]$ que puedas garantizar que contiene a $\int_0^1 f(x)dx$.