Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad de Granada.
Métodos Numéricos de 1º L. Mátematicas. Curso 2007/08

Convocatoria de Septiembre: 4 de septiembre de 2008

Apellidos y Nombre:____

Primera parte (responda sólo a 6 de las 7 preguntas propuestas):

1. La conocida empresa 'Voy π-tando' propone usar el método de la *secante* sobre la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ para calcular muchas cifras decimales del número π. Expresa cada término x_n de la sucesión obtenida de esta forma en función de x_{n-1} y x_{n-2}.

2. Se busca aproximar la única raíz $\mathbf{r}$ de la ecuación
$$\tan(x) - x = 1$$
en el intervalo $]0, \pi/2[$. Con este fin se proponen los siguientes métodos iterativos:
(i) $x_{n+1} = g_1(x_n) = \tan(x_n) - x_n - 1$, (ii) $x_{n+1} = g_2(x_n) = \tan(x_n) - 1$, (iii) $x_{n+1} = g_3(x_n) = \arctan(x_n + 1)$.
   a) ¿Para cuáles de estos métodos $\mathbf{r}$ es punto fijo de g?, ¿cuáles de los anteriores convergen a $\mathbf{r}$?
   b) En los casos en que haya convergencia, calcula
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \mathbf{r}}{x_n - \mathbf{r}}$$
   cuando la aproximación inicial x_0 se toma suficientemente próxima a $\mathbf{r}$.

3. ¿Es cierto que toda matriz A, cuadrada, de orden 3, y con determinante no nulo, puede descomponerse como el producto $L.U$ de una matrix triangular inferior L y una matriz triangular superior U? Justifique su respuesta.

4. En el intervalo $[0, 2]$ se considera la partición $\Delta = \{0 = x_0 < 1 = x_1 < 2 = x_2\}$.
   a) Justifica que existe un único polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2$ que cumple $p(0) = 3$, $p(1) = -1$, $p(2) = 5$.
   b) ¿Es posible expresar este polinomio como combinación lineal de los polinomios de Lagrange l_0, l_1, l_2 asociados a la partición Δ?
   c) Escribe explícitamente el polinomio de Lagrange l_0.

5. En el intervalo $[0, 2]$ se considera la misma partición Δ del ejercicio anterior, así como el espacio asociado de funciones spline de grado 3 y clase 1, denotado por $S(3, 1, \{x_0, x_1, x_2\})$ o $M_1^3(\Delta)$.
   a) Escribe explícitamente una base de este espacio.
   b) Indica cuáles de las funciones siguientes pertenecen a nuestro espacio:
   $$f_1(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2 + x + x^3 & \text{si } 1 < x \le 2, \end{cases} \qquad f_3(x) = 2x - 3(x-1)_+^2 - 3x_+^3.$$

6. Escribe la fórmula de Simpson para una función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. ¿Podrías encontrar un ejemplo de función f no constante sobre la cual esta fórmula proporcione el valor exacto de la integral?

7. En el espacio $C[0, 1]$ se considera el producto escalar usual
$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$
   a) Encuentra la distancia entre las funciones $u(x) = x^2$ y $v(x) = x^3$.
   b) Escriba el sistema lineal que hay que resolver (pero no lo resuelva) para calcular la mejor aproximación m.c. de la función v anterior en el subespacio $H = \mathbb{P}_2$.

Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad de Granada.
Métodos Numéricos de 1º L. Mátematicas. Curso 2007/08

Convocatoria de Septiembre: 4 de septiembre de 2008

Apellidos y Nombre:____

Segunda parte (realice sólo uno de los ejercicios propuestos):

1. En el intervalo $[0,1]$ se considera la partición

$$\Delta = \{0 = x_0 < 1/3 = x_1 < 2/3 = x_2 < 1 = x_3\},$$

consistente en cuatro nodos equidistribuídos sobre el intervalo. En este ejercicio buscamos un spline lineal que interpola la función e^x; es decir, una función continua $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ que en cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sea un polinomio de grado inferior o igual a uno, y, además, cumpla,

$$s(x_i) = e^{x_i}, \qquad\qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

   a) Justifica que este problema tiene una única solución

   b) Encuentra explícitamente esta solución.

   c) Usa el *Mathematica* para representar, en un mismo dibujo, la gráfica de la función e^x, la de la función s encontrada, y los cuatro puntos en que s interpola a e^x.

2. Se considera la ecuación:

$$x^3 + 2x - 7 = 0$$

   a) Pruebe que sólo admite una raíz real localizándola en un intervalo de amplitud unidad.

   b) Realice una gráfica de la función para elegir una iteración inicial adecuada para la convergencia del método de Newton-Raphson.

   c) Calcule una estimación de la raíz con precisión de 4 decimales usando N-R con aproximación inicial apropiada.

   d) Muestre en la pantalla 10 iteraciones del método de la secante tomando como aproximaciones iniciales $(x_0,\ x_1)$ los extremos del intervalo dado en a). ¿Es convergente el método?