Henri Lebesgue habla de un joven matemático

Aprender de los clásicos 2. Notas por Rafael Ortega Ríos

El teorema de la curva de Jordan afirma que si C es un subconjunto del plano homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene dos componentes conexas; una de ellas acotada. No conviene confundir este teorema con un resultado más fuerte, el teorema de Jordan-Schonflies, que afirma además que el cierre de la componente acotada es homeomorfo al disco

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x|| \leq 1\}.$$

Para apreciar la diferencia entre ambos resultados conviene observar que el primer teorema tiene una extensión natural al espacio mientras que el segundo es exclusivo del plano. Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, entonces $\mathbb{R}^3 \setminus S$ tiene dos componentes pero puede ocurrir que la componente acotada sea muy extraña y su cierre no sea homeomorfo a

$$\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ ||x|| \leq 1\}.$$

Louis Antoine fue el primer matemático que observó esta sorprendente diferencia entre la topología de dos y tres dimensiones, que se sigue de los resultados de su tesis doctoral, leída en la Universidad de Estrasburgo el 9 de julio de 1921. Antoine hizo este extraordinario trabajo después de la Primera Guerra Mundial, en condiciones personales muy difíciles. En el artículo que publicó para recoger los resultados de su tesis, mostró su agradecimiento a Lebesgue; en palabras de Antoine, Lebesgue tuvo a bien orientar los inicios del trabajo y nunca le escatimó sus preciosos consejos. Tenemos la suerte de poder leer el informe que escribió Lebesgue sobre la tesis y que apareció publicado en 1922 en la revista Bull. Sci. Math. Lo que sigue es una traducción imperfecta e incompleta; pero es tiempo de escuchar al maestro, habla Henri Lebesgue:

1. Dos figuras se dicen homeomorfas cuando se corresponden punto a punto de manera unívoca y continua. M. Antoine[1] *observa que la homeomorfía es en cierto sentido más perfecta cuando la correspondencia se puede extender a una región de puntos exteriores a las figuras consideradas*[2] *y distingue los tres casos siguientes:*

- *Primer caso. La correspondencia se puede extender a todo el espacio;*[3]
- *Segundo caso. La correspondencia no se extiende más que a un entorno;*[4]
- *Tercer caso. La correspondencia no puede extenderse a ningún entorno.*

Se propone investigar si estos tres casos, concebidos a priori, se presentan realmente. Como la noción de homeomorfía está en la propia base del Analysis Situ,[5] *se comprende el interés del estudio que ha emprendido M. Antoine en su Tesis.*

Estudia las homeomorfías entre curvas, abiertas[6] *o cerradas*[7]*, planas o espaciales, y entre conjuntos perfectos y discontinuos por doquier.*[8] *Su resultado se puede enunciar así: El primer caso siempre se presenta para figuras planas; con las figuras espaciales, se presentan los tres casos.*[9]

2. El resultado relativo a las curvas planas es conocido y, de alguna forma, preliminar. Parece claro que, si se completa de forma adecuada, cada una de las pruebas del celebre teorema de M. Jordan sobre las curvas cerradas planas producirá una demostración.[10] *La de M. Antoine completa la prueba dada por M. de la Vallée Poussin en las últimas ediciones de su tratado de Análisis, que tiene el carácter de los razonamientos geométricos*

---

[1] todos los nombres de matemáticos contemporáneos vendrán precedidos por una respetuosa M

[2] las figuras son compactos A y B contenidos en $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$

[3] existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $h(A) = B$

[4] existen abiertos U y V en $\mathbb{R}^d$, $A \subset U$, $B \subset V$ y un homeomorfismo $h : U \to V$ tal que $h(A) = B$. No es posible hacer $U = V = \mathbb{R}^d$

[5] nombre antiguo de la Topología

[6] homeomorfas al intervalo $[0, 1]$

[7] homeomorfas a $\mathbb{S}^1$

[8] conjunto de Cantor: espacio métrico compacto, perfecto (todos los puntos son de acumulación) y completamente disconexo (las componentes conexas son puntos)

[9] con el término figura ahora Lebesgue se refiere a una curva, los grafos planos $A = \mathbb{S}^1 \cup ([0, 1] \times \{0\})$ y $B = \mathbb{S}^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$ están el el caso 2

[10] la completación que tiene en mente Lebesgue debe tener que ver con el teorema de Schonflies

elementales. Es sobre esta base, esencialmente geométrica, sobre la que reposa todo el trabajo de M. Antoine.

