

Introducción a la Mecánica Celeste

Rafael Ortega y Antonio J. Ureña

Granada, 2021

Prólogo

Este libro, dirigido a estudiantes de Matemáticas que se interesan por la Física, está diseñado como texto de la asignatura MECÁNICA CELESTE, que se viene enseñando en la Universidad de Granada desde el año 2003. Hay bastantes ramas de la Física que han alcanzado un nivel muy alto de precisión y admiten una presentación al gusto matemático; esto ocurre con la Mecánica de Lagrange, el Electromagnetismo, la Dinámica de Fluidos o la Relatividad. La Mecánica Celeste se suele presentar como un modelo dentro de estas disciplinas de la Física-Matemática, probablemente porque fue la primera en aparecer. En general la presentación rigurosa de la Física requiere un nivel matemático alto, en bastantes casos por encima del que se espera en la licenciatura, y la Mecánica Clásica o Racional tiene la ventaja de usar unas matemáticas más parecidas a las de la carrera.

Hemos encontrado una primera razón en la Física para estudiar la asignatura; pero debe quedar claro, éste es un libro de Matemáticas y no de Física. En este momento se puede preguntar, ¿Matemáticas? ¿y de qué tipo? ¿es Análisis? ¿acaso Geometría, Álgebra o Topología? Pues usaremos herramientas de cada una de estas ramas, pero la primera será predominante. En sus inicios el Análisis Matemático se basó en una mezcla de intuición geométrica y mecánica, y más tarde los argumentos ligados al movimiento se fueron eliminando en la enseñanza. Hace algunos años un eminente matemático llegó más lejos y propuso también la abolición de la intuición geométrica, para llegar así a una versión del Análisis ligada a ‘la intuición de lo abstracto’. Como es lógico presentó un texto sin dibujos. Nada más hojear nuestro libro cualquiera sabrá que no es el camino que vamos a seguir; pretendemos que este curso ayude a caminar entre lo intuitivo y lo riguroso, entre lo geométrico y lo dinámico, y que se hagan compatibles todos estos aspectos al pensar una definición o un teorema.

Ya tenemos una segunda razón para emprender este estudio. Y ahora vamos a los contenidos. En las dos primeras lecciones estudiaremos el movimiento de un planeta alrededor del Sol y encontraremos las tres leyes de Kepler. Estas leyes son bien conocidas pero lo interesante será obtenerlas por un procedimiento puramente deductivo, a partir de la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton. También encontraremos en estas lecciones otras cosas no tan conocidas; por ejemplo, cómo se dota de coordenadas a un planeta o cómo sería un mundo no Newtoniano, con otra ley de gravitación. La lección tres será corta y en ella resolveremos el problema de dos cuerpos, su estudio nos ayudará a entender el interesante principio de relatividad de Galileo.

Las cosas se complican y se hacen verdaderamente difíciles cuando se consideran las interacciones entre tres o más planetas. En la última lección daremos un breve paseo para conocer el problema de los n cuerpos. Mucha gente estará de acuerdo en que no es posible conocer París en dos o tres días, pero muy poca dejará de hacer ese corto viaje si se presenta la ocasión. Algo así sucede con el problema de tres o más cuerpos, y esperamos que el presente texto despierte el interés de visitar este problema en un futuro y con más tiempo. Y es que faltan muchas cosas interesantes en este libro introductorio; así las aplicaciones recientes al diseño de misiones espaciales o los profundos progresos teóricos realizados en el último siglo...

Este libro fue publicado por la Universidad de Granada en el año 2010. En esta nueva versión hemos corregido los errores que hemos detectado en la edición impresa.

Granada, abril de 2021.

Lección 1

Campos de fuerzas centrales. La segunda ley de Kepler

1.1. Introducción

Nature and nature's laws lay hid in night;
God said 'Let Newton be' and all was light.

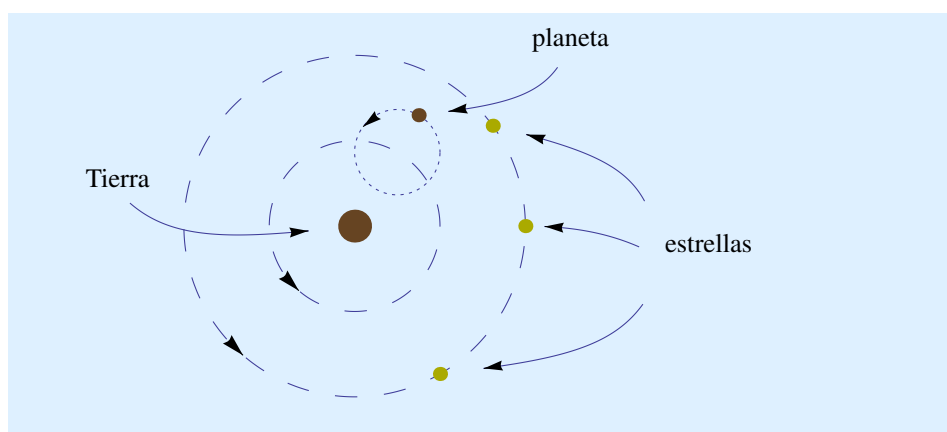
Alexander Pope

If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.

Isaac Newton

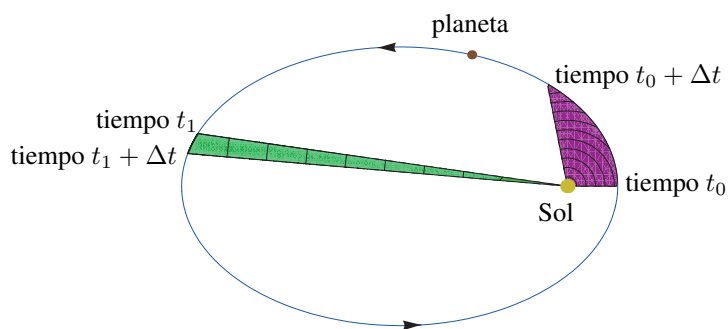
Desde la Antigüedad, los humanos han sido conscientes del movimiento de los astros celestes. Por ejemplo, cada día el Sol sale por el este y se pone por el oeste. También las estrellas giran en el cielo nocturno de este a oeste. Algunas 'estrellas', sin embargo, exhiben un movimiento mucho más imprevisible, y los griegos las llamaron *πλανήτης*, ('errantes'), de donde proviene nuestro término 'planetas'.

Durante toda la Edad Media, en Europa prevaleció la visión aristotélica del universo, perfeccionada por Ptolomeo en el siglo II d.C. Se suponía que la Tierra estaba quieta en el centro y que en torno a ella giraban una serie de esferas concéntricas, la exterior de las cuales contenía las estrellas fijas. Para explicar el movimiento -en apariencia errático- de los planetas, éstos se suponían fijos sobre nuevas esferas que giraban a su vez sobre las esferas anteriores.



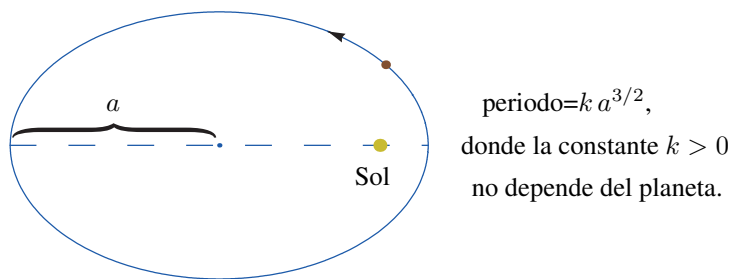
N. Copérnico (1473-1543) explicó el universo de otra forma. En su libro 'De Revolutionibus Orbium Coelestium' introdujo el modelo heliocéntrico, en el que el centro del universo estaba ocupado por el Sol, mientras que la Tierra, junto con el resto de planetas giraban en circunferencias en torno a él. Las ideas de Copérnico eran conocidas por J. Kepler (1551-1630), quien disponía de datos mucho más precisos que los de Copérnico. A partir de las observaciones recogidas por el astrónomo Tycho Brahe, Kepler llegó a la conclusión -muy a su pesar- de que los planetas giran, no sobre curvas 'perfectas' (circunferencias), sino sobre *elipses*, ocupando el Sol uno de los focos (primera ley de Kepler). Los trabajos de Tycho Brahe llevaron a Kepler a formular dos leyes más:

- *Segunda Ley de Kepler:* El segmento que une cada planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



Ambas regiones tienen igual área.

- *Tercera Ley de Kepler:* El periodo de los planetas es proporcional a la potencia $3/2$ de la longitud del semieje mayor de las elipses que recorren.

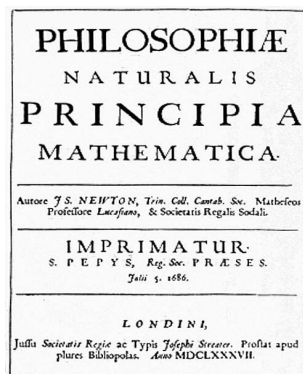


Un contemporáneo ilustre de Kepler fue Galileo Galilei (1564-1642), quien combinó observación, idealización y matemáticas para echar por tierra la física de Aristóteles. Por ejemplo, según este pensador griego, todo cuerpo sobre el cual no actúe ninguna fuerza tiende al reposo. Sin embargo, Galileo se atrevió a negar el ‘sentido común’ y enunció el

Principio de Inercia: *En ausencia de fuerzas externas, un cuerpo, o bien permanece en reposo, o bien sigue un movimiento rectilíneo uniforme.*

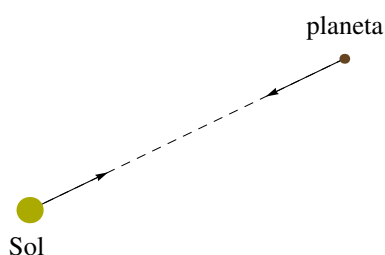
Claro, si aplicamos este principio a los planetas, que, según Kepler, giran en elipses en torno al Sol... deducimos que tienen que estar sometidos a fuerzas externas. Sir Isaac Newton (1642-1727) tuvo la idea de atribuir estas fuerzas a la atracción de unas masas sobre otras. El hecho de que la intensidad de esta fuerza sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa los cuerpos le permitió a Newton demostrar matemáticamente las tres leyes de Kepler. Más de tres siglos después, también las demostraremos nosotros.

1.2. La ley de la gravitación universal

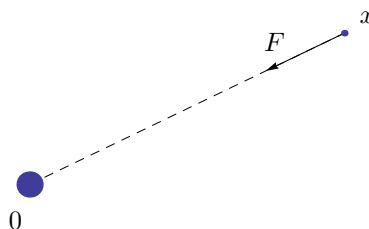


Las tres leyes de Newton de la Mecánica, así como la ley de la gravitación universal, están descritas en esta obra.

Una de las grandes contribuciones de Newton consistió en afirmar que las masas se atraen mutuamente. Pensaremos en el Sol y un planeta.



Llamaremos M a la masa del Sol y m a la masa del planeta. Situaremos, por comodidad, al Sol en el origen de coordenadas 0 , mientras que nuestro planeta estará en algún punto $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:



¿Cuál será la fuerza F a la que se ve sometido nuestro planeta? En primer lugar se observa que esta fuerza tiene la misma dirección que el vector x , pero el sentido es opuesto:

$$F = -\lambda \frac{x}{|x|} \quad \text{para algún } \lambda > 0.$$

Por otra parte, según la ley de la gravitación universal, la norma de F debe ser directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $|x|$ que las separa. A la constante de proporcionalidad asociada es usual llamarla G , la *constante de gravitación universal*:

$$|F| = \frac{GMm}{|x|^2}.$$

Ahora bien, tomando normas en la expresión anterior para F obtenemos que $|F| = \lambda$, y, en consecuencia,

$$F = F(x) = - \left(\frac{GMm}{|x|^2} \right) \frac{x}{|x|}.$$

La fuerza F produce una aceleración en nuestro planeta. Según la segunda ley de Newton, la posición de nuestro planeta $x = x(t)$ dependerá del tiempo t a través de la

ley

$$m \ddot{x}(t) = F(x(t)) = - \left(\frac{GMm}{|x(t)|^2} \right) \frac{x(t)}{|x(t)|},$$

Observa que m se simplifica en ambos lados de la igualdad, dando lugar a la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) = - \left(\frac{\mu}{|x(t)|^2} \right) \frac{x(t)}{|x(t)|},$$

donde $\mu = GM$ (es una constante positiva). Definimos

$$f(r) := -\frac{\mu}{r^2}, \quad r > 0,$$

y nuestra ecuación toma la siguiente forma abstracta:

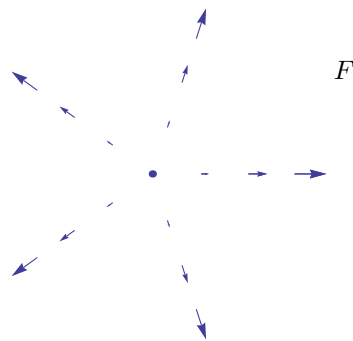
$$\ddot{x}(t) = f(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|}.$$

En realidad, este análisis no es consistente con la ley de acción y reacción de Newton, pues la partícula de masa m también atraerá al origen. Sin embargo, si la masa M es mucho mayor que m (como por ejemplo en el caso de la Tierra y un satélite artificial orbitando alrededor), la aceleración producida sobre M será despreciable.

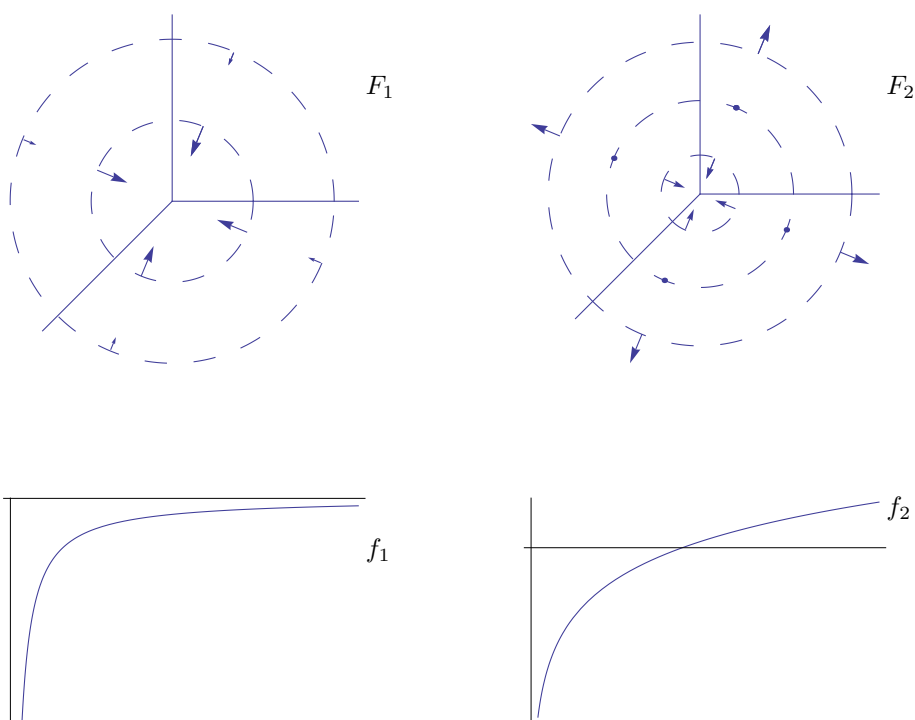
1.3. Fuerzas centrales

En \mathbb{R}^3 se fija el origen 0 y se supone un campo de fuerzas con la dirección del vector de posición y cuya intensidad depende sólo de la distancia al origen. En fórmulas,

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|},$$



donde $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es dada. Cuando $f > 0$, el vector apunta hacia fuera (el origen es repulsivo); por el contrario, si $f < 0$, el origen será atractivo.



A cada función continua $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ corresponde un campo de fuerzas centrales F .

Por ejemplo, para el campo gravitatorio Newtoniano actuando sobre una partícula de masa 1,

$$f(r) = -\mu/r^2, \quad F(x) = -\frac{\mu}{|x|^3} x, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

donde $\mu > 0$ es una constante positiva.

1.4. Movimientos en un campo de fuerzas centrales

Supondremos que f (y por tanto F) son funciones continuas. Denotemos por $x = x(t)$ a la posición, en función del tiempo, de una partícula de masa 1 sometida al campo de fuerzas F ; de acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$\ddot{x} = F(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|} \quad (\text{ecuación diferencial de segundo orden.})$$

En realidad estamos ante un sistema, pues $x = (x_1, x_2, x_3)$. En el caso del campo gravitatorio Newtoniano,

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{|x|^3} \Leftrightarrow \ddot{x}_i = -\frac{\mu x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

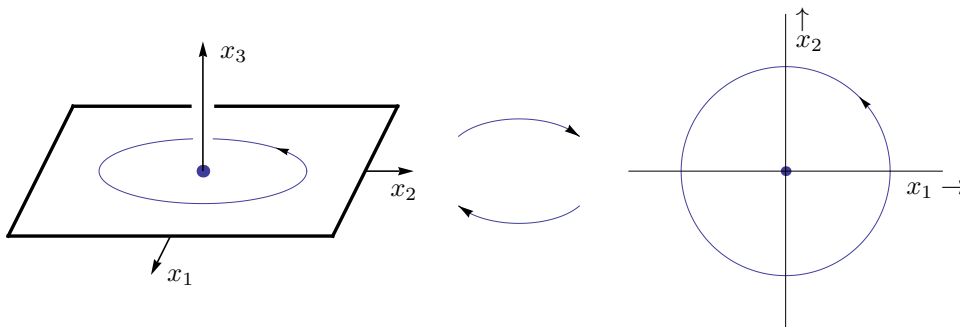
Un *movimiento* es una solución $x = x(t)$ a nuestra ecuación diferencial. Observese que, por definición de solución,

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad x \in \mathcal{C}^2(I), \quad I \text{ intervalo.}$$

Ejemplo. Consideramos nuestra ecuación *modelo* para $\mu = 1$:

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observa que $x(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$,



Una solución circular.

es una solución. Esta solución recorre una circunferencia de radio 1 sobre el plano $\overline{x_1 x_2}$ a velocidad angular $\omega = 1$. Su periodo (el ‘año’ de esta partícula) es 2π .

Ejercicio. Demuestra que $x_r(t) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$ es solución si y sólo si

$$|\omega| = \frac{1}{r^{3/2}}.$$

¿Cómo hay que interpretar el signo, positivo o negativo, de ω ?

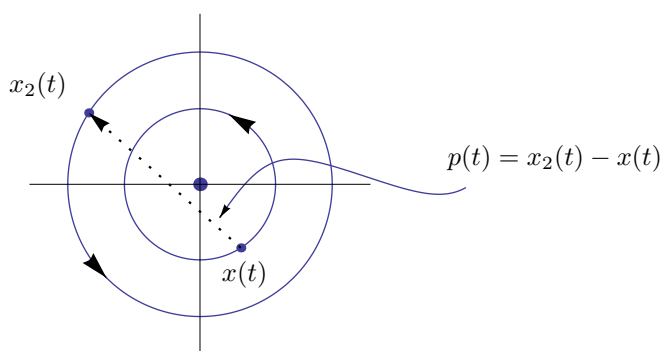
Ejercicio (versión elemental de la tercera ley de Kepler). Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, calcula el periodo (en función de r) de la órbita circular x_r que gira a distancia r del origen. ¿Por qué este resultado no demuestra ‘del todo’ la tercera ley de Kepler?

Volvamos por un momento a la solución particular

$$x(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

que habíamos encontrado para nuestra ecuación. Observa que, en vista de un ejercicio anterior, $x_2(t) = 2(\cos(t/\sqrt{8}), \operatorname{sen}(t/\sqrt{8}), 0)$ es otra solución. Imaginemos ahora un sistema solar con estos dos planetas (despreciamos la atracción de un planeta sobre el otro), y que en el planeta x viven unos astrónomos galácticos que contemplan en el cielo el movimiento del planeta x_2 . Nuestros astrónomos verán al planeta x_2 moverse con el vector de posición

$$p(t) = x_2(t) - x(t) = \left(2 \cos(t/\sqrt{8}) - \cos t, 2 \operatorname{sen}(t/\sqrt{8}) - \operatorname{sen} t, 0 \right).$$



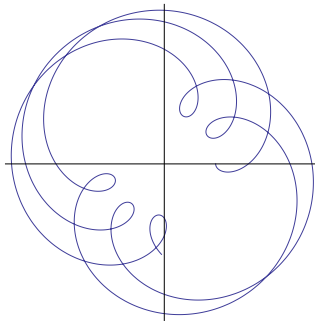
¿Cómo se ve un planeta desde otro?

