DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Grupo B. Segundo Parcial. 9 de junio de 2008

PRIMERA PARTE

Una estudiante de 1º de Matemáticas afirma que es posible usar la regla del punto medio compuesta para obtener de manera aproximada el valor de la integral

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(e^x)dx\,. \tag{1}$$

1. Programa el *Mathematica* para que aplique la fórmula del punto medio compuesta a esta función tras dividir el intervalo $[0,1]$ en 15 partes iguales. **(4pt)**

2. Los compañeros de clase no se creen que se pueda estimar el valor de la integral anterior con un error inferior a 10^{-7}. Pero ella ha consultado un libro de Métodos Numéricos y ha encontrado el siguiente:

   Teorema 1 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2, y sea K_2 una cota de $|f''|$ en $[a,b]$. Entonces el error $\mathcal{E}^{PM}(f)$ cometido por la fórmula del punto medio (***simple***) cuando se aplica a f sobre $[a,b]$ cumple*

   $$|\mathcal{E}^{PM}(f)| \le \frac{K_2}{24}(b-a)^3\,.$$

2.(a) Usando esta desigualdad, demuestra que el error $\mathcal{E}^{PMC}(f)$ que se obtiene al aplicar la fórmula del punto medio compuesta sobre una partición $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ dada cumple

$$|\mathcal{E}^{PMC}(f)| \le \frac{K_2}{24}h^2(b-a)\,,$$

donde $h := \text{máx}_{1\le i\le N}(x_i-x_{i-1})$ es el diámetro de la partición. **(3pt)**

2.(b) ¿Podrías ayudar a nuestra estudiante a decidir en cuántos subintervalos iguales habría que dividir el intervalo $[0,1]$ para poder asegurar que el error producido por la fórmula del punto medio compuesta al estimar la integral (1) no supera el error tolerado de 10^{-7}? **(3pt)**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Grupo B. Segundo Parcial. 9 de junio de 2008

SEGUNDA PARTE

2. En el intervalo $[0,1]$ se considera la partición

$$\Delta: \quad x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{2}{3} < x_3 = 1.$$

a. Define los espacios de funciones polinómicas a trozos $M_0^1(\Delta)$, $M_1^3(\Delta)$, $M_2^3(\Delta)$. ¿Qué dimensión tiene cada uno de ellos? **(4pt)**

b. Describe una base del espacio $M_0^1(\Delta)$. **(3pt)**

c. Se consideran las funciones $s_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$,

$$s_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}, \qquad s_2(x) = x^2, \qquad s_3(x) = |x - \frac{1}{3}|(x - \frac{1}{3}).$$

Indica a cuáles de los espacios mencionados pertenece cada función s_i. **(3pt)**

2. En el espacio $C[0, 2\pi]$ consideramos el producto escalar usual

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

y la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$.

a. Encuentra la mejor aproximación de la función f en el subespacio H generado por las funciones $1, \cos x, \operatorname{sen} x$. **(5pt)**

a. Encuentra la mejor aproximación de la función f en el subespacio $H = \mathbb{P}_2$. **(5pt)**