Merece la pena resaltar esta particularidad, pues los razonamientos geométricos tienen mala prensa en la actualidad y son muchos los que solo admiten los razonamientos "aritmetizados". Cierto, todo razonamiento correcto es aritmetizable, al menos en teoría, y esta aritmetización proporcionará una verificación; pero de ahí no se sigue ni que la verificación sea indispensable, ni, a fortiori, que se deba declarar inexacto todo razonamiento que no esté expresado en el lenguaje analítico de moda.

Un matemático que había cometido un error en un trabajo, que de todos modos era difícil y muy interesante, se ha creído con derecho a escribir lo que sigue: "Mi demostración no se libraba de ciertas críticas en aquellas partes en las que se apelaba a la intuición geométrica". No, no es la intuición la que se equivoca, es el no haber tenido suficiente intuición. En adelante, no se debe confundir intuición y razonamiento. La intuición geométrica guía en la construcción del razonamiento, y nada podría reemplazarla en ese papel cuando se tratan, como aquí, hechos geométricos; es por eso que la aritmetización de un razonamiento del Analysis Situ es siempre, desde un cierto punto de vista, parcial y artificial, pero un razonamiento no se debe reemplazar por una llamada a la intuición. El gran escollo de las demostraciones geométricas es que siempre se tiene la tentación de decir: "Es evidente que..."

¿Es esa una razón para renunciar a los razonamientos en los que la aritmetización sería tan larga como para hacerla imposible en la práctica? M. Antoine no ha pensado así; se ha acostumbrado a ver los hechos bajo su luz geométrica y ha conseguido afinar su intuición lo bastante como para llegar a los ejemplos paradójicos de los que hablaré más adelante.

3. Es evidente que, para las curvas en el espacio, el caso 1 no va a ser el único que se puede presentar; todo el mundo conoce las curvas que forman un nudo; es claro que la correspondencia entre una de esas curvas y una circunferencia no se puede extender a todo el espacio.[11] *Para transformar esta observación en demostración hacen falta razonamientos muy delicados basados en las propiedades de las curvas enlazadas.*[12] *[...]*

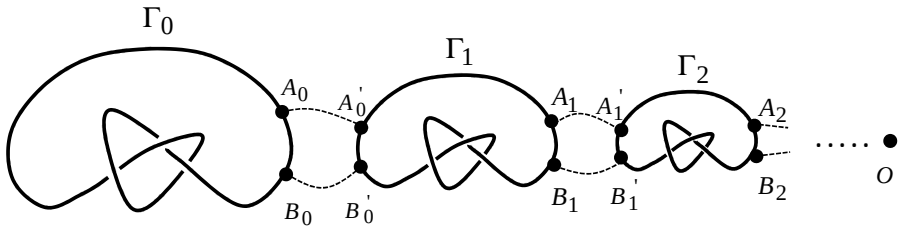
4. Para construir una curva cerrada cuya homeomorfía con la circunferencia entra en el caso 3, el autor emplea un procedimiento basado en un principio muy simple, pero para el que la legitimación resulta muy difícil.

[11] creo que Lebesgue tiene en mente el nudo de trébol T, lo que lleva al caso 2

[12] el grupo fundamental de $\mathbb{R}^3 \setminus T$ no es isomorfo al grupo cíclico infinito del espacio menos una circunferencia

Partimos de una curva Γ_0 con un nudo. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ homotéticas de Γ_0, más y más pequeñas y tendiendo hacia un punto O. Eliminemos un pequeño arco A_0B_0 de Γ_0; dos pequeños arcos $A'_0B'_0$, A_1B_1 de Γ_1; dos pequeños arcos $A'_1B'_1$, A_2B_2 de Γ_2, etc; y unamos $A_0A'_0$, $B_0B'_0$, $A_1A'_1$, etc. Llegamos a una curva γ que tiene una infinidad de nudos y que es la curva buscada.[13]

Interrumpimos a Lebesgue para hacer un dibujo



Un arco de γ que contiene al punto O, junto con un segmento de recta, da un ejemplo de homeomorfía entre dos curvas abiertas que entra en el caso 3.[14]

Se han obtenido todos los resultados anunciados sobre curvas salvo la existencia del caso 2 para la homeomorfía entre curvas abiertas.