Se puede comprobar que esta función *no* es periódica de ningún periodo (pertenecer a una clase de funciones llamadas ‘quasiperiódicas’). Para hacernos una idea, vamos a representar el conjunto $\{p(t) : t \in [0, 16\pi]\}$ en el plano

Ejercicio. Demuestra que la función

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := 2 \cos(t/\sqrt{8}) - \cos t,$$

no es periódica de ningún periodo. (Véanse también los ejercicios 2.12 y 2.13, al final de la lección 2).

La imagen de p entre 0 y 16π

Ejemplo. Continuamos con nuestra ecuación del movimiento bajo un campo gravitatorio Newtoniano con $\mu = 1$:

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Vamos a buscar ahora una solución que se mueva en la parte positiva del eje $\{x_2 = x_3 = 0\}$. Entonces,

$$x_1'' + \frac{1}{x_1^2} = 0.$$

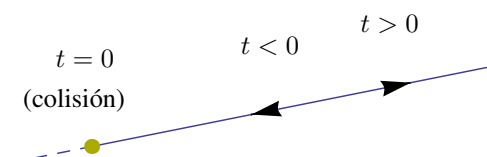
Nos concentramos en soluciones del tipo

$$x_1(t) = ct^\alpha, \quad t > 0,$$

donde $c > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ son constantes. Un cálculo sencillo nos lleva a la expresión

$$x_1(t) = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} t^{2/3}, \quad t > 0,$$

pero ahora puede comprobarse que para $t < 0$, la fórmula anterior define otra solución.



1.5. Trasladando el instante inicial

Volvemos ahora a un campo de fuerzas centrales cualquiera:

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Observa que la ecuación diferencial es autónoma, así que, si $x = x(t)$ es una solución, entonces $x(t + c)$ también lo es para cada $c \in \mathbb{R}$. Por ejemplo,

$$(\cos(t + c), \sin(t + c), 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

es una familia de soluciones de $\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}$. Lo mismo sucede con

$$\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}} (t + c)^{2/3}, 0, 0 \right), \quad t \in] - c, +\infty[.$$

1.6. El tiempo es reversible

Supongamos que $x = x(t)$ es un movimiento en un campo de fuerzas centrales

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Entonces $x(-t)$ también es solución (la comprobación es inmediata). Con otras palabras, si grabáramos el movimiento de nuestra partícula en un video, al pasarlo hacia atrás obtendríamos otro movimiento en nuestro campo de fuerzas centrales.

1.7. Invariancia por isometrías

Una isometría (lineal) en \mathbb{R}^3 se representa por una matrix ortogonal:

$$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad AA^T = A^T A = I_3.$$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ giro de ángulo } \theta \text{ respecto del eje } x_3.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ simetría ortogonal respecto del plano } \{x_3 = 0\}.$$

Observa que $\mathcal{O}(3) = \{\text{matrices ortogonales } 3 \times 3\}$ es un grupo respecto al producto matricial.

Una propiedad importante que debes conocer: si A es ortogonal, entonces

$$|Ax| = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Proposición 1.7.1. Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un movimiento en un campo de fuerzas centrales

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|},$$

y sea $A \in \mathcal{O}(3)$ una matriz ortogonal. Entonces

$$Ax : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad t \mapsto Ax(t),$$

es también una solución.

Demostración.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(Ax(t)) = A\ddot{x}(t) = f(|x(t)|) \frac{Ax(t)}{|x(t)|} = f(|Ax(t)|) \frac{Ax(t)}{|Ax(t)|}. \end{aligned}$$

(La última igualdad es consecuencia de que A es ortogonal). \square

Ahora se pueden construir nuevos ejemplos de soluciones para un campo gravitatorio Newtoniano sin más que mover el plano o la recta donde se efectúa el movimiento.

Ejercicio. Demuestra que dados dos planos π y π' que pasan por el origen, siempre existe una matriz $A \in \mathcal{O}(3)$ tal que $A\pi = \pi'$. ¿Cuántas?

1.8. Midiendo lo lejos que está el movimiento de ser rectilíneo: el momento angular

Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase \mathcal{C}^1 (que interpretamos como el vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio). Definimos su *momento angular* como la función $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$c(t) := x(t) \wedge \dot{x}(t), \quad t \in I, \quad (\text{producto vectorial}).$$

Antes de continuar, es conveniente repasar algunas propiedades del producto vectorial de vectores en \mathbb{R}^3 . Hacemos, pues, un pequeño inciso...

Definición (Producto vectorial). Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dados. Consideramos la función

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w \mapsto \varphi(w) := \det(u, v, w).$$

Observa que φ es lineal, es decir, $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$, el espacio dual de \mathbb{R}^3 . Ahora bien, $(\mathbb{R}^3)^*$ se identifica con \mathbb{R}^3 via el producto escalar. De forma más precisa, existe un único vector $x \in \mathbb{R}^3$ que cumple

$$\varphi(w) = \det(u, v, w) = \langle x, w \rangle, \quad w \in \mathbb{R}^3.$$

A este vector x es usual denotarlo por $u \wedge v$, el producto vectorial de u por v . Dicho de otra forma, $u \wedge v$ se define por la propiedad

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w), \quad w \in \mathbb{R}^3,$$

y así hemos construido la aplicación ‘producto vectorial’:

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

A continuación enumeramos algunas propiedades básicas del producto vectorial, que probablemente conocerás. Como ejercicio, puedes demostrarlas a partir de la definición.

Propiedades:

(i) El producto vectorial es bilineal:

$$(\lambda u + \mu v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w),$$

$$u \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w).$$

(ii) El producto vectorial es antisimétrico:

$$v \wedge u = -u \wedge v.$$

(iii) Si $u \neq 0 \neq v$, entonces

$$|u \wedge v| = |u| |v| \operatorname{sen} \theta,$$

siendo $\theta = \arccos \left(\frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|} \right)$ el ángulo que forman los vectores u y v .

(iv) $u \wedge v$ es ortogonal simultáneamente a u y a v :

$$\langle u \wedge v, u \rangle = 0 = \langle u \wedge v, v \rangle.$$

(v) $u \wedge v$ puede expresarse fácilmente en coordenadas respecto de la base usual; en realidad, respecto de cualquier base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$u \wedge v = \det(u, v, e_1)e_1 + \det(u, v, e_2)e_2 + \det(u, v, e_3)e_3.$$

Tras este repaso al producto vectorial, volvemos a nuestra definición del momento angular de una partícula con vector de posición $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$c(t) := x(t) \wedge \dot{x}(t), \quad t \in I.$$

Supongamos ahora que nuestra partícula $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas centrales:

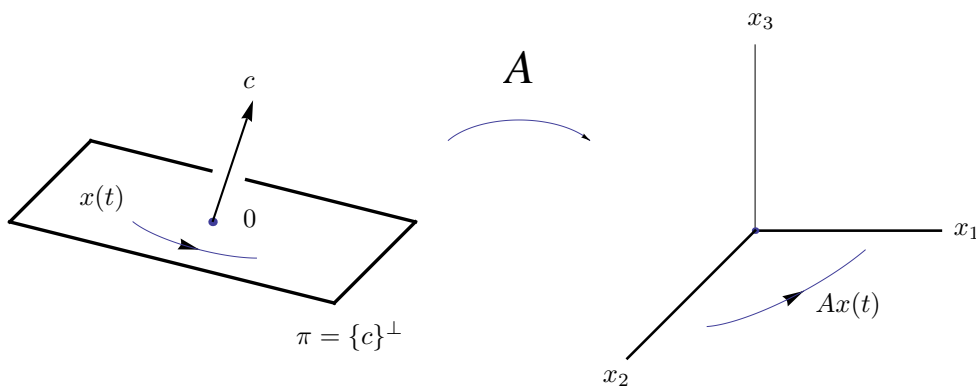
$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}.$$

Observamos que $c \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$, puesto que tanto x como \dot{x} son funciones de clase \mathcal{C}^1 y el producto vectorial es bilineal. Derivando,

$$\dot{c} = \frac{d}{dt}(x \wedge \dot{x}) = \dot{x} \wedge \dot{x} + x \wedge \ddot{x} = \frac{f(|x|)}{|x|} x \wedge x = 0,$$

y deducimos que el momento angular de nuestra partícula es un vector constante $c \in \mathbb{R}^3$.

Supongamos en primer lugar que $c \neq 0$, y sea $\pi = \{c\}^\perp$ el plano ortogonal a c que pasa por el origen. Entonces, $x(t) \in \pi \forall t \in I$ y el movimiento es plano. Si se quiere, es posible encontrar una matriz $A \in \mathcal{O}(3)$ que transforma π en el plano $\overline{x_1 x_2}$:



Las isometrías permiten transformar un plano vectorial cualquiera en el plano coordenado $\overline{x_1 x_2}$.

Si $c = 0$, entonces $x \wedge \dot{x} \equiv 0$, y deducimos que $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ son linealmente dependientes para todo $t \in I$. Como además $x(t) \neq 0$ (¿por qué?), deberá existir una función $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\dot{x}(t) = \lambda(t)x(t), \quad t \in I.$$

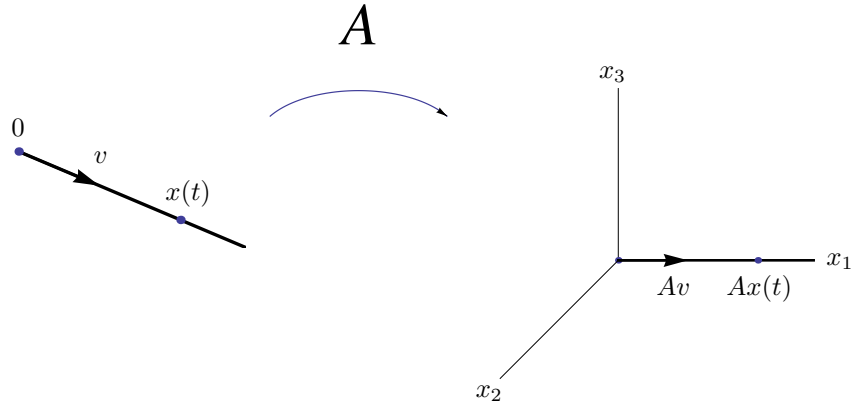
Comprobemos que nuestra partícula vive en una semirrecta que emana del origen. Con este fin, derivamos la función $x/|x|$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{|x|\dot{x} - (\langle \dot{x}, x \rangle / |x|)x}{|x|^2} = \frac{\lambda|x|x - (\langle \lambda x, x \rangle / |x|)x}{|x|^2} = 0.$$

En consecuencia, existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$ (constante), tal que $x(t)/|x(t)| \equiv v$ en I . Deducimos de aquí que $|v| = 1$, y además

$$x(t) = |x(t)|v \quad \forall t \in I,$$

es decir, que x vive en la semirrecta \mathbb{R}_+v . De nuevo podemos encontrar una isometría A que transforme esta semirrecta en el semieje $\{x_2 = x_3 = 0, x_1 > 0\}$.



Las isometrías permiten transformar cualquier semirrecta en la parte positiva del eje $\overline{x_1}$.

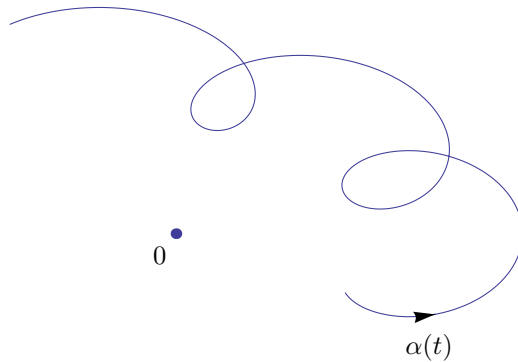
Por eso, a partir de ahora, consideraremos únicamente movimientos en el plano $\overline{x_1x_2} \equiv \mathbb{R}^2$:

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

1.9. Expresión en polares de un movimiento plano

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase \mathcal{C}^k para algún $k \geq 1$ que cumple

$$\alpha(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$



Una curva que no pase por el origen.

Entonces existen funciones $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ (llamadas respectivamente módulo y argumento), de clase \mathcal{C}^k , y tales que $r > 0$ en I y

$$\alpha(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in I.$$

Además, r y θ son únicos (salvo un múltiplo constante de 2π para θ).

Demostración. Es claro que r es única y dada por $r(t) = |\alpha(t)|$. A partir de ahora supondremos que $|\alpha(t)| \equiv 1$, pues en otro caso dividiríamos la curva por su norma. Probaremos en primer lugar la unicidad de θ . Para ello denotamos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Dada $\theta \in \mathcal{C}^k$ con

$$\cos \theta = \alpha_1, \quad \sin \theta = \alpha_2,$$

derivamos y obtenemos que

$$-\dot{\theta} \sin \theta = \dot{\alpha}_1, \quad \dot{\theta} \cos \theta = \dot{\alpha}_2,$$

de donde se deduce que

$$\dot{\theta} \sin^2 \theta = -\dot{\alpha}_1 \alpha_2, \quad \dot{\theta} \cos^2 \theta = \alpha_1 \dot{\alpha}_2,$$

así que, sumando,

$$\dot{\theta} = \alpha_1 \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1 \alpha_2.$$

□

Fijemos ahora $t_0 \in I$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\cos \theta_0 = \alpha_1(t_0)$ y $\sin \theta_0 = \alpha_2(t_0)$. La expresión de θ viene dada (de manera única) por

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t (\alpha_1(s) \dot{\alpha}_2(s) - \dot{\alpha}_1(s) \alpha_2(s)) ds.$$

Para probar la existencia, fijemos una curva $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con $|\alpha| \equiv 1$, y definamos $\theta = \theta(t)$ por la fórmula anterior (tiene clase \mathcal{C}^k en virtud del Teorema Fundamental del Cálculo). Observamos que la curva

$$(x(t), y(t)) := (\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)), \quad t \in I,$$

es una solución del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = -\dot{\theta}(t)y, \quad \dot{y} = \dot{\theta}(t)x, \quad x_1(0) = \alpha_1(0), \quad y(0) = \alpha_2(0).$$

Por otro lado, de la identidad $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \equiv 1$,

$$\alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_2 \dot{\alpha}_2 = 0,$$

mientras que, de la definición de θ ,

$$-\alpha_2 \dot{\alpha}_1 + \alpha_1 \dot{\alpha}_2 = \dot{\theta}.$$

Podemos ver estas dos ecuaciones como un sistema de ecuaciones lineales (dependiente del parámetro $t \in I$), cuyas incógnitas son $\dot{\alpha}_1$ y $\dot{\alpha}_2$. La matriz de coeficientes del sistema es

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

así que $\det M \equiv 1$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de $t \in I$. Usando la regla de Cramer,

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \dot{\theta} & \alpha_1 \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ -\alpha_2 & \dot{\theta} \end{pmatrix} = \dot{\theta}\alpha_1 \end{cases},$$

es decir, que (α_1, α_2) es otra solución del mismo problema de valores iniciales que (x, y) . Del teorema de unicidad de soluciones a problemas de valores iniciales -observa que nuestro sistema es localmente Lipschitziano respecto de (x, y) -, deducimos que $(\alpha_1, \alpha_2) = (x, y)$, o lo que es igual,

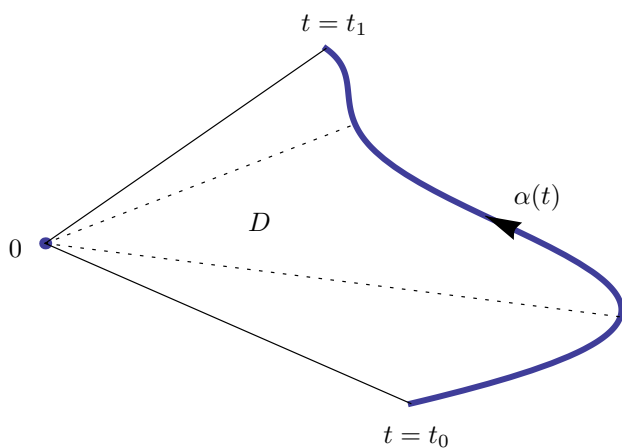
$$\alpha_1 = \cos \theta, \quad \alpha_2 = \operatorname{sen} \theta.$$

Nota: El resultado es cierto también para $k = 0$. Es decir, que dada una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ continua, existen funciones $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, tales que $r > 0$ y $\alpha = r(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$. Además estas funciones son únicas (salvo un múltiplo de 2π para θ). Sin embargo, este hecho no es una consecuencia directa de nuestra demostración, que se aplica sólo a curvas de clase $k \geq 1$.

Ejercicio. La condición $\alpha(t) \neq 0 \forall t \in I$ es esencial. Demuéstralo encontrando una curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase \mathcal{C}^∞ para la cual no existan funciones $r, \theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $\alpha = r(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$.

1.10. Fórmula del área en polares

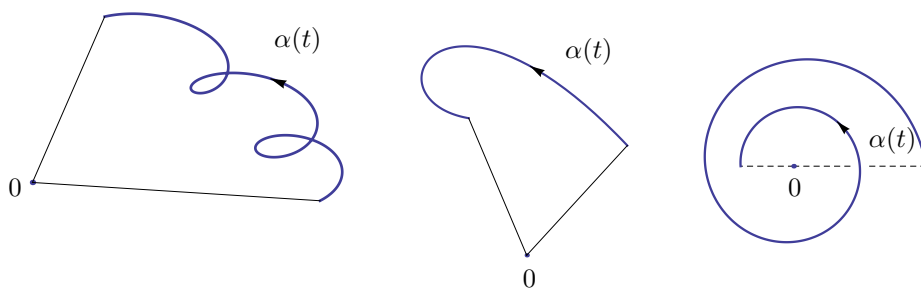
Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ una curva de clase \mathcal{C}^1 . Pretendemos calcular el área barrida por el segmento que une el origen con cada punto $\alpha(t)$ de nuestra curva, entre $t = t_0$ y $t = t_1$.



Aquí se está suponiendo que la curva α es tal que

$$D = \{s \alpha(t) : t \in]t_0, t_1[, s \in]0, 1[\},$$

es un dominio (con tres esquinas) al que se le aplica el teorema de la divergencia. No queremos



Situaciones a evitar.

Para asegurarnos que estas patologías no se dan, supondremos que, tras escribir α en coordenadas polares $\alpha = r(\cos \theta, \sin \theta)$, se cumple que

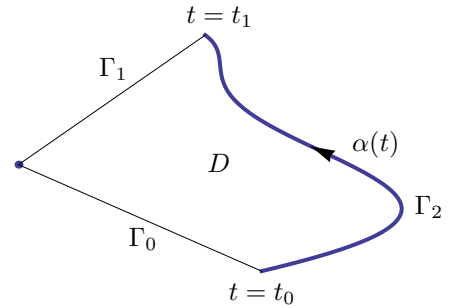
$$\dot{\theta} > 0 \text{ sobre } [t_0, t_1], \quad \theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi.$$

Para calcular el área de la región D usaremos el Teorema de la Divergencia. La frontera de D , tras quitar las esquinas 0 , $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$, queda dividida en tres componentes conexas:

$$\Gamma_0 := \{s\alpha(t_0) : 0 < s < 1\},$$

$$\Gamma_1 := \{s\alpha(t_1) : 0 < s < 1\},$$

$$\Gamma_2 := \{\alpha(t) : t_0 < t < t_1\}.$$



Denotemos por n al vector normal unitario exterior sobre la frontera de D . Observa que n está definido (de manera continua) sobre Γ_0 , Γ_1 y Γ_2 .

Además, sobre $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, n es ortogonal al vector de posición.

