DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Segundo Parcial. 10 de junio de 2009

PRIMERA PARTE

En el espacio $C[-1,1]$ se considera el producto escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) \cos x\, dx\,.$$

1. [2] Comprueba que esta aplicación define realmente un producto escalar.

Como sabes, cada producto escalar tiene asociada una manera de medir las distancias; en adelante trabajaremos con la distancia asociada al producto escalar anterior.

2. [2] ¿Podrías calcular la distancia entre las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$?
3. [3] Encuentra la mejor aproximación p sobre $H = \mathbb{P}_2$ de la función $f(x) = x^3$.
4. [1] Representa en una gráfica las funciones f y p del apartado anterior.
5. [2] Un estudiante de primero de matemáticas ha estado calculando la mejor aproximación p de una cierta función $f \in C[-1,1]$ sobre el subespacio $H = \mathbb{P}_2$. Lamentablemente, ha perdido sus notas y no recuerda las expresiones exactas de f ni de p, pero cree recordar que se cumplía

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))\, (1 + 3x) \cos x\, dx = 1\,.$$

¿Puede ser verdad o le falla la memoria?

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Segundo Parcial. 10 de junio de 2009

SEGUNDA PARTE

1. Se supone que $f \in C^2[a,b]$ y se pretende encontrar una fórmula de derivación numérica que aproxime $f''(x_\star)$ en los nodos
$$x_0 = x_\star, \quad x_1 = x_\star + 2h, \quad x_2 = x_\star - h,$$
con $h > 0$ y $x_\star \in [a+h, b-2h]$.

   [2](i) Usando las diferencias divididas escribe una fórmula para el polinomio $p \in \mathbb{P}_2$ que interpola a f en x_0, x_1, x_2.

   [3] (ii) Se efectúa la aproximación $f''(x_\star) \simeq p''(x_\star)$. Demuestra que este procedimiento conduce a la fórmula de derivación numérica
$$\mathcal{D}^2(f) = \frac{f(x_\star + 2h) + 2f(x_\star - h) - 3f(x_\star)}{3h^2}.$$

   [1] (iii) Aplicando la regla de L'Hopital prueba que
$$\lim_{h \to 0^+} \mathcal{D}^2(f) = f''(x_\star).$$

   [4] (iv) Se supone ahora que $f \in C^3[a,b]$ y $|f'''(x)| \leq K_3$ para cada $x \in [a,b]$. Demuestra que se cumple
$$|\epsilon(f)| \leq \frac{5}{9} K_3 h,$$
donde $\epsilon(f) = f''(x_\star) - \mathcal{D}^2(f)$. ¿Se comportará bien esta estimación respecto a errores de redondeo?

2. [7] (i)Dada la partición
$$\Delta: \quad x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 3 < x_3 = 4$$
se considera el espacio de funciones polinómicas a trozos de grado 3 y clase 2, denotado por $M_2^3(\Delta)$. ¿Qué dimensión tiene? ¿Pertenece la función $f(x) = |x-1|(x-1)$ a este espacio? ¿y la función $g(x) = |x-1|^3$?

   [3] (ii) Se considera el polinomio $p \in \mathbb{P}_4$ que interpola a la función seno en $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$, $x_4 = 2\pi$. Demuestra que existe algún punto $\xi \in [0, 2\pi]$ donde $p''(\xi)$ se anula.