Ese caso se obtendrá como consecuencia del estudio de los conjuntos perfectos discontinuos por doquier.

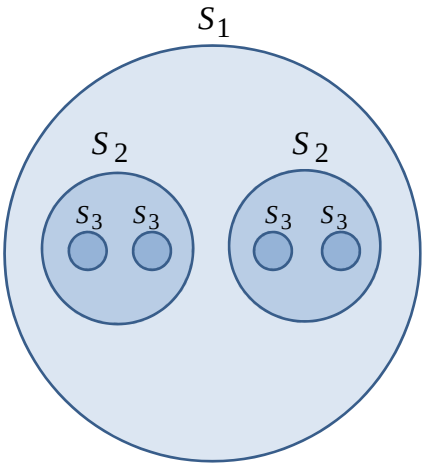
5. Para definir un conjunto E de este tipo, M. Antoine emplea un procedimiento muy simple que se puede describir como sigue: imaginemos que E se realiza materialmente; encontraremos una especie de nebulosa resoluble; la miramos. No veremos los puntos, sino apariencias de cuerpos, las masas, que diría un profesor de dibujo. Las superficies S, (o las curvas, si E está en el plano) delimitando estos cuerpos son las superficies de definición de orden 1. Miremos mejor a E, por ejemplo con un microscopio; allí donde veíamos un cuerpo, ahora vemos otros encerrando a E con más precisión. Están limitados por las superficies S_2. Con un mejor aumento tendríamos las superficies S_3, etc. E es el conjunto de los puntos comunes a la vez a

[13] la curva γ contiene al punto O y, aunque a primera vista resulta bastante extraña, es una curva de Jordan

[14] el sub-arco de γ se escoge de manera que contenga inifinitos anudamientos y se añade un segmento para que O no sea el extremo de la curva; los detalles se pueden consultar en el capítulo 19 del libro de E.E. Moise, Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer-Verlag 1977

las superficies de orden 1, a las superficies de orden 2, etc.[15]

Una nueva interrupción para pensar en el proceso que nos ha descrito Lebesgue. En el dibujo se ilustra un caso plano, S_1 es una circunferencia, S_2 está compuesto por dos circunferencias disjuntas, etc. La intersección de todos los círculos es el conjunto de Cantor E. En el caso espacial podemos reemplazar las circunferencias por un número finito de superficies compactas: esferas, toros, dobles toros...



Esta manera de ver los conjuntos, que generaliza ciertas definiciones de los irracionales,[16] *es tan natural que ha sido empleada con frecuencia en casos particulares; pero creo que M. Antoine ha sido el primero en usarla de un modo sistemático y en mostrar su gran flexibilidad. Gracias a este procedimiento, M. Antoine demuestra muy simplemente el teorema, debido a M. Denjoy, que afirma que por los puntos de E se puede hacer pasar una curva de Jordan sin puntos múltiples.*[17] *De ahí se podría deducir que dos conjuntos E son siempre homeomorfos, y entonces aparece la cuestión estudiada por M. Antoine:*[18] *¿existen efectivamente los tres casos posibles*