¿Qué sucede sobre Γ_2 ? Bueno, Γ_2 está parametrizada por la curva $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Observa que $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2)$ no se anula sobre $[t_0, t_1]$ (¿por qué?), y por tanto

$$\frac{1}{|\dot{\alpha}|}(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2)$$

es un vector unitario tangente a la curva en cada punto. Ahora, como vector unitario normal a nuestra curva pareciera que tenemos dos posibles elecciones:

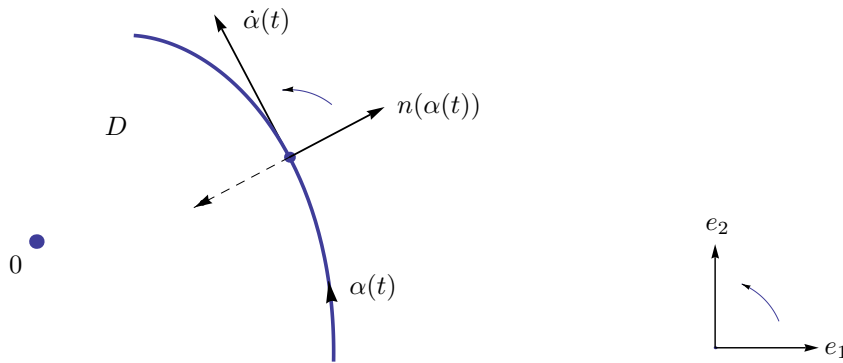
$$n_1(\alpha) = \frac{1}{|\dot{\alpha}|}(\dot{\alpha}_2, -\dot{\alpha}_1), \quad n_2(\alpha) = \frac{1}{|\dot{\alpha}|}(-\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_1),$$

pero una de ellas apunta hacia dentro de nuestro dominio D y la otra hacia fuera. Como nuestra curva α está orientada positivamente, (es decir, $\dot{\theta} > 0$), el vector normal exterior $n(\alpha)$ está determinado por el hecho de que la base de \mathbb{R}^2

$$\{n(\alpha), \dot{\alpha}\}$$

está orientada positivamente, y esto quiere decir que el vector normal unitario exterior no es n_2 , sino n_1 :

$$n(\alpha) = n_1(\alpha) = \frac{(\dot{\alpha}_2, -\dot{\alpha}_1)}{|\dot{\alpha}|}.$$



Si la curva está orientada positivamente, el vector normal exterior $n(\alpha(t))$ es tal que la base $\{n(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)\}$ está orientada positivamente.

Consideramos ahora el campo de vectores

$$V : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad V(x, y) = (x, y),$$

y aplicamos el Teorema de la Divergencia, para obtener

$$2 \text{área}(D) = 2 \int_D dx dy = \int_D (\text{div } V)(x, y) dx dy = \int_{\partial D} \langle V, n \rangle.$$

Ahora bien; como $\langle V, n \rangle \equiv 0$ sobre $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \langle V, n \rangle &= \int_{\Gamma_2} \langle V, n \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle V(\alpha(t)), n(t) \rangle |\dot{\alpha}(t)| dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{\alpha}_2(t) \alpha_1(t) - \dot{\alpha}_1(t) \alpha_2(t) \right] dt \end{aligned}$$

Vamos a reescribir de otra forma el término en la integral anterior. Para ello, recordamos que habíamos expresado nuestra curva $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ en coordenadas polares:

$$\alpha_1 = r \cos \theta, \quad \alpha_2 = r \sin \theta,$$

de donde deducimos que

$$\dot{\alpha}_2 \alpha_1 - \dot{\alpha}_1 \alpha_2 = r^2 \dot{\theta},$$

y, en consecuencia,

$$2 \text{área}(D) = \int_{t_0}^{t_1} r(t)^2 \dot{\theta}(t) dt.$$

Acabamos de demostrar la siguiente

Proposición 1.10.1. Sea $\alpha = r(\cos \theta, \sin \theta) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ una curva de clase \mathcal{C}^1 y tal que

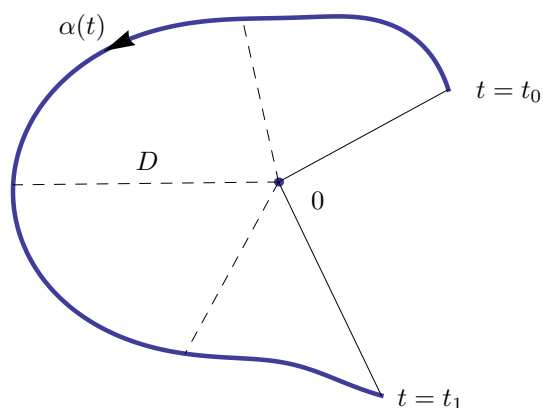
$$\dot{\theta} > 0 \text{ sobre } [t_0, t_1], \quad \theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi.$$

Entonces,

$$D = \left\{ s \alpha(t) : t \in]t_0, t_1[, s \in]0, 1[\right\},$$

es un dominio con área

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r(t)^2 \dot{\theta}(t) dt.$$



El área de la región D se puede calcular a partir del módulo y la velocidad angular.

Ejercicio. Sea $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\alpha = r(\cos \theta, \sin \theta)$, una curva de clase \mathcal{C}^1 , cerrada (esto es, $\alpha(0) = \alpha(T)$), y simple (es decir, $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ si $0 < |t - s| < p$). Supongamos además que la curva siempre gira en sentido positivo:

$$\dot{\theta} > 0 \text{ sobre } [0, T].$$

Prueba que el área de la región interior D determinada por esta curva está dada por

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\dot{\alpha}_2(t) \alpha_1(t) - \dot{\alpha}_1(t) \alpha_2(t) \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^T r(t)^2 \dot{\theta}(t) dt.$$

1.11. La segunda ley de Kepler

Consideremos ahora un movimiento $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en un campo de fuerzas centrales

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}.$$

Sabemos que el momento angular es constante:

$$c := x(t) \wedge \dot{x}(t), \quad t \in I.$$

Supongamos que

$$c \neq 0,$$

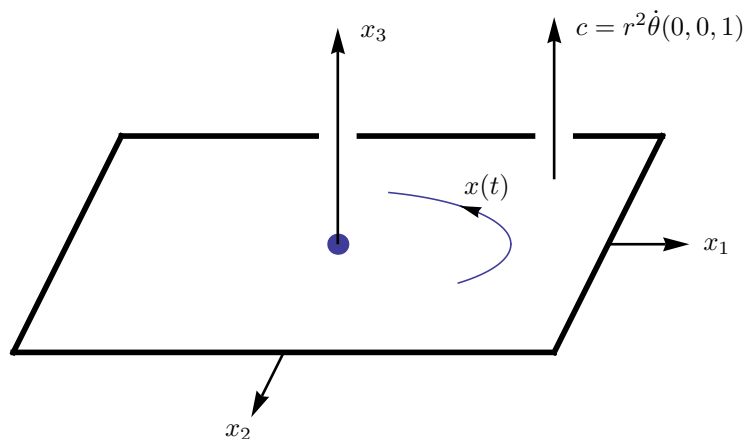
y expresemos $x = x(t)$ en coordenadas polares:

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)), \quad t \in I,$$

donde r, θ son funciones de clase C^2 . Reescribimos ahora el momento angular c en función de r y θ :

$$\begin{aligned} c &:= r(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) \wedge [\dot{r}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) + r\dot{\theta}(-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0)] = \\ &= r^2\dot{\theta}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) \wedge (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0) = r^2\dot{\theta}(0, 0, 1). \end{aligned}$$

En consecuencia, la conservación del momento angular se traduce en que la cantidad $r^2\dot{\theta}$, que en principio pareciera depender de t , es constante.



La función $t \mapsto r(t)^2\dot{\theta}(t)$ es constante.

A partir de ahora supondremos que $\dot{\theta} > 0$, pues de $c \neq 0$ se sigue $\dot{\theta} > 0$ o $\dot{\theta} < 0$ sobre I . En el segundo caso usaríamos la reversibilidad del tiempo y cambiaríamos $x(t)$ por $x(-t)$. Fijemos ahora instantes $t_0 < t_1 \in I$ con $\theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi$ y definamos

$$D_{t_0 t_1} := \left\{ s x(t) : t \in]t_0, t_1[, s \in]0, 1[\right\}.$$

En vista de la Proposición 1.10.1, tenemos que

$$\text{área}(D_{t_0 t_1}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} |c| dt = \frac{1}{2} |c| (t_1 - t_0).$$

Esta es la versión cuantitativa de la Segunda Ley de Kepler: el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Nota. Esta ley es válida en cualquier campo de fuerzas centrales

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\};$$

no hace falta que sea específicamente el campo gravitatorio Newtoniano $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$.

1.12. Momento angular cero y colisiones

Consideremos ahora un movimiento $x = x(t)$ en un campo de fuerzas centrales

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

con momento angular nulo:

$$c = 0.$$

Sabemos que x se mueve en una semirrecta:

$$x(t) = r(t)v,$$

donde $v \in \mathbb{R}^3$ es unitario,

$$|v| = 1,$$

y $r = r(t)$ es una función positiva. Observamos entonces que al ser x un movimiento, r debe ser una solución de la ecuación diferencial (en una variable)

$$\ddot{r} = f(r), \quad r > 0.$$

Supondremos que el campo es *atractivo*, esto es, que $f < 0$ sobre $]0, +\infty[$. Entonces r debe ser una función cóncava:

$$\ddot{r} < 0. \quad (*)$$

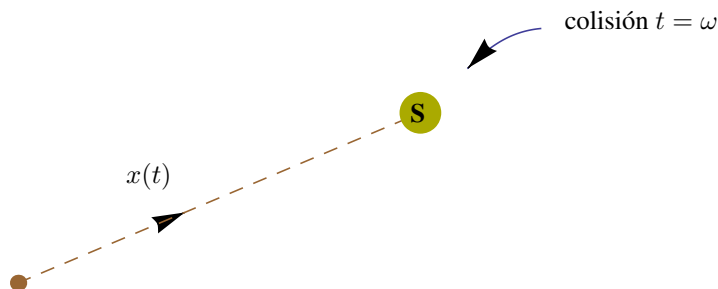
Además, supondremos en primer lugar que en el instante inicial \dot{r} se anula:

$$\dot{r}(0) = 0, \quad (**)$$

o lo que es igual, que $\dot{x}(0) = 0$, nuestra partícula parte del reposo (observa que este hecho ya implica que el momento angular del movimiento es nulo). Probaremos entonces que nuestra solución $r = r(t)$ está definida en un intervalo maximal a la derecha de la forma $[0, \omega[$ con

$$0 < \omega < +\infty ;$$

además, $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$ (la partícula colisiona con el Sol en $t = \omega$).



Si la partícula parte del reposo, después de un tiempo dado acaba colisionando con el Sol.

Demostración. Bueno, el hecho de que el intervalo maximal a la derecha de definición de r tenga la forma $[0, \omega[$ con $0 < \omega \leq +\infty$ es una consecuencia de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias; no olvidemos r es una solución de $\ddot{r} = f(r)$. Pero en principio podría suceder que $\omega = +\infty$. Vamos a ver que éste no es el caso, y para ello, razonamos por reducción al absurdo, y suponemos que r estuviera definida sobre $[0, +\infty[$. Comenzamos observando que, en virtud de (*), \dot{r} es estrictamente decreciente. Ahora, por (**), $\dot{r} < 0$ sobre $]0, +\infty[$; en particular, $k := \dot{r}(1) < 0$. Pero entonces, $\dot{r}(t) \leq k$ si $t \geq 1$, y deducimos que

$$r(t) = r(1) + \int_1^t \dot{r}(s) ds \leq r(1) + \int_1^t k ds = r(1) + k(t - 1), \quad t \geq 1,$$

de donde se sigue que $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = -\infty$, algo absurdo porque r es una función positiva.

Entonces, $\omega < +\infty$, y sólo falta probar que $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$. Para verlo, combinamos de nuevo (*) y (**), y deducimos que $\dot{r} < 0$ sobre $]0, \omega[$, así que r es decreciente en este intervalo. Como r es positiva, entonces está acotada cuando $t \rightarrow \omega$, y en consecuencia existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = l ;$$

además, este límite debe ser un número mayor o igual que cero. Razonamos por reducción al absurdo y suponemos que $l > 0$. Entonces, la función $t \mapsto f(r(t))$ admitiría una extensión continua sobre el intervalo cerrado $[0, \omega]$, y de la igualdad

$$\dot{r}(t) = \dot{r}(0) + \int_0^t \ddot{r}(s) ds = \int_0^t f(r(s)) ds, \quad 0 < t < \omega,$$

deducimos que existiría el límite $\lim_{t \rightarrow \omega} \dot{r}(t) = v$. Ahora el Teorema de Cauchy podría usarse para afirmar que el problema de valores iniciales

$$\ddot{r} = f(r), \quad r(\omega) = l, \quad \dot{r}(\omega) = v$$

tiene una solución definida, al menos, sobre un abierto $] \omega - \epsilon, \omega + \epsilon [$, contradiciendo la maximalidad del intervalo $[0, \omega [$.

En consecuencia, $l = 0$, que es lo que queríamos probar. \square

Acabamos de estudiar el comportamiento *en el futuro* de ciertos movimientos; sin embargo, la reversibilidad del tiempo puede usarse ahora para sustituir $x(t)$ por $x(-t)$ y obtener un resultado similar en el pasado. Además, como también ya sabemos, las transformaciones del tipo

$$x = x(t) \mapsto x_c = x_c(t) = x(t + c),$$

llevan soluciones en soluciones, así que no es importante que la velocidad de nuestra partícula se anule precisamente en el instante inicial $t = 0$. Llegamos de esta forma al siguiente resultado, que puede verse como una clasificación de los movimientos rectilíneos bajo un campo de fuerzas centrales

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

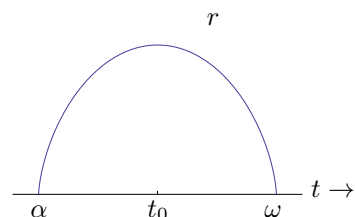
que se supone atractivo ($f < 0$).

Proposición 1.12.1. *Sea*

$$x = x(t) = r(t)v$$

un movimiento con momento angular $c = 0$, definido sobre un intervalo maximal $] \alpha, \omega [$. Entonces se da una de las siguientes tres posibilidades:

- $\square (i)$ $-\infty < \alpha < \omega < +\infty$,
 $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \omega} r(t)$,
 y existe un instante $t_0 \in] \alpha, \omega [$ tal que
 $\dot{r}(t) > 0$ si $\alpha < t < t_0$,
 $\dot{r}(t) < 0$ si $t_0 < t < \omega$.

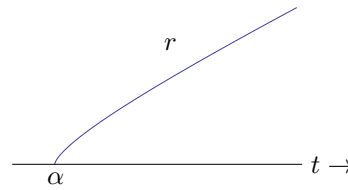


(ii) $-\infty < \alpha < \omega = +\infty,$

$\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0,$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty,$

y $\dot{r} > 0$ en $]\alpha, +\infty[.$

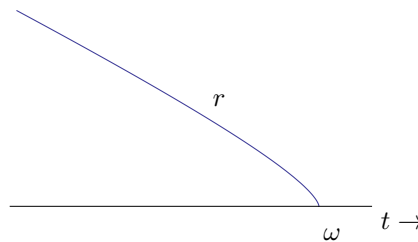


(iii) $-\infty = \alpha < \omega < +\infty,$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = +\infty,$

$\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0,$

y $\dot{r} < 0$ en $]-\infty, \omega[.$



Antes de abordar la demostración, enunciemos un hecho, que usaremos durante la misma, sobre funciones reales de una variable real que tienen límite en infinito:

Lema 1.12.2. Sea $r :]t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y supongamos que existe el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) \in \mathbb{R}$. Entonces existe una sucesión

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow +\infty$$

tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{r}(t_n) = 0$.

Ejercicio. Demuestra este resultado.

Ejercicio. Encuentra un contraejemplo que demuestre que, en general, las hipótesis anteriores **no** garantizan que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{r}(t) = 0.$$

Demostración de la Proposición 1.12.1. Si \dot{r} (o, equivalentemente, \dot{x}) se anula en algún punto, entonces estamos en el caso (i); esto se sigue de las discusiones anteriores. Supongamos pues que \dot{r} no se anula; entonces, usando la reversibilidad del tiempo podemos suponer que, de hecho, $\dot{r} > 0$ sobre $]\alpha, \omega[$. Veamos que estamos en el caso (ii).

Nuestro punto de partida será la siguiente observación: que el límite

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \dot{r}(t)$$

existe. En efecto, \dot{r} es una función decreciente y positiva, así que debe tener límite en $t = \omega$.

Comprobemos a continuación que $\omega = +\infty$. Para ello usamos un argumento de reducción al absurdo y suponemos que $\omega < +\infty$. Entonces \dot{r} puede extenderse a una función continua sobre $] \alpha, \omega]$. Fijemos un instante cualquiera $t_0 \in] \alpha, \omega [$ y usemos la regla de Barrow, para obtener

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{r}(s) ds, \quad t \in] \alpha, \omega [,$$

y de aquí se sigue que r tiene un límite cuando $t \rightarrow \omega$. Además, este límite es positivo, pues r es positiva y creciente. Un argumento usado con anterioridad, basado en el teorema de Cauchy para problemas de valores iniciales, diría entonces que nuestro intervalo maximal $] \alpha, \omega [$ en realidad puede extenderse por la derecha, una contradicción.

Esto prueba que $\omega = +\infty$. Veamos a continuación que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty.$$

De nuevo usamos un argumento de reducción al absurdo: como r es creciente, la otra posibilidad sería que existiera el límite $l := \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) \in] 0, +\infty [$. Entonces, usando el Lema 1.12.2, podemos elegir una sucesión $t_1 < t_2 < \dots < t_n \rightarrow +\infty$ con $\dot{r}(t_n) \rightarrow 0$.

Por otra parte, como f es continua en $] 0, +\infty [$, entonces también existirá el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{r}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(r(t)) = f(l) < 0$. Puesto que $t_n \rightarrow +\infty$, es posible elegir un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\ddot{r}(t) \leq f(l)/2$ si $t \geq t_{n_0}$. Deducimos que

$$\begin{aligned} \dot{r}(t_n) &= \dot{r}(t_{n_0}) + \int_{t_{n_0}}^{t_n} \ddot{r}(s) ds \leq \dot{r}(t_{n_0}) + \int_{t_{n_0}}^{t_n} \frac{f(l)}{2} dt = \\ &= \dot{r}(t_{n_0}) + \frac{f(l)}{2} (t_n - t_{n_0}), \end{aligned}$$

si $n \geq n_0$. Como $f(l) < 0$ se sigue de aquí que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{r}(t_n) = -\infty$, una contradicción porque este límite era cero. En consecuencia, $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty$.

Todavía falta demostrar que $\alpha > -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0$. Estos hechos son consecuencia de argumentos similares a los ya empleados y se proponen como ejercicio: \square

Ejercicio. Prueba, bajo las hipótesis que nos ocupan ($\dot{r} > 0$), que $\alpha > -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0$.

1.13. Potencial y conservación de la energía

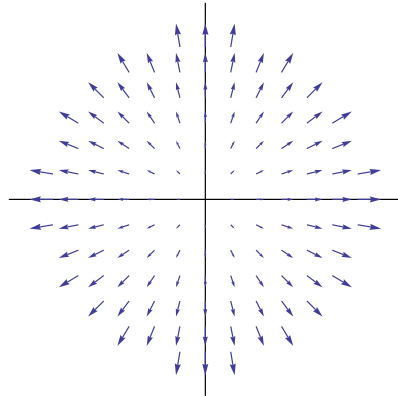
Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua (campo de vectores). Una función $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 se dirá un potencial para F si

$$F = -\nabla\mathcal{V} \text{ en } \Omega.$$

Los campos que admiten algún potencial se denominan *conservativos*.

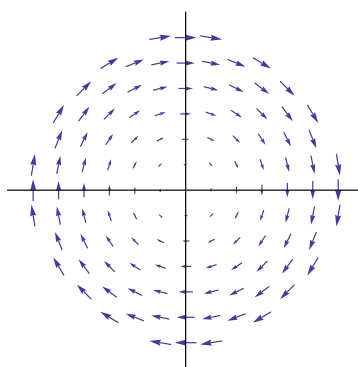
Ejemplos:

1. $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,



es conservativo, pues admite al potencial $\mathcal{V}(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$.

$$2. F(x_1, x_2) = (x_2, -x_1), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$



no es conservativo. En efecto: si \mathcal{V} fuese un potencial, entonces sería de clase C^∞ y, por el Teorema de Schwartz de las derivadas cruzadas,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x_2 \partial x_1},$$

pero

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} = -x_2, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2} = x_1,$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x_2 \partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x_1 \partial x_2} = 1.$$

3. *Los campos de fuerzas centrales siempre admiten potencial.* Consideremos un campo de fuerzas centrales cualquiera:

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|},$$

donde $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Sea $\Phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f , por ejemplo,

$$\Phi(r) := \int_1^r f(\rho) d\rho, \quad r > 0,$$

y $\mathcal{V}(x) = -\Phi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Entonces \mathcal{V} tiene clase C^1 y

$$\nabla \mathcal{V}(x) = -\Phi'(|x|) \nabla(|\cdot|)(x) = -f(|x|) \frac{x}{|x|} = -F(x), \quad x \neq 0.$$

Como ejemplo, tenemos el campo gravitatorio Newtoniano,

$$F(x) = -\frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

que se corresponde con la elección $f(r) = -\mu/r^2$. En este caso, $\Phi(r) = \mu/r$ y

$$\mathcal{V}(x) = -\frac{\mu}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

que recibe el nombre de *potencial Newtoniano*.

Observa que el potencial asociado a un campo conservativo no es único, pues es posible fabricar nuevos potenciales añadiendo una constante cualquiera a un potencial dado. Sin embargo, cuando el abierto Ω es conexo, todos los potenciales pueden obtenerse de esta forma.

Ejercicio. Supongamos que Ω es un abierto *conexo* y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo conservativo. Demuestra que cualesquiera dos potenciales $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ asociados a F difieren en una constante.

Consideremos ahora un campo $F : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ que admita un potencial $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = F(x), \quad x \in \Omega,$$

que, según la segunda ley de Newton, modela el movimiento de una partícula de masa $m = 1$. (Observa que, en realidad, basta estudiar este caso ‘especial’ puesto que $m\ddot{x} = F(x)$ puede reescribirse como $\ddot{x} = F(x)/m$). Dada una solución $x = x(t)$ de la ecuación definimos su energía total como

$$E = \frac{|\dot{x}(t)|^2}{2} + \mathcal{V}(x(t)).$$

En principio pareciera que esta cantidad depende de t , pero vamos a ver que no. Como x es de clase \mathcal{C}^2 , podemos derivar en la expresión de E para obtener:

$$\frac{dE}{dt} = \langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle + \langle \nabla \mathcal{V}(x), \dot{x} \rangle = \langle F(x), \dot{x} \rangle + \langle \nabla \mathcal{V}(x), \dot{x} \rangle = 0.$$

Ejercicio. Como ya sabemos, dado un campo de fuerzas centrales cualquiera $\ddot{x} = f(|x|)x/|x|$ y una solución $x = x(t)$, es posible obtener otras soluciones cambiando el tiempo de inicio o de sentido, o permitiendo actuar a una isometría lineal. Compara las energías de estos movimientos.

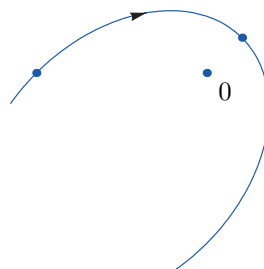
Ejemplo. El campo gravitatorio Newtoniano.

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Si $x = x(t)$ es un movimiento, entonces $E = \frac{|\dot{x}(t)|^2}{2} - \frac{\mu}{|x(t)|}$ es constante (no depende de t).

lejos del Sol

$\Rightarrow \frac{\mu}{|x(t)|}$ pequeño
 \Rightarrow energía cinética $\approx E$
 \Rightarrow planeta más lento



cerca del Sol

$\Rightarrow \frac{\mu}{|x(t)|}$ grande
 \Rightarrow energía cinética grande
 \Rightarrow planeta veloz

Aplicación 1.13.1 (Clasificación de los movimientos rectilíneos en función de la energía). Consideramos de nuevo el campo gravitatorio Newtoniano,

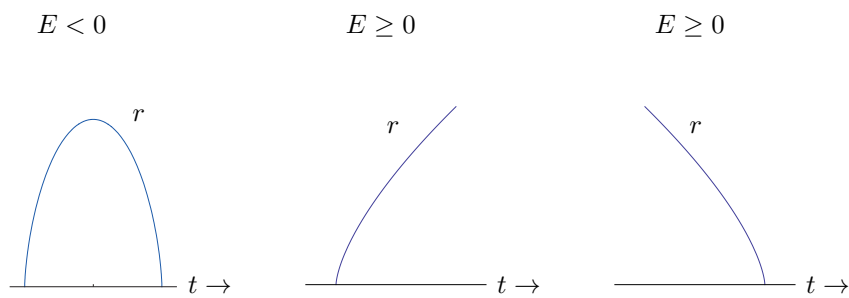
$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

y sea $x = x(t) = r(t)v$ un movimiento *rectilíneo* (suponemos, como otras veces, $r > 0$ y $|v| = 1$). Denotamos por $] \alpha, \omega [$ al intervalo maximal donde x está definido; entonces, como ya sabemos, x puede clasificarse en tres grupos según su comportamiento (ver página 26). Ahora podemos relacionar estos comportamientos con la energía $E = \frac{|\dot{x}(t)|^2}{2} - \frac{\mu}{|x(t)|} = \frac{\dot{r}(t)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t)}$ asociada a nuestra solución:

- $E < 0$ si y sólo si r pasa de creciente a decreciente.
- $E \geq 0$ si y sólo si r es monótona.

Demostración. Basta con comprobar las implicaciones (\Leftrightarrow). Observamos entonces que, si r es primero creciente y después decreciente, entonces su derivada debe anularse en algún instante t_0 , y, en consecuencia

$$E = \frac{\dot{r}(t_0)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t_0)} = -\frac{\mu}{r(t_0)} < 0.$$



Por otra parte, si r es estrictamente monótona entonces no está acotada, y de la desigualdad

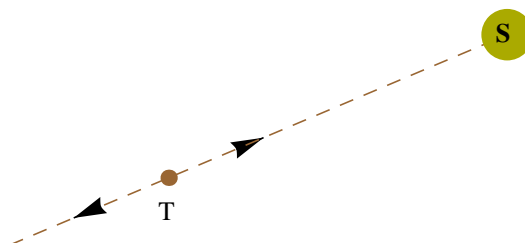
$$E = \frac{\dot{r}(t)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t)} \geq -\frac{\mu}{r(t)}, \quad t \in]\alpha, \omega[,$$

deducimos que $E \geq 0$.

□

1.14. Ejercicios

1.1 (*Un teorema falso de la Mecánica Celeste*). En la revista ‘Computers and Post-Modern Thought’ ha aparecido un artículo que ha causado algún revuelo. Se postula que la Tierra no orbita alrededor del Sol y que, por el contrario, sigue un movimiento rectilíneo.

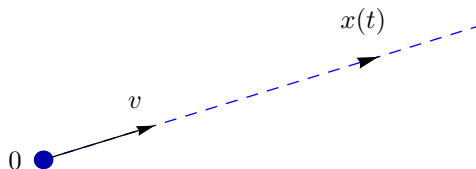


A continuación se discute si nos dirigimos a una permanente era glacial o a un ardiente verano que anticipa el colapso final, pero este aspecto de la discusión es puramente especulativo. A continuación vamos a fundamentar matemáticamente el principal aserto del trabajo aparecido en *CP-Mt*.

Supondremos el Sol en el origen; en consecuencia, la Tierra describirá una trayectoria regular $x = x(t)$.

Teorema 1.14.1. Sea $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de clase \mathcal{C}^1 . Entonces existe un vector $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$, tal que

$$x(t) = |x(t)|v \quad t \in I.$$



Demostración. La curva $x/|x|$ es de clase \mathcal{C}^1 , y su derivada se puede calcular fácilmente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{|x(t)|} \right) = \frac{|x|^2 \dot{x} - \langle x, \dot{x} \rangle x}{|x|^3}.$$

Usamos ahora la igualdad

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u,$$

válida para cualesquiera vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, y deducimos que

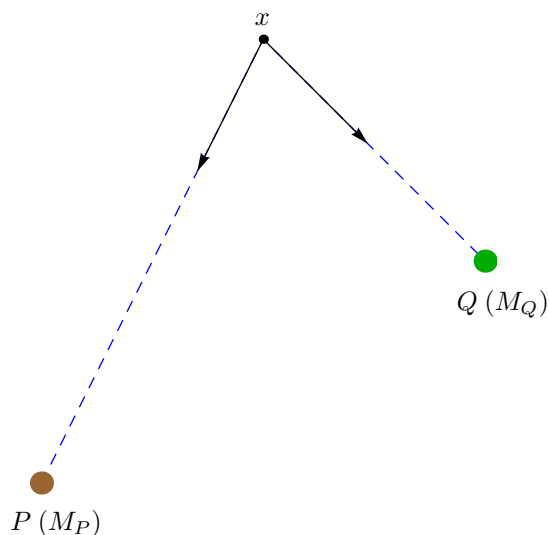
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{|x(t)|} \right) &= \frac{1}{|x|^3} [(x \wedge \dot{x}) \wedge x] = \frac{1}{|x|^3} [-(\dot{x} \wedge x) \wedge x] = \\ &= \frac{1}{|x|^3} [-\dot{x} \wedge (x \wedge x)] = \frac{1}{|x|^3} [-\dot{x} \wedge 0] = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que existe un vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{x(t)}{|x(t)|} = v \quad \forall t \in I,$$

y es claro que $|v| = 1$. □

1.2 (Otro teorema falso de la Mecánica Celeste). Euler consideró el problema de atracción gravitatoria creada por dos masas fijas



Este problema no es aplicable al universo real, ya que las masas P y Q deberían moverse a causa de la atracción mutua; de todos modos, su tradición y su encanto analítico hacen que valga la pena considerarlo. Suponemos $Q = -P$ y $M_P = M_Q = M$. Las ecuaciones son:

$$\ddot{x} = \frac{MG(P-x)}{|P-x|^3} + \frac{MG(Q-x)}{|Q-x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{P, Q\}.$$

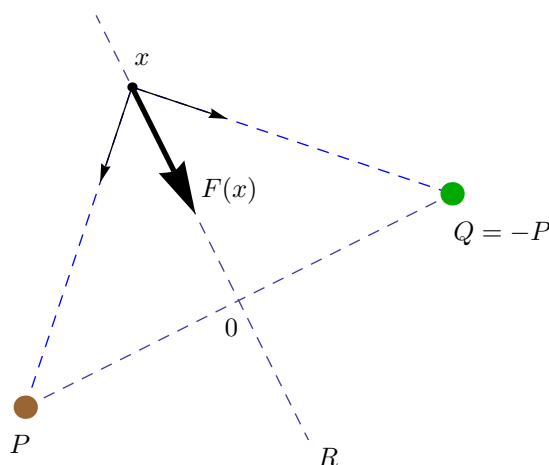
Estudiemos ahora cómo varía el momento angular a lo largo de las soluciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(x \wedge \dot{x}) &= x \wedge \ddot{x} = x \wedge \frac{MG(P-x)}{|P-x|^3} + x \wedge \frac{MG(Q-x)}{|Q-x|^3} = \\
 &= \frac{MG}{|P-x|^3} [x \wedge P - x \wedge x] + \frac{MG}{|Q-x|^3} [x \wedge Q - x \wedge x] = \\
 &= MG \left[\frac{1}{|P-x|^3} - \frac{1}{|P+x|^3} \right] x \wedge P
 \end{aligned}$$

Se sigue de aquí el siguiente resultado:

Si el movimiento no se efectúa en la recta que une P y Q , el momento angular no es constante, y por tanto la partícula no puede permanecer en una recta.

Llamemos ahora R a la recta que pasa por el origen y es perpendicular al segmento que une los puntos P y Q :



Los puntos x de R cumplen que $|x - P| = |x - Q|$; usa este hecho para probar que la fuerza resultante $F(x)$ que actúa sobre la partícula tiene la dirección de R . Demuestra finalmente que, si tanto la posición inicial como la velocidad inicial de nuestra partícula se encuentran sobre R , entonces el movimiento se produce sobre la recta R .

¿Dónde está el error?

1.3 Demuestra que $x(t) = (\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2))$ no puede ser solución de ninguna ecuación del tipo

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

con $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua.

1.4 Se considera la curva parametrizada

$$\alpha(t) = (t^3 \cos(t^{1/3}), t^3 \operatorname{sen}(t^{1/3})), \quad t \in \mathbb{R}.$$

¿Es α de clase \mathcal{C}^1 ? ¿Es posible encontrar una función $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $\alpha(t) = |\alpha(t)|(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))$?

1.5 Sea $x = x(t)$ una solución de

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Decide en cada caso si $Ax(t)$ también es solución:

$$(i) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(iii) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (iv) A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1.6 Se considera la curva $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$, definida por

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}, \quad \alpha_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Estudia la regularidad de α . ¿Existe una función $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\alpha(t) = |\alpha(t)|(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))$?

1.7 Calcula el área de la región barrida por el segmento que une el origen con cada punto de la curva

$$\alpha(t) = e^t(\cos t, \operatorname{sen} t),$$

entre $t_0 = 0$ y $t_1 = \pi$. Misma pregunta para $t_0 = 0$ y $t_1 = 3\pi$.

1.8 Se considera la ecuación

$$\ddot{x} = -|x|^3 x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Enuncia el teorema de conservación de la energía para esta ecuación. ¿Pueden escapar las trayectorias a infinito?

1.9 Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$ dos movimientos en el campo gravitatorio Newtoniano

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

que cumplen $x(t) = Ry(t)$ para cierta matriz $R \in \mathcal{O}(3)$.

¿Tienen x e y la misma energía? ¿Qué relación hay entre los momentos angulares?

1.10 Enuncia el teorema de conservación de la energía para la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^{1/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Sea ahora $x = x(t)$ una solución con momento angular nulo que colisiona ($x(t) \rightarrow 0$ si $t \uparrow \omega$, $\omega < +\infty$). Demuestra que $\lim_{t \rightarrow \omega} |\dot{x}(t)|$ existe y es finito.

1.11 En el plano \mathbb{C} se han fijado tres soles de igual masa y situados sobre los puntos

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad C = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Escribe las ecuaciones de un planeta sometido a sus atracciones. ¿Qué impide que este modelo pueda aparecer en el universo real?

1.12 Describe topológicamente los niveles de energía en el problema de Kepler

$$E_h = \left\{ (x, v) \in (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^d : \frac{1}{2}|v|^2 - \frac{1}{|x|} = h \right\},$$

con $d = 2, 3$.

1.13 De un movimiento $x = x(t)$ en el campo de fuerzas centrales

$$\ddot{x} = -\frac{2x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

se sabe que $x(3) = (0, 1, 2)$ y $\dot{x}(3) = (0, 2, 4)$. Clasifica este movimiento.

Lección 2

Trayectorias Newtonianas no rectilíneas. Las otras dos leyes de Kepler.

2.1. Introducción

En esta lección estudiaremos en detalle los movimientos con momento angular no nulo bajo la acción de la gravedad Newtoniana. Aparte de demostrar la primera y tercera leyes de Kepler, aprenderemos, por ejemplo, a clasificar las orbitas usando la energía y a calcular la posición de un planeta en función del tiempo, y entenderemos por qué Newton dijo que la fuerza con que se atraen dos masas es inversamente proporcional al *cuadrado* de la distancia que las separa. Concluiremos estableciendo qué elementos hacen falta para determinar una órbita en el espacio. Y por el camino, aprenderemos muchas cosas sobre cónicas...

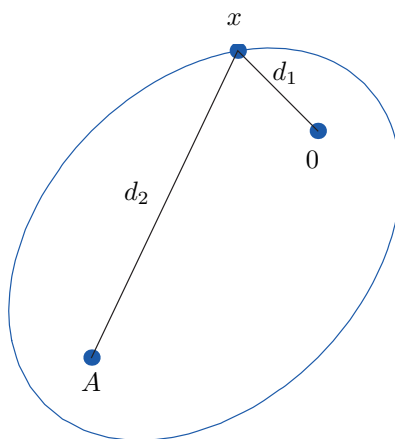
Nuestro primer objetivo será establecer la primera ley de Kepler: los movimientos con momento angular no nulo en un campo gravitatorio Newtoniano viven sobre cónicas con un foco en el origen. Con este fin será conveniente encontrar una descripción matemática sencilla de estas cónicas.

2.2. La ecuación de una cónica con un foco en el origen

Es bien sabido que las cónicas del plano pueden escribirse como el conjunto de ceros $p(x, y) = 0$ de un polinomio de segundo grado $p \in \mathbb{P}_2[x, y]$. De esta manera podemos describir *todas* las cónicas, independientemente de dónde tienen los focos. También obtenemos así cónicas degeneradas, tales como $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$...

Nos disponemos ahora a encontrar una manera de describir las cónicas (no degeneradas) con un foco en el origen.

I. Elipse



Una elipse es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos dados (llamados focos) es constante.

$$A, 0 \text{ focos,} \quad d_1 + d_2 = c > 0.$$

$$|x| + |A - x| = c, \quad |A - x| = c - |x|,$$

$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2, \quad |A|^2 + |x|^2 - 2\langle A, x \rangle = c^2 + |x|^2 - 2c|x|,$$

$$|x| + \left\langle -\frac{1}{c}A, x \right\rangle = \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \quad (*)$$

$$\text{Definimos } e := -\frac{1}{c}A, \quad k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}.$$

Por la desigualdad triangular, $|A| < |x| + |A - x| = c$, y deducimos que

$$|e| < 1, \quad k > 0,$$

y (*) se reescribe como

$$|x| + \langle e, x \rangle = k.$$

Ésta es la ecuación que describe las elipses con un foco en el origen.

Conviene observar que esto se debe a que el proceso de cálculo anterior es reversible, es decir, que de $|x| + \langle e, x \rangle = k$ podemos recuperar la ecuación inicial $|x| + |A - x| = c$. Hay un paso delicado:

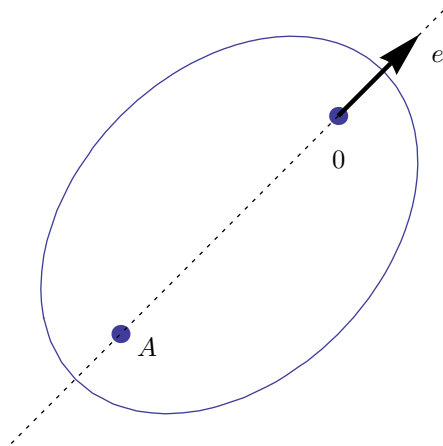
$$|A - x|^2 = (c - |x|)^2 \rightsquigarrow |A - x| = c - |x|.$$

Bueno, como $c > |A|$, si $|x - A| = -(c - |x|)$, entonces

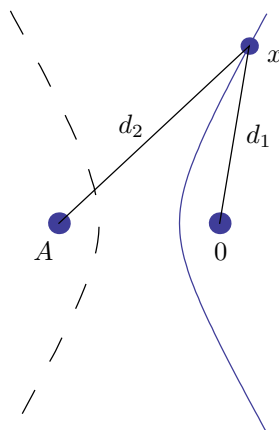
$$|x| - c < |x| - |A| \leq |x - A| = |x| - c,$$

una contradicción.