[15] en realidad a los conjuntos encerrados por dichas superficies

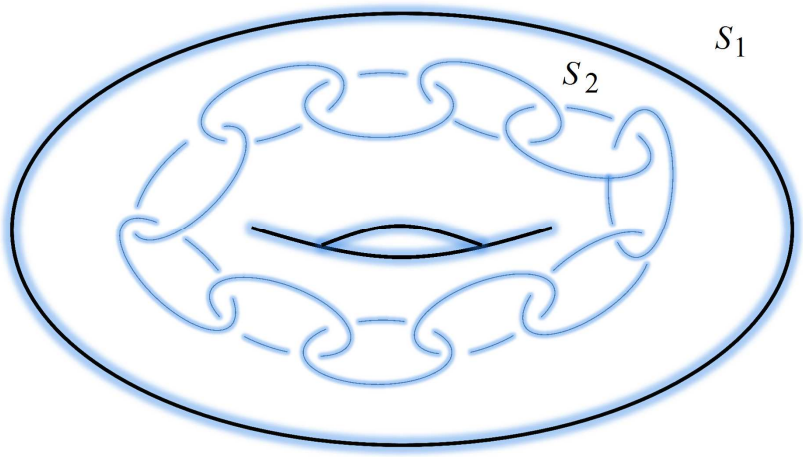
[16] posiblemente en la línea de las cortaduras de Dedekind

[17] aunque no lo publicó, Arnaud Denjoy había probado unos diez años antes que para un conjunto de Cantor en el plano, siempre existe una curva de Jordan que lo contiene; más tarde, ya en los años treinta, Denjoy resolvió una difícil cuestión sobre ecuaciones diferenciales en el toro que había planteado Poincaré, de nuevo los conjuntos de Cantor jugaron un papel

[18] dos conjuntos de Cantor son siempre homeomorfos, pero en ocasiones el homeomor-

para estas homeomorfías?

El caso de los conjuntos planos se trata fácilmente gracias a los resultados sobre curvas planas y a la consideración de las curvas S_i. Los ejemplos relativos a las curvas en el espacio se obtienen con la ayuda de un cierto conjunto perfecto, discontinuo por doquier, P. A primera vista, P se presenta con la forma de un toro S_1; un examen más profundo revela, en lugar del toro S_1, una cadena cerrada cuyos eslabones son toros S_2; un examen más minucioso lleva a reemplazar cada toro S_2 por una cadena de toros S_3, etc.



La homeomorfía de P y de un conjunto E perfecto, discontinuo por doquier, lineal,[19] *da un ejemplo del caso 3. Dos curvas (abiertas o cerradas) que pasan, una por todos los puntos de P, la otra por todos los de E, dan un nuevo ejemplo de homeomorfía entre curvas (abiertas o cerradas) en el caso 3.*[20]

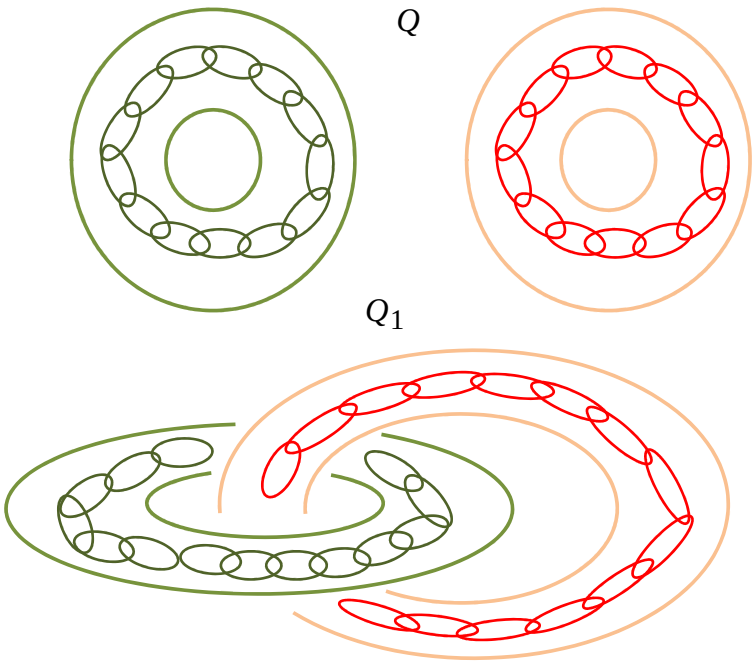
Tomemos ahora dos conjuntos Q y Q_1 formados cada uno por dos conjuntos iguales a P; los dos toros S_1 relativos a los constituyentes de Q son exteriores y no enlazados; los relativos a Q_1 son exteriores el uno con respecto al otro y no enlazados. Es evidente que la homeomorfía entre Q y

fismo no se extiende al espacio ambiente

[19] por ejemplo el Cantor ternario, $S_1 = [0,1]$, $S_2 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, $S_3 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$, etc.