También es interesante observar que el vector e tiene la misma dirección que el foco A y sentido opuesto



2. Hipérbola



Describimos la rama de la hipérbola más próxima al origen.

$$A, 0 \text{ focos,} \quad d_2 - d_1 = c > 0.$$

$$|x - A| - |x| = c, \quad |x - A| = c + |x|,$$

$$|x - A|^2 = (c + |x|)^2, \quad |x|^2 + |A|^2 - 2\langle A, x \rangle = c^2 + |x|^2 + 2c|x|,$$

$$|x| + \left\langle \frac{1}{c} A, x \right\rangle = \frac{|A|^2 - c^2}{2c},$$

y llegamos de nuevo a la ecuación

$$|x| + \langle e, x \rangle = k,$$

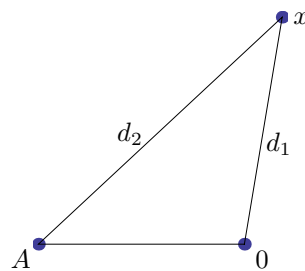
$$\text{siendo } e = \frac{1}{c} A, \quad k = \frac{|A|^2 - c^2}{2c}.$$

Por la desigualdad triangular,

$$d_2 < |A| + d_1 \Rightarrow c = d_2 - d_1 < |A|,$$

y en consecuencia, la constante k es positiva (como en el caso de la elipse), pero ahora

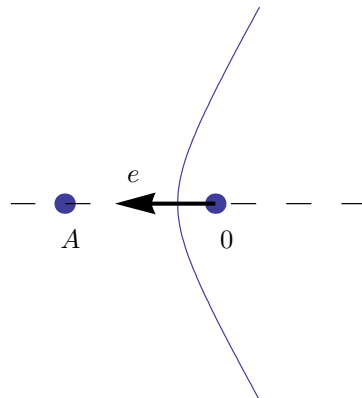
$$|e| > 1.$$



Observamos de nuevo que el cálculo es reversible. El paso delicado

$$|A - x|^2 = (c + |x|)^2 \rightsquigarrow |A - x| = c + |x|,$$

se justifica teniendo en cuenta que ambas cantidades, $|A - x|$ y $c + |x|$ tienen signo positivo. El vector e tiene ahora la dirección y sentido del foco A :

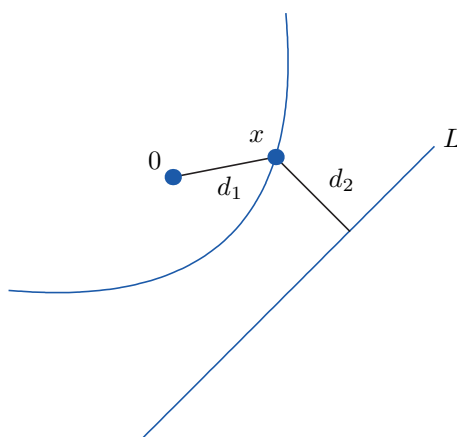


Ejercicio. La otra rama de la hipérbola está definida de manera implícita por $d_1 - d_2 = c$. Prueba que esta ecuación puede escribirse de manera equivalente de la forma

$$|x| + \langle -e, x \rangle = -k,$$

donde e y k son las mismas constantes que nos aparecieron al describir la rama más próxima al origen.

3. Parábola

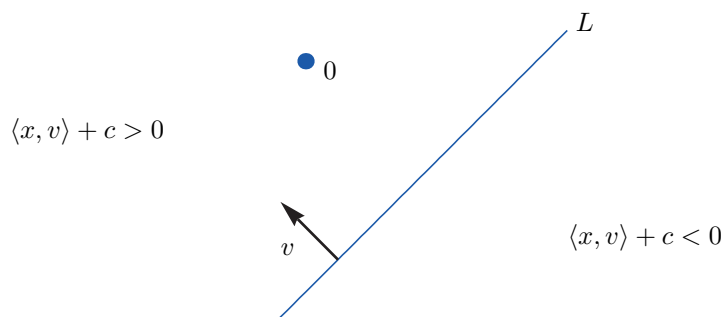


Una parábola es el lugar geométrico de puntos del plano cuya distancia al foco y a la recta directriz coincide

$$0 \text{ foco, } L \text{ recta directriz, } d_1 = d_2.$$

Escogemos un vector normal a L que sea unitario, $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$, $v \perp L$. Hay dos posibilidades, pero escogemos aquella que hace que la ecuación de la recta directriz se escriba como

$$\langle x, v \rangle + c = 0 \quad \text{con } c > 0.$$



De la fórmula de la distancia de un punto a una recta,

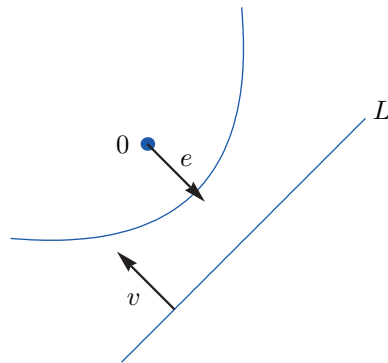
$$\text{dist}(p, L) = \begin{cases} \langle p, v \rangle + c & \text{si } p \text{ está en el semiplano que contiene a } 0. \\ -\langle p, v \rangle - c & \text{si } p \text{ está en el otro semiplano.} \end{cases}$$

$$d_1 = d_2 \rightsquigarrow |x| = \langle x, v \rangle + c,$$

y tomando $e = -v \in \mathbb{R}^2$, $k = c$, llegamos a la ecuación

$$|x| + \langle x, e \rangle = k.$$

Es conveniente observar que, como en las ocasiones anteriores, $k > 0$. La diferencia está en que, ahora, $|e| = 1$. El vector e tiene la dirección de v y sentido opuesto.

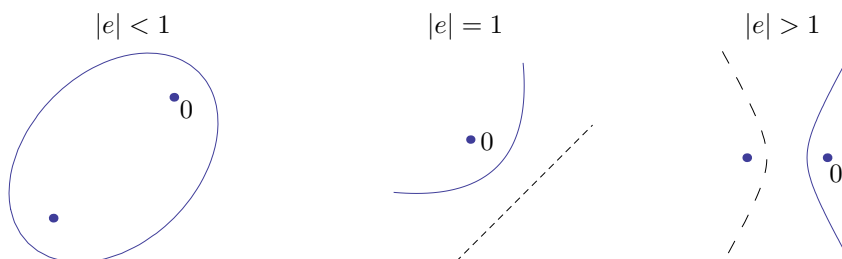


Resumiendo, la ecuación

$$|x| + \langle x, e \rangle = k, \quad e \in \mathbb{R}^2, k > 0,$$

describe

- todas las elipses con un foco en el origen si $|e| < 1$,
- todas las ramas de hipérbola con foco más próximo en el origen si $|e| > 1$,
- todas las parábolas con foco en el origen si $|e| = 1$.



2.3. La primera ley de Kepler

En este punto nos dirigimos a probar la primera ley de Kepler, la que afirmaba que los planetas se mueven en elipses ocupando el Sol uno de los focos. Bueno, en realidad no es ésta la única trayectoria posible para una partícula que se mueva bajo la atracción de un Sol fijo (tampoco entre las de momento angular $c \neq 0$), pues, como veremos, otras posibilidades son las parábolas y las hipérbolas. De manera más precisa, probaremos el siguiente:

Teorema 2.3.1. *Sea $x = x(t)$, $t \in I$, un movimiento en un campo gravitatorio Newtoniano:*

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (K)$$

con momento angular $c \neq 0$. Entonces x se mueve en una cónica (elipse, parábola o hipérbola) con un foco en el origen.

Demostraremos este resultado a partir de un lema sencillo, que establece dos igualdades que relacionan el producto vectorial y el producto escalar en \mathbb{R}^3 .

Lema 2.3.2. *Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Entonces:*

- (i) $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$.
- (ii) $\langle u \wedge v, w \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle$.

Ejercicio. Prueba estas igualdades.

Indicación: Para probar (i), distingue dos casos, según u y v sean linealmente independientes o no. Suponiendo que lo sean, distingue también dos casos, según w pertenezca al plano generado por los vectores u y v , o sea perpendicular al mismo. Razona finalmente que las posibilidades restantes son consecuencia de éstas.

La igualdad (ii) se sigue de nuestra definición de producto vectorial.

Demostración del Teorema 2.3.1. Partimos de la igualdad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{\dot{x}|x|^2 - \langle \dot{x}, x \rangle x}{|x|^3} = \frac{1}{|x|^3} [(x \wedge \dot{x}) \wedge x],$$

válida para cualquier curva x de clase \mathcal{C}^1 que no se anule sobre su dominio, la segunda igualdad se sigue del Lema 2.3.2(i). Multiplicamos los términos izquierdo y derecho de la igualdad anterior por μ y usamos que x cumple (K), y obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\mu \frac{x}{|x|} \right) = - \left[(x \wedge \dot{x}) \wedge \frac{-\mu x}{|x|^3} \right] = -c \wedge \ddot{x} = \frac{d}{dt} (-c \wedge \dot{x}).$$

Aquí se ha empleado la conservación del momento angular. De los lados izquierdo y derecho de la igualdad anterior deducimos que

$$\mu \left[\frac{x(t)}{|x(t)|} + e \right] = -c \wedge \dot{x}(t), \quad t \in I, \quad (*)$$

donde $e \in \mathbb{R}^2$ es un vector constante.

Multiplicamos ahora por $x(t)$ y obtenemos

$$\mu \left[\left\langle \frac{x(t)}{|x(t)|}, x(t) \right\rangle + \langle e, x(t) \rangle \right] = -\langle c \wedge \dot{x}(t), x(t) \rangle, \quad t \in I,$$

y, usando el Lema 2.3.2 (ii) concluimos que

$$\mu \left[\left\langle \frac{x(t)}{|x(t)|}, x(t) \right\rangle + \langle e, x(t) \rangle \right] = -\langle c, \dot{x}(t) \wedge x(t) \rangle = |c|^2, \quad t \in I,$$

y por tanto,

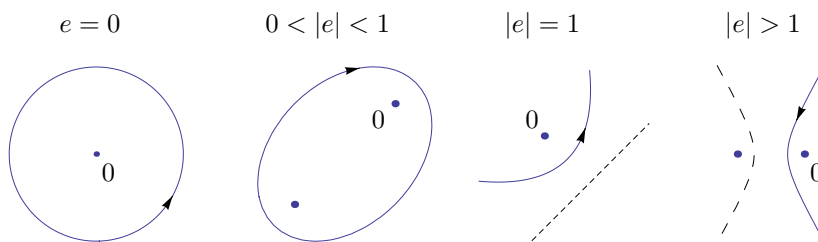
$$|x(t)| + \langle e, x(t) \rangle = \frac{|c|^2}{\mu}, \quad t \in I,$$

así que nuestro movimiento $x = x(t)$ vive en una cónica con un foco en el origen. \square

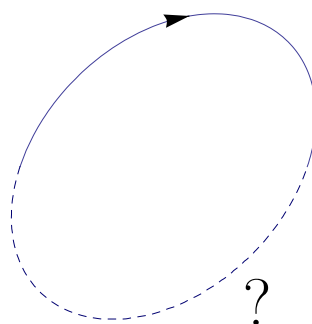
El vector e recibe el nombre de *eje de excentricidad*, y es una constante del movimiento; de hecho, podemos despejarlo en la ecuación (*) para obtener

$$e = \frac{1}{\mu} \dot{x}(t) \wedge c - \frac{x(t)}{|x(t)|}, \quad t \in I \text{ cualquiera.}$$

Si $e = 0$ se trata de un movimiento circular, si $|e| < 1$ el movimiento se produce en una elipse, si $|e| = 1$ en una parábola, y si $|e| > 1$, en una rama de hipérbola con foco más próximo en el origen.



Observación: No hemos probado todavía que la solución recorra *toda* la cónica; en este momento no podemos descartar que el planeta recorra sólo un arco. Éste hecho lo trataremos más adelante.



2.4. Clasificación de las órbitas a partir de la energía

Sabemos ya clasificar las órbitas no rectilíneas en términos del eje de excentricidad e :

- $|e| < 1$ movimiento elíptico
- $|e| = 1$ movimiento parabólico
- $|e| > 1$ movimiento hiperbólico.

Es costumbre clasificarlas en términos de la energía

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{\mu}{|x(t)|}.$$

Para ello debemos ligar h y e . Partimos de la identidad que denotamos (*) en la página 46,

$$\mu \left[\frac{x}{|x|} + e \right] = -c \wedge \dot{x}$$

y tomamos normas

$$\mu^2 \left| \frac{x(t)}{|x(t)|} + e \right|^2 = |c \wedge \dot{x}|^2.$$

Observamos que, como c y \dot{x} son perpendiculares,

$$|c \wedge \dot{x}| = |c||\dot{x}|,$$

de donde

$$\mu^2 \left[\frac{|x|^2}{|x|^2} + |e|^2 + 2 \left\langle e, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right] = |c|^2 |\dot{x}|^2,$$

o, lo que es igual,

$$\mu^2 \left[1 + |e|^2 + 2 \left\langle e, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right] = |c|^2 |\dot{x}|^2.$$

En el lado izquierdo de la igualdad usamos que $|x| + \langle e, x \rangle = |c|^2/\mu$, en el lado derecho usamos que $|\dot{x}|^2/2 - \mu/|x| = h$, y concluimos

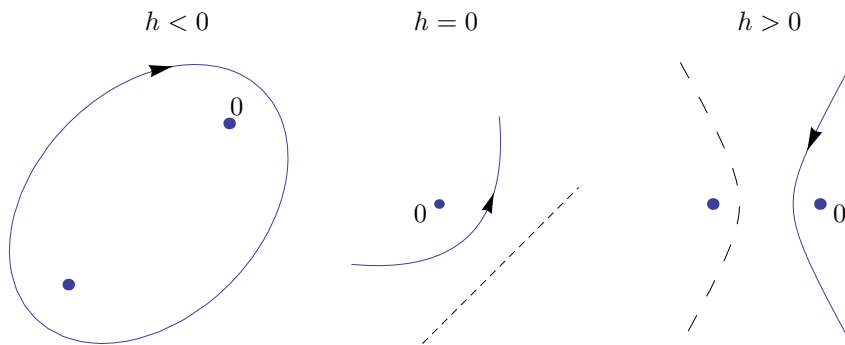
$$\mu^2 \left[1 + |e|^2 + \frac{2|c|^2}{\mu|x|} - 2 \right] = |c|^2 \left(2h + 2\frac{\mu}{|x|} \right),$$

es decir,

$$\mu^2 [|e|^2 - 1] = 2h|c|^2.$$

Como estamos suponiendo que el movimiento no es rectilíneo, $c \neq 0$, y deducimos que

- $h < 0 \Leftrightarrow |e| < 1$ (movimiento elíptico),
- $h = 0 \Leftrightarrow |e| = 1$ (movimiento parabólico),
- $h > 0 \Leftrightarrow |e| > 1$ (movimiento hiperbólico).



2.5. Soluciones globales del problema de Kepler

Sea $x = x(t)$ un movimiento bajo un campo gravitatorio Newtoniano

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

con momento angular $c \neq 0$. En esta sección queremos probar que el dominio maximal de x es $]-\infty, +\infty[$, es decir, toda la recta real (el movimiento está definido para todo tiempo).

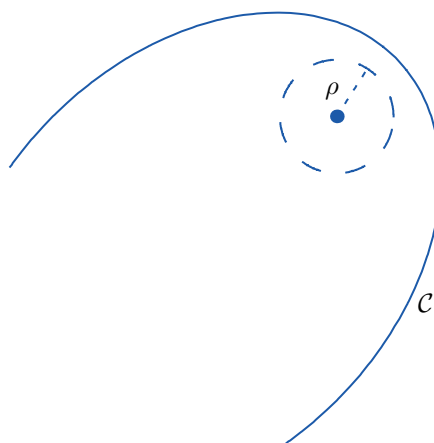
Para la demostración necesitaremos de un hecho geométrico y otro analítico.

1. Dada una cónica

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| + \langle e, x \rangle = k\},$$

la distancia de sus puntos al foco 0 es uniformemente positiva. Es decir, que existe un número $\rho > 0$, que sólo depende de e y k , tal que

$$|x| \geq \rho \text{ si } x \in \mathcal{C}.$$



Demostración. La cónica \mathcal{C} es cerrada, luego su complementario $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ es abierto. Puesto que $0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$, deberá existir una bola abierta $B_\rho(0)$ que no corte a \mathcal{C} . \square

Ejercicio. La anterior demostración no sirve para estimar ρ a partir de e y k . ¿Podrías encontrar una estimación tú?

2. Consideramos la ecuación diferencial $\dot{X} = F(X)$, donde $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ es continua y $D \subset \mathbb{R}^d$ es abierto. Si una solución maximal $X = X(t)$, $t \in]\alpha, \omega[$ cumple $\omega < +\infty$, entonces se cumple alguna de las alternativas siguientes:

- (i) $|X(t)| \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow \omega$.
- (ii) Existe una sucesión $t_n \rightarrow \omega$ tal que $\text{dist}(X(t_n), \partial D) \rightarrow 0$.

Este segundo resultado lo estudiaste en la asignatura de ecuaciones diferenciales. Para aplicarlo en nuestro ambiente, necesitamos pasar la ecuación de un campo gravitatorio Newtoniano a un sistema de primer orden

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x \rightsquigarrow \dot{x} = v, \dot{v} = -\frac{\mu}{|x|^3}x.$$

Definimos como nueva variable $X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, y consideramos la aplicación

$$F \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ -(\mu/|x|^3)x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \in D,$$

donde $D = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$. De esta manera nuestro sistema

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (*)$$

se reescribe como

$$\dot{X} = F(X).$$

Observamos además que D es abierto y $\partial D = \{0\} \times \mathbb{R}^2$ (demuéstralo).

Sea ahora $x = x(t)$ una solución de (*), que suponemos definida sobre un intervalo maximal $] \alpha, \omega[\neq \mathbb{R}$. Tras cambiar, si fuese necesario, el sentido del tiempo, podemos suponer que $\omega < +\infty$. Se cumplirá una de las siguientes posibilidades

- (i) $|x(t)| + |\dot{x}(t)| \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow \omega$.
- (ii) Existe una sucesión $t_n \rightarrow \omega$ tal que $x(t_n) \rightarrow 0$.

Tenemos que comprobar que si el momento angular es no nulo, entonces no se puede cumplir ninguna de estas condiciones. En efecto, x vive en una cónica con un foco en el origen, y en consecuencia, existe un número $\rho > 0$ tal que $|x(t)| \geq \rho$ para todo $t \in] \alpha, \omega[$. Esto excluye la posibilidad de (ii).

Además, la desigualdad $|x(t)| \geq \rho$ también implica que

$$|\ddot{x}(t)| = \left| \frac{-\mu x(t)}{|x(t)|^3} \right| = \frac{\mu}{|x(t)|^2} \leq \frac{\mu}{\rho^2} := C, \quad t \in] \alpha, \omega[,$$

es decir, que \ddot{x} está acotada. Comprobemos a continuación que esto implica la acotación de x y \dot{x} , excluyendo también la posibilidad (i). En efecto, fijemos un instante

cualquiera $t_0 \in]\alpha, \omega[$. De la regla de Barrow y la desigualdad triangular se sigue que, para $t_0 < t < \omega$,

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leq |\dot{x}(t_0)| + \int_{t_0}^t |\ddot{x}(s)| ds \leq |\dot{x}(t_0)| + C(t - t_0) \leq \\ &\leq |\dot{x}(t_0)| + C(\omega - t_0) := C_1, \end{aligned}$$

así que \dot{x} está acotada sobre $]t_0, \omega[$. Repetimos la jugada para probar que también x lo está:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |\dot{x}(s)| ds \leq |x(t_0)| + C_1(t - t_0) \leq \\ &\leq |x(t_0)| + C_1(\omega - t_0) := C_2, \end{aligned}$$

así que tampoco la posibilidad (i) puede darse. Esta contradicción se debe a que hemos supuesto que el intervalo maximal de definición de nuestra solución no era toda la recta real.

2.6. La ecuación de una elipse en polares. Excentricidad

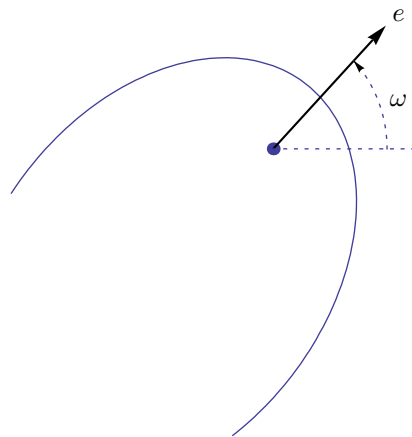
Volvamos a la ecuación cartesiana de una cónica con un foco en el origen

$$|x| + \langle x, e \rangle = k, \quad (*)$$

donde $e \in \mathbb{R}^2$ es el eje de excentricidad y $k > 0$ es una constante positiva. Escribimos

$$e = \varepsilon(\cos \omega, \sin \omega),$$

donde $\varepsilon = |e| \geq 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$.



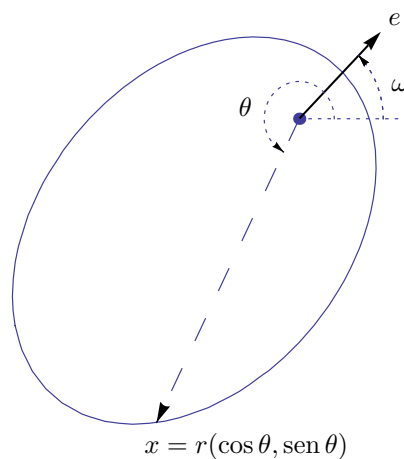
El número ε suele llamarse la *excentricidad* de la cónica, mientras que ω es el *argumento del pericentro*. En el caso de las elipses, $\varepsilon < 1$, si $\varepsilon = 1$ estamos ante una parábola, y las excentricidades $\varepsilon > 1$ se corresponden con hipérbolas. El argumento del pericentro ω está definido salvo un múltiplo entero de 2π ; bueno, excepto en el caso de las circunferencias, en que $e = 0$, y entonces $\varepsilon = 0$ y ω no está definido.

Expresemos también un punto arbitrario $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en coordenadas polares, $x = r(\cos \theta, \text{sen } \theta)$. Sustituyendo en la ecuación (*) obtenemos

$$r + r\varepsilon \langle (\cos \theta, \text{sen } \theta), (\cos \omega, \text{sen } \omega) \rangle = k,$$

o, lo que es igual,

$$r [1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)] = k.$$



Como la constante k es positiva, llegamos al siguiente resultado: un punto

$$x = r(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta), \quad r > 0, \theta \in \mathbb{R},$$

pertenece a nuestra cónica si y sólo si

$$(i) \ 1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega) > 0, \quad \text{y} \quad (ii) \ r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}.$$

Centrémonos en el caso de las elipses. Entonces, $0 \leq \varepsilon < 1$ y la condición (i) se cumple de manera automática. Por tanto, la aplicación

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)} (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta),$$

es una parametrización (2π -periódica) de la elipse.

Ejercicio. Realiza un estudio análogo para las parábolas y las hipérbolas. En el caso de las parábolas, prueba que la aplicación

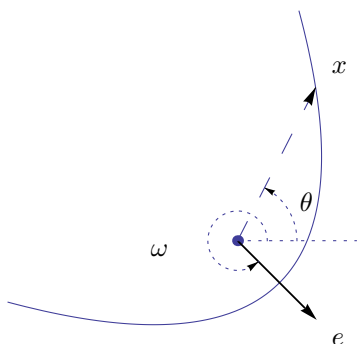
$$\gamma :]\omega - \pi, \omega + \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto \frac{k}{1 + \cos(\theta - \omega)} (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta),$$

es una parametrización (biyectiva). En el caso de la rama de hipérbola, prueba que hay una parametrización (también biyectiva) de la forma

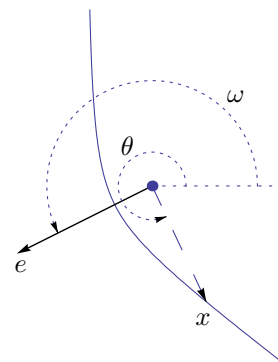
$$\gamma :]\omega - l, \omega + l[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)} (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta),$$

donde $l \in]\pi/2, \pi[$. Calcula el valor de l .

$\varepsilon = 1$ (parábola)



$\varepsilon > 1$ (hipérbola)

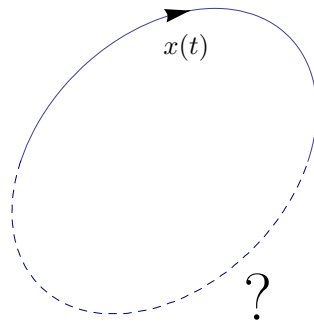


2.7. Los movimientos recorren toda su órbita

Consideremos una solución de

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (K)$$

con momento angular $c \neq 0$ y energía $h < 0$. Sabemos ya que $x(t)$ vive en una elipse, y sabemos también que el intervalo maximal de definición de x es todo \mathbb{R} , pero aún no está claro que nuestra partícula recorra toda la elipse. En principio pudiera suceder que $x(\mathbb{R})$ fuese sólo un trozo de elipse:



Aún no hemos comprobado que la imagen de la solución sea la cónica completa.

Vamos a comprobar que éste no es el caso. Escribimos $x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$; de un estudio anterior sabemos que, tras cambiar, si fuera necesario, el sentido del tiempo, podemos suponer que nuestra partícula gira en sentido positivo, y entonces $|c| = r^2 \dot{\theta}$, o lo que es igual, $\dot{\theta} = |c|/r^2$. Como la elipse está acotada, existe una constante $R > 0$ tal que $r(t) \leq R$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y en consecuencia,

$$\dot{\theta}(t) \geq \frac{|c|}{R^2} := K > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces θ es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ cuya derivada no se acerca a cero, pues está por encima de la constante K . Deducimos que $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ejercicio. ¿Por qué?

Pero ahora, puesto que nuestra partícula vive en la elipse,

$$x(t) = \gamma(\theta(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

siendo $\gamma = \gamma(\theta)$ la parametrización de la elipse construida en la sección anterior. Como la imagen de la parametrización es la elipse completa, deducimos que x recorre toda la elipse.

Ejercicio. Prueba que, de hecho, x pasa infinitas veces por cada punto de la elipse.

Ejercicio. Prueba que los movimientos parabólicos recorren toda la parábola y los hiperbólicos recorren toda la rama de la hipérbola, pasando una única vez por cada punto.

Indicación: Combina la igualdad $|c| = r^2\dot{\theta}$ con el ejercicio de la página 54 y demuestra que θ cumple una ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{\theta} = h(\theta),$$

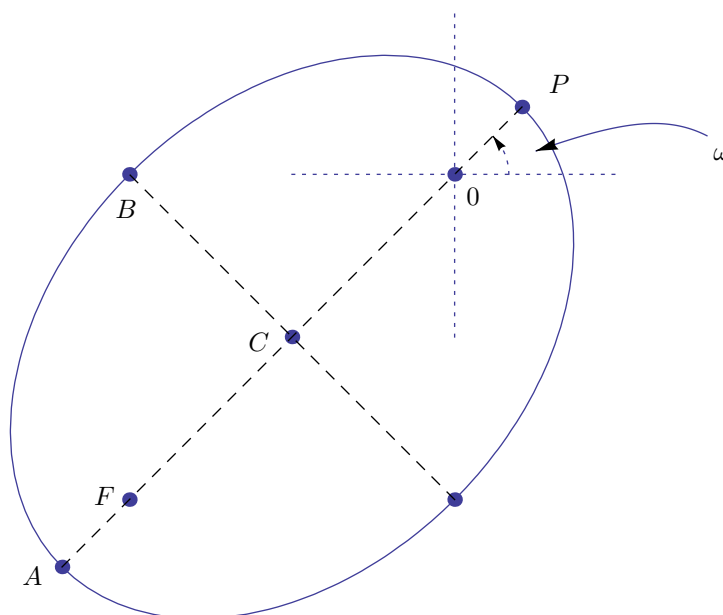
donde $h :]a, b[\rightarrow]0, +\infty[$ es una función continua y positiva. Prueba a continuación que cualquier solución maximal

$$\theta :]\alpha, \omega[\rightarrow]a, b[,$$

de una ecuación de este tipo es un homeomorfismo entre su dominio $] \alpha, \omega [$ y el intervalo $] a, b [$.

2.8. Los elementos geométricos de una elipse

Consideramos una elipse \mathcal{C} con un foco en el origen, y señalamos algunos puntos destacados:



El origen 0 es uno de los focos de la elipse, y denotamos por F al otro foco. Como ya hemos hecho en la sección anterior, llamaremos ε a la excentricidad y ω al argumento del pericentro. De la ecuación en polares de la elipse

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}, \quad (*)$$

se sigue que el punto P de la elipse más cercano al foco 0 se corresponde con $\theta = \omega$, este punto es el llamado *pericentro*¹ de la elipse. Por tanto, la distancia de 0 a P es

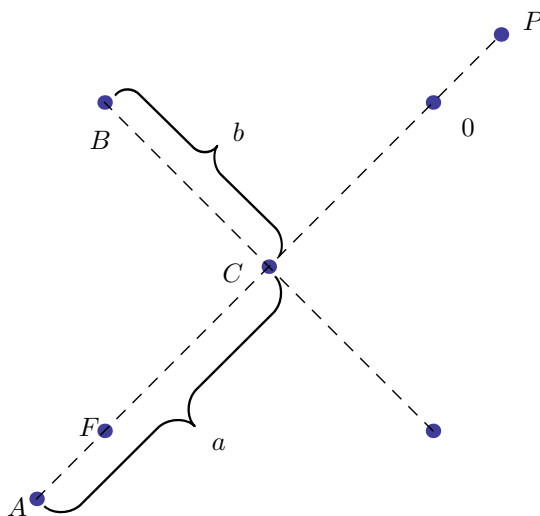
$$|P - 0| = \frac{k}{1 + \varepsilon}.$$

La expresión (*) también puede usarse para concluir que el punto A de la elipse más alejado del foco 0 se corresponde con $\theta = \omega + \pi$; éste es el llamado *apocentro*² de la elipse. Su distancia al origen es

$$|0 - A| = \frac{k}{1 - \varepsilon},$$

y deducimos que la longitud del semieje mayor de la elipse es

$$a = \frac{|P - A|}{2} = \frac{|P - 0| + |0 - A|}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{1 + \varepsilon} + \frac{k}{1 - \varepsilon} \right) = \frac{k}{1 - \varepsilon^2}.$$



¹En Astronomía, el pericentro de una órbita elíptica recibe diversos nombres según el cuerpo celeste que ocupe el foco 0 ; perihelio si se trata del Sol, perigeo si es la Tierra, periastro si es una estrella cualquiera...

²De manera similar, el apocentro de la elipse recibe nombres distintos según quién esté en el foco 0 ; afelio si se trata del Sol, apoceo si es la Tierra, apoastro si es una estrella...

Por otro lado,

$$|C - 0| = a - |P - 0| = \frac{k}{1 - \varepsilon^2} - \frac{k}{1 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon k}{1 - \varepsilon^2},$$

y, de aquí deducimos que

$$\frac{|0 - C|}{|P - C|} = \frac{|C - 0|}{a} = \frac{\varepsilon k / (1 - \varepsilon^2)}{k / (1 - \varepsilon^2)} = \varepsilon,$$

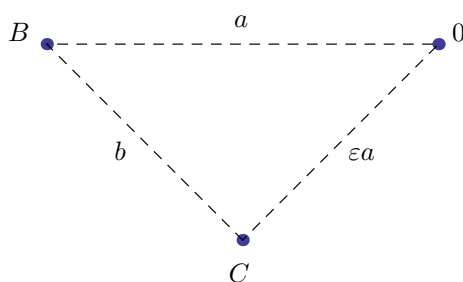
lo cual nos proporciona una nueva interpretación geométrica de la excentricidad:

$$\varepsilon = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{longitud del eje mayor de la elipse}}.$$

Por otra parte, de la definición geométrica de la elipse deducimos que

$$2|B - 0| = |B - 0| + |B - F| = |P - 0| + |P - F| = 2a,$$

así que $|B - 0| = a$. Teniendo en cuenta que los ejes de la elipse son perpendiculares, el teorema de Pitágoras se puede aplicar para obtener $b = |B - C|$:

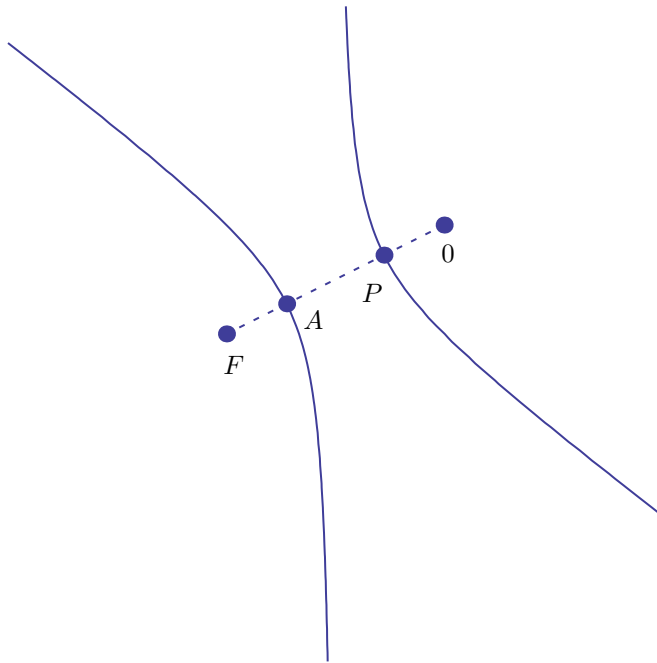


$$b = \sqrt{|B - 0|^2 - |C - 0|^2} = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} a,$$

y así llegamos a otra interpretación geométrica de la excentricidad, o, mejor dicho, de la raíz cuadrada de uno menos el cuadrado de la excentricidad:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\text{longitud del eje menor de la elipse}}{\text{longitud del eje mayor de la elipse}}.$$

Ejercicio. Queremos encontrar una interpretación geométrica de la excentricidad de una hipérbola. Para ello, consideramos una hipérbola con focos O , F y llamamos P , A a los puntos donde cada una de las ramas de la hipérbola cortan al segmento que une los focos:



Demuestra que

$$\varepsilon = \frac{|O - F|}{|P - A|}.$$

2.9. Periodo mínimo

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ se llama *periódica* si existe un número $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, tal que

$$f(t + p) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Los números p de este tipo se llaman *periodos* de f . Definimos

$$\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{R} : p \text{ es un periodo de } f\} \cup \{0\},$$

y es fácil comprobar que \mathcal{P} es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$, esto es, un subgrupo aditivo de \mathbb{R} .

Un resultado sencillo³ del Análisis dice que los subgrupos aditivos de \mathbb{R} se dividen en dos grupos: los que son densos (como por ejemplo \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$...), y los constituidos por los múltiplos enteros de un número p fijo: $p\mathbb{Z} = \{\dots - 2p, -p, 0, p, 2p, \dots\}$. Volvamos ahora a nuestra función periódica f y a su subgrupo aditivo de periodos \mathcal{P} . Si f es continua, \mathcal{P} debe ser cerrado (¿por qué?), y si f no es constante, este subgrupo no puede ser todo \mathbb{R} . Entonces $\mathcal{P} = \alpha\mathbb{Z}$ está constituido por los múltiplos enteros de un número dado α , y tras posiblemente reemplazar este número por su opuesto, no es restrictivo suponer que $\alpha > 0$. Este número α , el generador positivo de \mathcal{P} , es el menor de los periodos positivos de f , y se llama el *periodo mínimo* de f .

Por ejemplo, en el caso de $f(t) = \sin t$, $\mathcal{P} = 2\pi\mathbb{Z}$ y el periodo mínimo es 2π . La trayectoria $x(t) = a(\cos \omega t, \sin \omega t)$ de un cuerpo en movimiento circular a velocidad angular constante es periódica de periodo mínimo $2\pi/|\omega|$. En un planeta que se mueve alrededor del Sol, el periodo mínimo es el año del planeta. Observamos en la tabla adjunta que en el sistema solar los años de cada planeta se hacen más largos a medida que nos alejamos del Sol, un hecho que justificaremos a continuación...

Planeta	Duración del año en días terrestres.
Mercurio	87.97
Venus	224.7
Tierra	365.26
Marte	686.98
Júpiter	4332.6
Saturno	10759
Urano	30687
Neptuno	60784

Una curiosidad: en la discusión anterior es esencial que f sea continua. En efecto, la función $f = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$, la característica de los racionales, es periódica, y cualquier número racional es un periodo suyo, luego no hay periodo mínimo.

³Véase el ejercicio 2.12, al final de esta lección.

Ejercicio. Dado G un subgrupo aditivo de \mathbb{R} , encuentra una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G = \{p \in \mathbb{R} : f(t+p) = f(t) \forall t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}.$$

2.10. Soluciones periódicas y tercera ley de Kepler

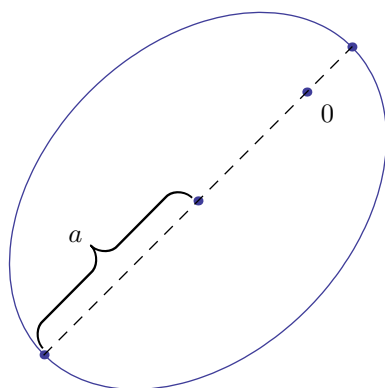
Teorema 2.10.1 (Tercera ley de Kepler). Sea $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ una solución de

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{|x|^3},$$

con momento angular $c \neq 0$ y energía $h < 0$ (órbita elíptica). Entonces x es periódica y su periodo mínimo es

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2},$$

donde a es la longitud del semieje mayor de la elipse.



Nota. Una primera consecuencia de este resultado es que el periodo mínimo de cada órbita elíptica depende únicamente de la ecuación (concretamente del parámetro μ), y de la longitud a del semieje mayor de la elipse. Si se recuerdan estos datos, la expresión de p es fácil de deducir, pues un cálculo directo muestra que la órbita circular a velocidad angular constante

$$x(t) = a(\cos \omega t, \sin \omega t),$$

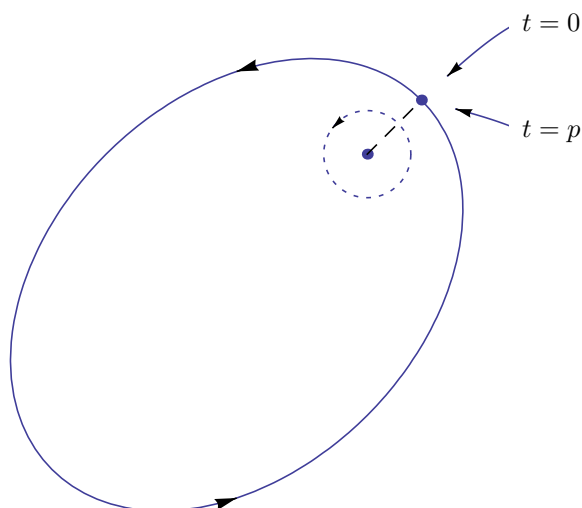
es solución a $\ddot{x} = -\mu x/|x|^3$ si y sólo si $|\omega| = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$.

Demostración. Escribimos x en coordenadas polares:

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como ya sabemos, no es restrictivo suponer que x gira en sentido positivo, $\dot{\theta} > 0$. En la página 55 vimos que, por tratarse de un movimiento elíptico, existe una constante $K > 0$ tal que $\dot{\theta} \geq K$ sobre \mathbb{R} , y por tanto θ es estrictamente creciente y su imagen es todo \mathbb{R} . En particular existe un único tiempo $p \in \mathbb{R}$ tal que

$$\theta(p) = \theta(0) + 2\pi.$$



p es el tiempo empleado en dar una vuelta completa

Como $\theta(p) > \theta(0)$ y θ es creciente, $p > 0$. Nos disponemos a probar que p es el periodo mínimo de $x = x(t)$ y a calcular su valor.

Paso 1: p es un periodo. De la ecuación de la elipse en polares,

$$r(t) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta(t) - \omega)} \quad (*)$$

y de la ecuación que define a p ,

$$\theta(p) = \theta(0) + 2\pi,$$

deducimos que $r(p) = r(0)$, y puesto que

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)), \quad (**)$$

se concluye que $x(0) = x(p)$.

Ahora, por la conservación del momento angular,

$$r(p)^2 \dot{\theta}(p) = r(0)^2 \dot{\theta}(0),$$

y recordando que $r(0) = r(p)$ deducimos que $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(p)$. Derivando en la igualdad (*) obtenemos que $\dot{r}(0) = \dot{r}(p)$, y derivando en (**), que $\dot{x}(0) = \dot{x}(p)$.