[20] aquí conviene ser algo más precisos: una curva de Jordan que contenga a P y la circunferencia están en el caso 3

Q_1 puede extenderse a un entorno; M. Antoine demuestra que no puede extenderse a todo el espacio. Se obtiene así un ejemplo del caso 2 para los conjuntos; y de aquí, como se hizo antes, un ejemplo del caso 2 para dos curvas abiertas o para dos curvas cerradas.



6. Ahora ya se han obtenido todos los resultados anunciados; no puedo intentar dar una idea de los razonamientos que han llevado a ellos; razonamientos sutiles, a menudo laboriosos, donde cada detalle debe ser examinado con minuciosidad; en especial, en aquellos en los que interviene el conjunto P cuyas propiedades son las más paradójicas.

Por ejemplo: toda superficie simplemente conexa, cerrada, que contiene puntos de P en su interior y su exterior, pasa por puntos de P.[21] *De ahí se tendría la impresión de que P es un continuo, pero es discontinuo por doquier; aunque se comporta como un continuo frente a las superficies simplemente conexas, su discontinuidad aparece en relación con las superficies*

[21] dada $S \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfa a $\mathbb{S}^2$, si P corta a las dos componentes de $\mathbb{R}^3 \setminus S$, entonces también corta a S

multiplemente conexas.[22]

Hay algo todavía más extraño y que hace que P se parezca, no ya a un continuo cualquiera, sino a una especie de curva cerrada y enlazada con cada una de las circunferencias meridianas de los toros S_i: si C es una de esas circunferencias, todo casquete[23] *simplemente conexo limitado por C corta a P. [...]*

7. La última propiedad de P que se ha señalado es contraria al sentido común. [...]

8. La tesis de M. Antoine pone de manifiesto diferencias esenciales entre los conjuntos del plano y del espacio. [...] Los estudios profundos e importantes que acaba de hacer M. Antoine muestran que el Analysis Situs, en el que se han interesado sabios como Poincaré,[24] *como MM. Jordan, Picard y Hadamard, continuará teniendo en Francia representantes muy cualificados.*[25]

9. Se me permitirá salir del dominio matemático para decir que M. Antoine ha emprendido estos estudios después de que una terrible herida de guerra le haya dejado ciego. Que M. Antoine, nombrado Maître de Conférences,[26] *no se haya contentado con decir que era en esa tarea en la que podía rendir un mejor servicio y se haya obligado a conseguir el grado de Doctor que poseen casi todos los Maîtres de Conférences, eso prueba una fuerza de espíritu que encuentra su recompensa en sí misma y por tanto no debo felicitarlo; pero sí le querría agradecer el instructivo ejemplo que nos ha dado.*

Tenemos en Francia muy pocos Doctores en Matemáticas aunque nuestros Agregados tengan una gran cultura. Es que a los franceses les gusta poco lo mediocre y por miedo a hacerlo solo bastante bien, muchos no hacen nada de aquello que podrían hacer muy bien. A pesar de sus brillantes cualidades, sin la guerra M. Antoine no habría hecho jamás trabajo personal. Su ejemplo incita a atreverse.

Todos los que pueden deben trabajar en mantener y desarrollar la producción científica francesa; faltos de ese esfuerzo perderíamos pronto el muy alto lugar que nuestros antecesores nos han sabido conquistar en la opinión de los sabios extranjeros.

---

[22] El conjunto P no corta a cada uno de los toros S en S_2, S_3, etc., pero corta a las dos componentes de $\mathbb{R}^3 \setminus S$

[23] disco topológico cuyo borde es C

[24] en este caso no hay M

[25] las ideas de Antoine fueron continuadas por matemáticos como Alexander, Bing y M. Brown, de la escuela norte-americana

[26] cuerpo de profesorado en el sistema universitario francés

Espero de verdad que el ejemplo de M. Antoine decida a algunos jóvenes a ser menos tímidos y a tener la confianza en ellos que pueden tener de manera muy legítima.