Para concluir este paso basta con usar el siguiente resultado de la teoría general de sistemas dinámicos:

Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{X} = F(X), \quad X \in \Omega,$$

donde $F : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es localmente Lipschitz. Suponemos que la solución $X : [0, p] \rightarrow \Omega$ cumple $X(0) = X(p)$. Entonces su dominio maximal es todo \mathbb{R} y la extensión correspondiente es periódica con periodo p .

Ahora es suficiente con convertir la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

en un sistema de primer orden en $\Omega := (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$, definiendo para ello la nueva variable $X := (x, v)$, $v = \dot{x}$.

Paso 2: p es el periodo mínimo. Sea $\tilde{p} > 0$ otro periodo de x ; vamos a probar que $\tilde{p} \geq p$. Para ello observamos que, como $x(\tilde{p}) = x(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, se ha de cumplir

$$\theta(\tilde{p}) = \theta(0) + 2N\pi,$$

para algún $N \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, como θ es estrictamente creciente y $\tilde{p} > 0$, $\theta(\tilde{p}) > \theta(0)$ y $N \geq 1$. Pero entonces

$$\theta(p) = \theta(0) + 2\pi \leq \theta(0) + 2N\pi = \theta(\tilde{p}),$$

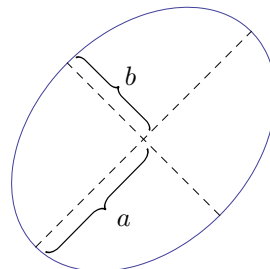
y como θ es estrictamente creciente, deducimos que $p \leq \tilde{p}$.

Paso 3: Cálculo del periodo. Vamos a comparar dos expresiones para el área de nuestra órbita elíptica; la primera obtenida por medio de consideraciones geométricas, y la segunda, usando la mecánica.

Por un lado, el área A de una elipse es

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

(sabemos que $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ desde la página 58).



Ejercicio. Demuestra la fórmula

$$A = \pi ab.$$

Por otra parte, recordando el estudio que hicimos para demostrar la segunda ley de Kepler, el área barrida por el segmento que une el origen con nuestra partícula entre un instante t_1 y otro instante t_2 puede expresarse como una integral:

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r(s)^2 \dot{\theta}(s) ds = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |c| dt = \frac{|c|(t_2 - t_1)}{2}.$$

En principio la fórmula es válida cuando $t_1 < t_2 < t_1 + p$. Por ejemplo, tomando $t_1 = 0$ obtenemos que

$$A(0, t_2) = \frac{|c|t_2}{2},$$

y la fórmula es válida para $0 < t_2 < p$. Observamos, no obstante, que el área barrida por nuestra partícula entre los instantes 0 y p puede expresarse como la suma del área barrida entre los instantes 0 y $p/2$ más el área barrida entre los instantes $p/2$ y p , pues las regiones correspondientes son disjuntas:

$$A(0, p) = A(0, p/2) + A(p/2, p) = \frac{|c|p}{4} + \frac{|c|p}{4} = \frac{|c|p}{2},$$

y, como quiera que $A(0, p)$ es el área de la elipse,

$$\frac{|c|p}{2} = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

de donde obtenemos una expresión para el periodo mínimo:

$$p = 2\pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} / |c|.$$

Por otra parte, de la ecuación de la órbita

$$|x| + \langle e, x \rangle = |c|^2 / \mu \rightsquigarrow r = \frac{|c|^2 / \mu}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}$$

podemos calcular la longitud del semieje mayor:

$$a = \frac{|c|^2 / \mu}{1 - \varepsilon^2},$$

de donde se deduce que

$$\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{|c|} = \frac{1}{\sqrt{a\mu}},$$

y por tanto

$$p = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

□

2.11. Órbitas no Newtonianas

Volvamos al caso general: un campo de fuerzas centrales arbitrario

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

con $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua. Suponemos que

$$x = x(t), \quad t \in I,$$

es una solución, y la expresamos en coordenadas polares:

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)), \quad t \in I.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación llegamos a la igualdad:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - f(r))(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})(-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) = (0, 0).$$

Como los vectores $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ y $(-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$ son linealmente independientes (pues son unitarios y perpendiculares), obtenemos el sistema

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r), \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

Multiplicando la segunda ecuación por r :

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Hemos vuelto a encontrar la conservación del momento angular c , pues, como ya sabemos, si el sentido de giro es positivo ($\dot{\theta} > 0$), o bien el movimiento se efectúa en una semirrecta que emana del origen ($c = 0$), entonces

$$r^2\dot{\theta} \equiv |c|.$$

Por otra parte, de la primera ecuación

$$\ddot{r} - \frac{|c|^2}{r^3} = f(r), \quad r > 0.$$

Llegamos así al siguiente resultado: las soluciones

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))$$

de

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|},$$

que viven sobre una semirrecta o que giran en sentido positivo pueden obtenerse como las soluciones del sistema

$$\ddot{r} - \frac{|c|^2}{r^3} = f(r), \quad \dot{\theta} = \frac{|c|}{r^2},$$

donde $|c|$ es un parámetro no negativo. Además, el sistema está desacoplado; fijado $|c| \geq 0$ podemos resolver la primera ecuación y luego obtener θ a partir de la segunda:

$$\theta(t) := \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{|c|}{r(s)^2} ds, \quad t \in I.$$

Observa que $\theta_0 \in \mathbb{R}$ (también $t_0 \in I$) es fijo pero arbitrario. Este hecho se corresponde con la invarianza por rotaciones de las soluciones de nuestra ecuación.

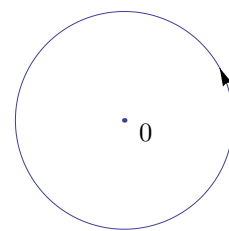
Las soluciones más simples de la primera ecuación son las constantes; es decir, $R \in]0, +\infty[$ tal que

$$-\frac{|c|^2}{R^3} = f(R) \Leftrightarrow |c| = \sqrt{-R^3 f(R)}.$$

El proceso anterior es factible si $f(R) \leq 0$, el campo es atractivo a altura R . Cuando $f(R) < 0$ obtenemos una solución circular del problema original:

$$r(t) \equiv R, \quad \dot{\theta} = \frac{|c|}{R^2} = \sqrt{\frac{-f(R)}{R}} =: \omega \rightsquigarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t.$$

$$x(t) = R \left(\cos(\theta_0 + \omega t), \operatorname{sen}(\theta_0 + \omega t) \right)$$



Ejercicio. En el caso de que $f(R) = 0$, ¿cómo hay que interpretar la solución correspondiente?

A continuación vamos a describir un ingenioso cambio de variable, debido a Clairaut, y válido para $c \neq 0$. Pretendemos resolver

$$\ddot{r} = f(r) + \frac{|c|^2}{r^3}, \quad r > 0. \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Variable independiente: } t \\ \text{Incógnita: } r = r(t) \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Variable independiente: } \theta \\ \text{Incógnita: } \rho(\theta) = 1/r(t) \end{array} \right.$$

Para justificarlo, observemos que $\dot{\theta} = |c|/r^2 > 0$, y de aquí deducimos que θ es un difeomorfismo entre su dominio I y su imagen $J := \theta(I)$, dos intervalos abiertos.

Entonces, la inversa $\theta^{-1} : J \rightarrow I$ permite expresar el tiempo t como función de θ . Ahora podemos ser más precisos en relación a la nueva incógnita ρ :

$$\rho : J \rightarrow I \rightarrow]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ \theta \mapsto t \mapsto r(t) \mapsto 1/r(t) =: \rho(\theta)$$

Un comentario sobre la notación, que es abusiva aunque cómoda. En efecto, con el símbolo ‘ θ ’ denotamos tanto la función argumento de la solución a lo largo del tiempo $t \in I$, como la variable independiente sobre J . Si esto se ha entendido se ha de estar de acuerdo con la siguiente afirmación: ρ es una función de clase $\mathcal{C}^2(J)$ que cumple la identidad:

$$r(t) = \frac{1}{\rho(\theta(t))}, \quad t \in I.$$

Derivando (dejamos de escribir la dependencia de t para simplificar la notación),

$$\dot{r} = -\frac{\dot{\theta}}{\rho(\theta)^2} \frac{d\rho}{d\theta}(\theta) = -r^2 \dot{\theta} \frac{d\rho}{d\theta}(\theta) = -|c| \frac{d\rho}{d\theta}(\theta),$$

y derivando de nuevo,

$$\ddot{r} = -|c| \dot{\theta} \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\theta) = -|c| r^2 \dot{\theta} \rho(\theta)^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\theta) = -|c|^2 \rho(\theta)^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\theta),$$

y sustituyendo en (*) llegamos a la ecuación

$$-|c|^2 \rho(\theta)^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2}(\theta) = f\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right) + |c|^2 \rho(\theta)^3,$$

Observamos que las funciones que aparecen están evaluadas sobre la función $\theta = \theta(t)$. Dejamos de escribirla para simplificar la notación, dividimos por $-|c|^2 \rho(\theta)^2$, y obtenemos:

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = -\frac{1}{|c|^2 \rho^2} f\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (**)$$

Hay dos elecciones para f que nos llevan a una ecuación lineal:

- (i) $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$ donde $\mu > 0$ (campo gravitatorio Newtoniano). En este caso la ecuación (**) se convierte en

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\mu}{|c|^2} \text{ (ecuación de un oscilador forzado),}$$

cuyas soluciones tienen la forma

$$\rho(\theta) = \frac{\mu}{|c|^2} + c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

o, si se prefiere,

$$\rho(\theta) = \frac{\mu}{|c|^2} + A \cos(\theta - \omega), \quad A \geq 0, \quad \omega \in [0, 2\pi[,$$

y, en consecuencia,

$$r = \frac{1}{\mu/|c|^2 + A \cos(\theta - \omega)} = \frac{|c|^2/\mu}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)},$$

donde $\varepsilon = |c|^2 A/\mu \geq 0$.

Hemos recuperado la primera ley de Kepler: si $c \neq 0$ la partícula se mueve en una cónica.

(ii) $f(r) = -\frac{\mu}{r^3}$ donde $\mu > 0$ (fuerza cúbica). Ahora, (***) pasa a ser

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\mu}{|c|^2}\right) \rho = 0,$$

(la ecuación de un oscilador). Es conveniente distinguir varios casos según el momento angular:

(ii_a) $|c|^2 = \mu$. Entonces

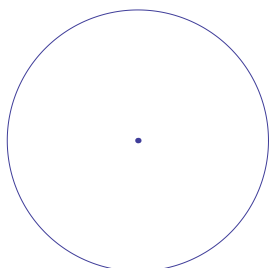
$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = 0,$$

y $\rho(\theta) = k_1 + k_2\theta$, donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ son constantes. Por tanto

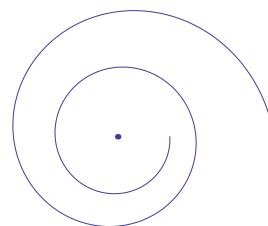
$$r = \frac{1}{k_1 + k_2\theta}.$$

Por ejemplo, si $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$ obtenemos una solución circular con radio 1. Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$ nos encontramos con una trayectoria en espiral.

$$r = 1$$



$$r = \frac{1}{\theta}$$



(ii_b) $|c|^2 > \mu$. Definimos $\omega := \sqrt{1 - \frac{\mu}{|c|^2}} \in]0, 1[$. Entonces,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \omega^2\rho = 0,$$

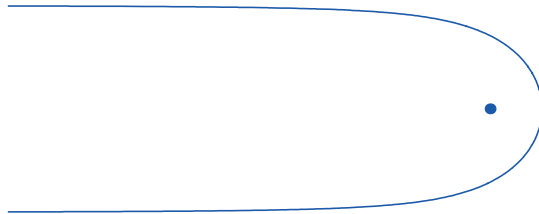
y de aquí deducimos que

$$\rho(\theta) = A \cos(\omega\theta + \varphi), \quad r = \frac{1}{A \cos(\omega\theta + \varphi)},$$

donde $A > 0$ y $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Por ejemplo, si $A = 1, \varphi = 0, \omega = 1/2$ obtenemos

$$r = \frac{1}{\cos(\theta/2)}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$



Las movimientos bajo una fuerza cúbica pueden ser curvas de ecuación cartesiana complicada.

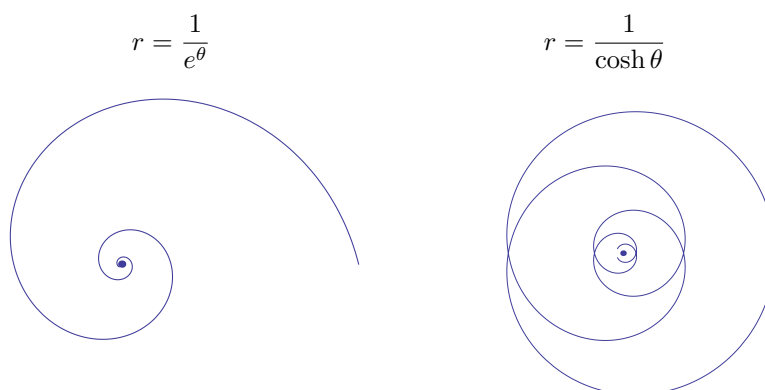
(ii_c) $|c|^2 < \mu$. Definimos $\omega := \sqrt{\frac{\mu}{|c|^2} - 1} \in]0, +\infty[$. Ahora nuestra ecuación pasa a ser,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - \omega^2\rho = 0,$$

y las soluciones son

$$\rho(\theta) = k_1 e^{\omega\theta} + k_2 e^{-\omega\theta} \rightsquigarrow r = \frac{1}{k_1 e^{\omega\theta} + k_2 e^{-\omega\theta}}.$$

Por ejemplo, si $k_1 = 1, k_2 = 0$ y $\omega = 1$ obtenemos $r = e^{-\theta}$, la ecuación de la espiral logarítmica. Si $k_1 = k_2 = 1/2$ llegamos a la órbita $r = 1/\cosh \theta$.



Dos paradojas aparentes:

- Algunas órbitas tienen puntos dobles. ¿Cómo puede ocurrir esto si hay unicidad para los problemas de valores iniciales?
- ¿Cómo puede ser válida la segunda ley de Kepler para partículas que se mueven en una espiral?

Ejercicio. Cuando una partícula α (cargada positivamente), se encuentra en la proximidad de un núcleo atómico pesado, que situamos, por comodidad en el origen, sobre ella actúa una fuerza *repulsiva* (llamada ‘de *Coulomb*’). Su vector de posición pasa a ser una solución de

$$\ddot{x} = \frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

donde μ es una constante positiva. Encuentra las posibles trayectorias para nuestra partícula α .

Ejercicio. ¿Cómo sería la trayectoria de nuestra partícula α si la fuerza de Coulomb fuese inversamente proporcional al *cubo* de la distancia que la separa del origen? Con otras palabras, estudia las trayectorias que siguen las soluciones de la ecuación

$$\ddot{x} = \frac{\mu x}{|x|^4},$$

donde $\mu > 0$.

Una observación final: Las fuerzas que hemos estudiado,

$$f(r) = -\mu/r^p, \quad p = 2, 3,$$

son muy especiales. El comportamiento de las órbitas no es representativo de lo que ocurre para una $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ genérica.

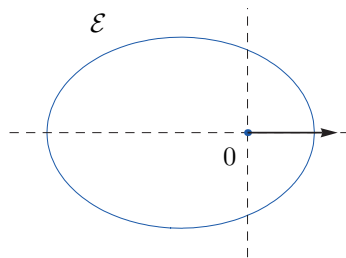
2.12. La solución del problema de Kepler: anomalías

Todavía no hemos resuelto la ecuación del movimiento de una partícula en un campo gravitatorio Newtoniano:

$$\ddot{x} = \frac{-\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

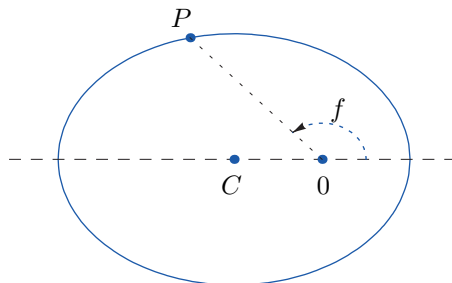
Si $c \neq 0$ sabemos que la órbita $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es una cónica con un foco en el origen, pero no sabemos determinar la posición en función del tiempo, $x = x(t)$.

Nos centraremos en movimientos elípticos ($c \neq 0, h < 0$). En este caso, la invarianza por rotaciones nos permite suponer, sin pérdida de generalidad, que el eje de excentricidad de nuestra elipse \mathcal{E} tiene la dirección y el sentido del vector $e_1 = (1, 0)$.



Un primer paso será encontrar una parametrización adecuada de nuestra elipse. Con este fin se definen las *anomalías*.

Dado un punto P de nuestra elipse \mathcal{E} , su *anomalía real* es el ángulo f desde el eje de excentricidad hasta el vector OP .

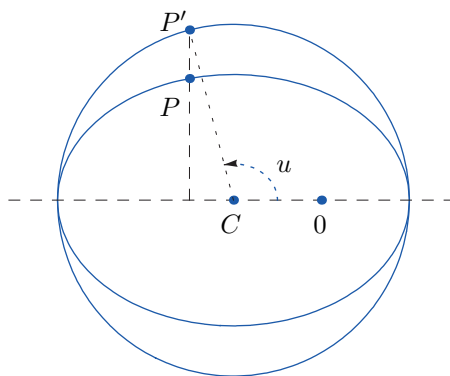


La elipse puede parametrizarse usando su anomalía real. En efecto, observese que, en el caso que nos ocupa, el argumento del pericentro es $\omega = 0$, y en consecuencia,

$$\gamma(f) := \frac{k}{1 + \varepsilon \cos f} (\cos f, \sin f), \quad f \in \mathbb{R},$$

es una parametrización (2π -periódica) de la elipse.

Será conveniente encontrar otra parametrización más sencilla. Con este propósito, dibujemos una circunferencia con el mismo centro $C = (-d, 0)$ de la elipse y con radio el semieje mayor a . A cada punto $P \in \mathcal{E}$ le hacemos corresponder un punto P' en esta circunferencia según se indica en la figura. La *anomalía excéntrica* del punto



P se define como el ángulo u desde el eje de excentricidad hasta el vector $C\vec{P}'$.

A medida que P se mueve a lo largo de \mathcal{E} , ($f \in [0, 2\pi]$), el punto P' se mueve a lo largo de la circunferencia, $u \in [0, 2\pi[$. Las anomalías coinciden en el pericentro ($u = f = 0$) y en el apocentro ($u = f = \pi$).

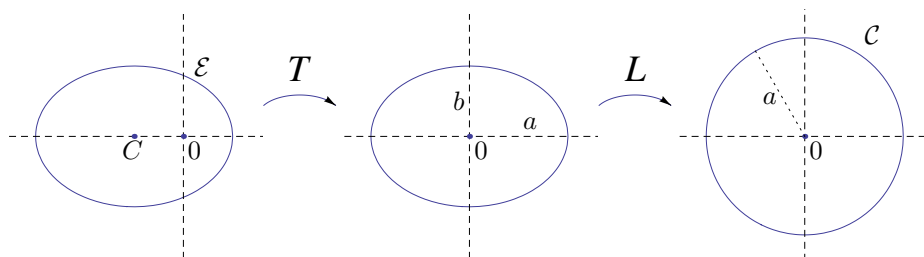
Otra forma de obtener la anomalía excéntrica de los puntos de nuestra elipse es la siguiente: la traslación

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x, y) - C = (x + d, y),$$

transforma \mathcal{E} en otra elipse cuyo centro es el punto $(0, 0)$. Posteriormente, el endomorfismo lineal $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$L(x, y) := \left(x, \frac{a}{b}y\right),$$

convierte esta elipse en la circunferencia \mathcal{C} de centro $(0, 0)$ y radio a .



Observa ahora que la anomalía excéntrica de un punto $P \in \mathcal{E}$ no es más que el argumento de $(L \circ T)(P)$; este hecho nos permitirá parametrizar la elipse usando la

anomalía excéntrica u . Pues $L \circ T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ es biyectiva y su inversa

$$(L \circ T)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \left(x - d, \frac{b}{a}y \right),$$

transforma \mathcal{C} en \mathcal{E} . Como quiera que

$$u \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos u, a \operatorname{sen} u),$$

es una parametrización (2π -periódica) de \mathcal{C} , la aplicación $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$u \mapsto (L \circ T)^{-1}(a \cos u, a \operatorname{sen} u) = (a \cos u - d, b \operatorname{sen} u),$$

es una parametrización 2π -periódica de nuestra elipse \mathcal{E} (parametrización por la anomalía excéntrica). De cálculos anteriores (página 58) se sabe que $d = \varepsilon a$ y $b = \sqrt{1 - \varepsilon^2} a$, y así,

$$\Gamma(u) = a \left(\cos u - \varepsilon, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u \right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Volvamos ahora a una partícula que se mueve bajo la acción de un campo gravitatorio Newtoniano:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Suponemos que nuestra partícula vive en la elipse \mathcal{E} ; entonces $y := L \circ T \circ x$ es una curva de clase \mathcal{C}^∞ que se mueve en la circunferencia \mathcal{C} , y usando el lema de paso a polares podemos escribir

$$y(t) = a(\cos u(t), \operatorname{sen} u(t)),$$

para cierta función $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pero $y(t) = (L \circ T)(x(t))$, y en esta expresión x puede recuperarse a partir de y ,

$$x(t) = (L \circ T)^{-1}(y(t)) = (L \circ T)^{-1} \left[a(\cos u(t), \operatorname{sen} u(t)) \right],$$

o, lo que es igual,

$$x(t) = a \left(\cos u(t) - \varepsilon, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u(t) \right) = \Gamma(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Denotemos por $x_1(t)$, $x_2(t)$ a las dos componentes de $x = x(t)$. El momento angular debe conservarse, y entonces

$$x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = |c|, \quad t \in \mathbb{R},$$

(suponemos que nuestra partícula gira en sentido positivo). Derivando en la expresión de $x(t)$,

$$x_1(t) = a(\cos u(t) - \varepsilon) \rightsquigarrow \dot{x}_1(t) = -a\dot{u}(t) \operatorname{sen} u(t),$$

$$x_2(t) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u(t) \rightsquigarrow \dot{x}_2(t) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \dot{u}(t) \cos u(t),$$

y de aquí llegamos a la igualdad

$$|c| = a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \dot{u}(t) \left[(\cos u(t) - \varepsilon) \cos u(t) + \operatorname{sen}^2 u(t) \right],$$

que puede verse como una ecuación diferencial de primer orden para la anomalía excéntrica $u = u(t)$:

$$\dot{u} = \frac{|c|}{a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos u)}.$$

Obsérvese que, como $\varepsilon \in [0, 1[$, el denominador es positivo y no hay singularidades. Es tradición sustituir $|c|$ por su expresión en función de a , ε y μ ; en efecto, como vimos en la página 64, $|c| = \sqrt{\mu a (1 - \varepsilon^2)}$, y por tanto

$$\dot{u} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2} (1 - \varepsilon \cos u)}. \quad (*)$$

Se sigue de esta expresión que

$$\dot{u} \geq \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2} (1 + \varepsilon)} > 0,$$

y por tanto $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un difeomorfismo. En particular, existe un único instante $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(t_0) = 0$ (observamos que t_0 es uno de los momentos de paso por el pericentro). Por otra parte, de (*) se sigue que $(1 - \varepsilon \cos u)\dot{u} = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$; integrando en ambos lados de esta igualdad entre t_0 y t deducimos que

$$u(t) - \varepsilon \operatorname{sen} u(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (**)$$

o, lo que es igual,

$$t = t_0 + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[u(t) - \varepsilon \operatorname{sen} u(t) \right], \quad t \in \mathbb{R}. \quad (***)$$

Esta fórmula puede leerse como sigue: no tenemos una expresión explícita para $u = u(t)$, la anomalía en función del tiempo. Pero sabemos que u es un difeomorfismo de \mathbb{R} en sí mismo y conocemos explícitamente a su inversa⁴ $t := u^{-1}$:

$$t(u) = t_0 + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[u - \varepsilon \operatorname{sen} u \right], \quad u \in \mathbb{R}.$$

Ahora ya podemos responder a la pregunta ¿en qué instantes pasa nuestro planeta por un punto dado P de la elipse? Calculamos su anomalía excéntrica u (está definida salvo un múltiplo entero de 2π) y, usando (***), obtenemos $t = t(u)$. También podemos recuperar la fórmula del periodo en la tercera ley de Kepler. En efecto,

$$p = t(2\pi) - t(0) = \left[t_0 + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} 2\pi \right] - t_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} 2\pi.$$

⁴Obsérvese el abuso de notación: el símbolo ' u ', que hasta ahora denotaba la función anomalía excéntrica, $u = u(t)$, pasa a ser la variable independiente; de manera similar, el símbolo ' t ', que refería a la variable independiente, se convierte ahora en una función $t = t(u)$.

En este momento es conveniente destacar un hecho importante: que hemos llegado a una fórmula para los movimientos elípticos bajo un campo gravitatorio Newtoniano, al menos cuando los ejes cartesianos coinciden con los ejes de la elipse:

$$\begin{cases} x_1(t) = a(\cos u(t) - \varepsilon), \\ x_2(t) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u(t), \\ u(t) - \varepsilon \operatorname{sen} u(t) = \frac{2\pi}{p}(t - t_0), \end{cases}$$

el problema es que la tercera ecuación define nuestra función anomalía excéntrica $u = u(t)$ sólo de manera implícita. Para responder a la pregunta ‘¿dónde se encuentra nuestro planeta en un instante dado t ?’ tendríamos que calcular $u(t)$, y eso exigiría resolver la célebre *ecuación de Kepler*:

$$\boxed{u - \varepsilon \operatorname{sen} u = \zeta}$$

donde $\zeta = \frac{2\pi}{p}(t - t_0)$.

A continuación presentamos una serie de ejercicios encaminados a trasladar lo que hemos aprendido en esta sección a movimientos hiperbólicos. Bueno, de manera similar a como hicimos en el caso elíptico, supondremos, sin pérdida de generalidad, que nuestro movimiento transcurre sobre una rama de hipérbola \mathcal{H} con foco más próximo en el origen y eje de excentricidad en la dirección y sentido de $-\vec{e}_1 = (-1, 0)$. Observa que estas ramas pueden describirse con ecuaciones del tipo

$$\mathcal{H} : \quad \sqrt{x^2 + y^2} - \varepsilon x = k, \quad (*)$$

donde $\varepsilon > 1$ es la excentricidad y $k > 0$ es una constante positiva.

Ejercicio. Consideramos la rama de hipérbola \mathcal{H} descrita en (*). Definimos

$$a := \frac{k}{\varepsilon^2 - 1}.$$

(a) Prueba que el centro⁵ de la hipérbola se encuentra en el punto

$$C = (-d, 0),$$

donde $d = \varepsilon a$.

(b) Comprueba que la traslación $T(x, y) := (x, y) - C$ transforma \mathcal{H} en

$$(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2, \quad x > 0. \quad (**)$$

(c) Comprueba finalmente que la aplicación lineal

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad L(x, y) := \left(x, \frac{y}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right),$$

transforma (**) en

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad x > 0.$$

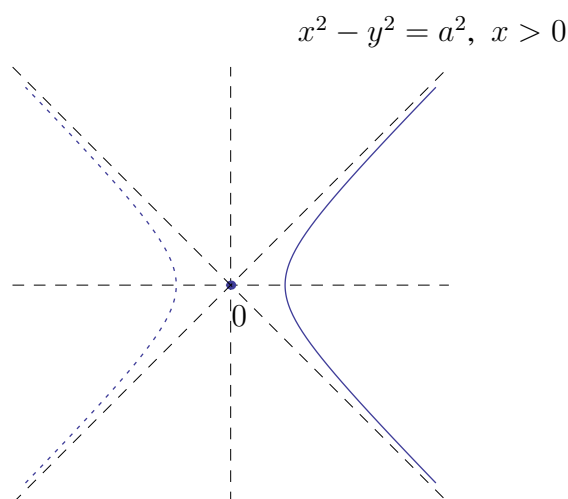
⁵El centro de la hipérbola es el punto medio entre los focos.

Ejercicio. (a) Dado $a > 0$, prueba que la aplicación

$$t \mapsto (a \cosh t, a \sinh t),$$

define un difeomorfismo⁶ (de clase C^∞) de \mathbb{R} sobre la rama de hipérbola definida por

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad x > 0.$$



(b) Demuestra que cualquier curva $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^p (donde $0 \leq p \leq \infty$) cuya imagen esté contenida en esta rama puede escribirse en la forma

$$x(t) = (a \cosh u(t), a \sinh u(t)),$$

para cierta función $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^p .

Ejercicio. Volvamos a la rama de hipérbola \mathcal{H} definida por (*) y definamos, como antes, $a := \frac{k}{\varepsilon^2 - 1}$.

(a) Prueba que la aplicación

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto a \left(\cosh u - \varepsilon, \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sinh u \right),$$

es una parametrización biyectiva de \mathcal{H} .

(b) Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^p cuya imagen está contenida en \mathcal{H} . Prueba que existe una función $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^p tal que $x(t) = \Gamma(u(t))$ para todo $t \in I$. ¿Es única?

⁶Es decir, es biyectiva, de clase C^∞ , y su derivada no se anula nunca.

Ejercicio. Volvamos a la rama de hipérbola \mathcal{H} de (*), y definamos d como en el Ejercicio 2.12(a):

(a) Prueba que las semirrectas

$$S_{\pm} : y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}(x + d), \quad x > 0.$$

tienen intersección vacía con \mathcal{H} , y no obstante,

$$\lim_{p \in S_{\pm}, p \rightarrow \infty} \text{dist}(p, \mathcal{H}) = 0,$$

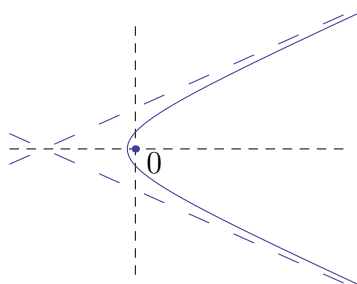
(S_{\pm} son las *asíntotas* de nuestra rama de hipérbola.)

(b) Comprueba que el ángulo α formado por estas semirrectas viene dado por

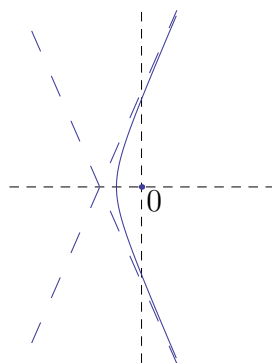
$$\alpha = 2 \arccos \left(\frac{1}{\varepsilon} \right).$$

En particular, si la excentricidad ε es próxima a 1, α será cercano a 0; en cambio, si ε es muy grande, entonces α es próximo a π .

excentricidad próxima a 1



excentricidad grande



Ejercicio. Encuentra una fórmula para las soluciones hiperbólicas de

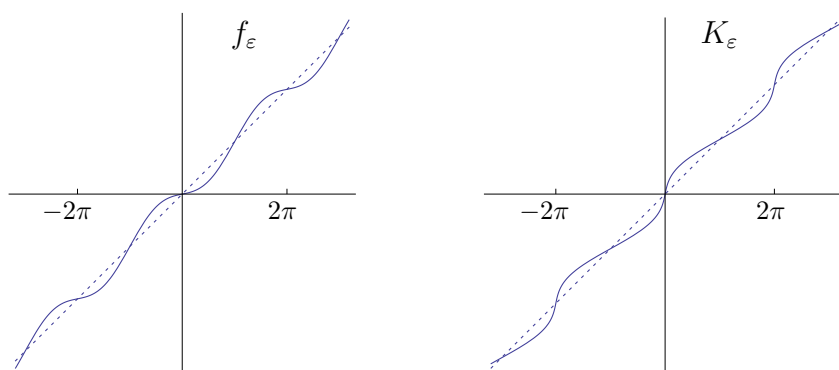
$$\ddot{x} = \frac{-\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

similar a la que se ha visto en esta sección para las soluciones elípticas.

2.13. El método de Newton y la ecuación de Kepler

Dado $0 < \varepsilon < 1$ consideramos la función

$$f_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{\varepsilon}(u) = u - \varepsilon \operatorname{sen} u.$$



Observa que $f'_\varepsilon(u) \geq 1 - \varepsilon > 0$, así que f_ε es un difeomorfismo creciente. Denotemos por $K_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\zeta \mapsto K_\varepsilon(\zeta)$ a su inversa.

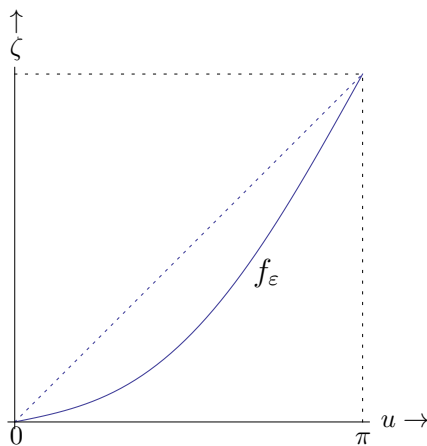
La función f_ε cumple

$$f_\varepsilon(u + 2\pi) = f_\varepsilon(u) + 2\pi, \quad f_\varepsilon(-u) = -f_\varepsilon(u),$$

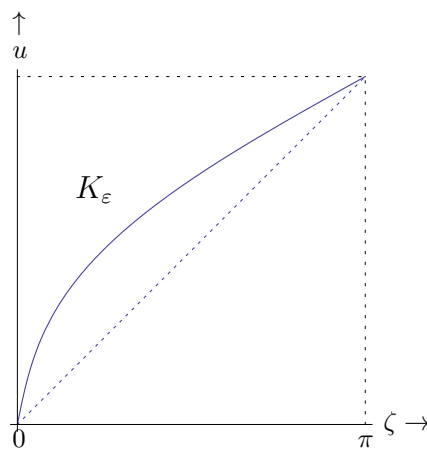
y estas simetrías son heredadas por su inversa

$$K_\varepsilon(\zeta + 2\pi) = K_\varepsilon(\zeta) + 2\pi, \quad K_\varepsilon(-\zeta) = -K_\varepsilon(\zeta).$$

Obsérvese que estas propiedades permiten reconstruir f_ε y K_ε sobre \mathbb{R} si se conocen sobre $[0, \pi]$. Por otro lado se comprueba fácilmente que $f_\varepsilon(0) = 0$, $f_\varepsilon(\pi) = \pi$, y $f_\varepsilon(u) < u$ si $u \in]0, \pi[$. En consecuencia, la gráfica de f_ε en el intervalo $[0, \pi]$ tiene el siguiente aspecto:



La gráfica de $K_\varepsilon = f_\varepsilon^{-1}$ sobre $[0, \pi]$ puede dibujarse a partir de la de f_ε , pues ambas gráficas son simétricas respecto de la diagonal:



De la función $f_\varepsilon(u) = u - \varepsilon \operatorname{sen} u$ tenemos una expresión explícita; no así de K_ε . Ahora bien, conocer K_ε sobre el intervalo $]0, \pi[$ equivale a saber resolver la ecuación

$$f_\varepsilon(u) = \zeta$$

cuando $\zeta \in]0, \pi[$, y esto puede hacerse numéricamente usando métodos iterativos. Nos centraremos en el *método de Newton*:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f_\varepsilon(u_n) - \zeta}{f'_\varepsilon(u_n)} = u_n - \frac{u_n - \varepsilon \operatorname{sen} u_n - \zeta}{1 - \varepsilon \cos u_n}.$$

Sea $u_* := K_\varepsilon(\zeta)$ la única solución. Nos planteamos el problema siguiente: ¿qué condiciones iniciales $u_0 \in \mathbb{R}$ dan lugar a una sucesión $\{u_n\}$ convergente a u_* ? Para responder a esta pregunta vamos a pensar en la dinámica de la ecuación en diferencias

$$u_{n+1} = \Phi(u_n),$$

donde $\Phi(u) = u - \frac{f_\varepsilon(u) - \zeta}{f'_\varepsilon(u)} = \frac{-\varepsilon u \cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u + \zeta}{1 - \varepsilon \cos u}$.

Como quiera que $f'_\varepsilon > 0$, tenemos que $f_\varepsilon(u) < \zeta$ si $u < u_*$ y $f_\varepsilon(u) > \zeta$ si $u > u_*$, y deducimos que

$$\Phi(u) > u \text{ si } u < u_*, \quad \Phi(u) < u \text{ si } u > u_*.$$

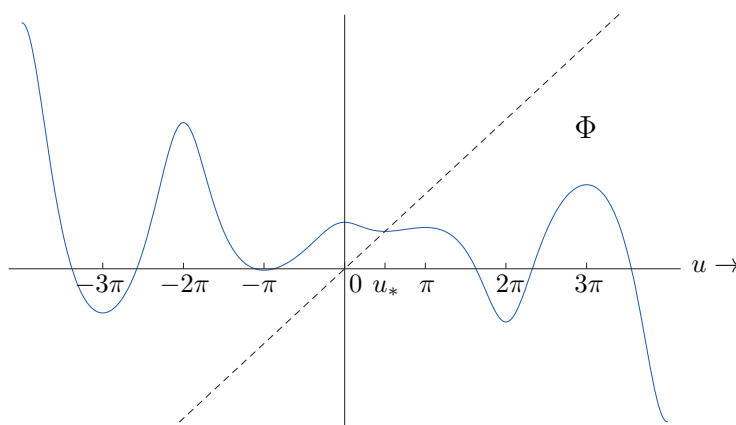
En particular, u_* es el único punto fijo de Φ . Por otra parte

$$\Phi'(u) = 1 - \frac{f'_\varepsilon(u)^2 - (f_\varepsilon(u) - \zeta)f''_\varepsilon(u)}{f'_\varepsilon(u)^2} = \frac{\varepsilon(f_\varepsilon(u) - \zeta) \operatorname{sen} u}{f'_\varepsilon(u)^2}.$$

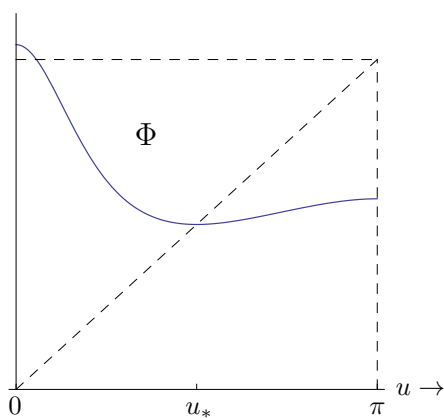
Observa que los puntos críticos de Φ son $u = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, y $u = u_*$. La igualdad anterior nos permite además determinar el signo de Φ' en los puntos restantes:



Con estos datos podemos ya esbozar la gráfica de Φ :



Concentrémonos en el intervalo $[0, \pi]$, donde la gráfica de Φ tiene el siguiente aspecto:



En general no se puede asegurar que haya convergencia de nuestro método iterativo para cualquier condición inicial. Por ejemplo, si $\zeta = \pi$, $\varepsilon = 1/2$, $u_0 = 0$, entonces

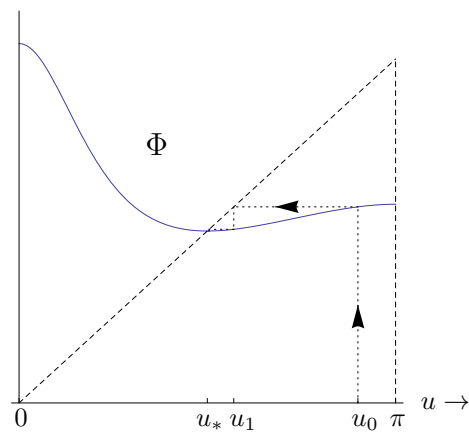
$$u_1 = \Phi(0) = \frac{\zeta}{1 - \varepsilon} = 2\pi, \quad u_2 = \Phi(u_1) = 0, \quad u_3 = \Phi(u_2) = 2\pi, \dots$$

Hemos encontrado un 2-ciclo:

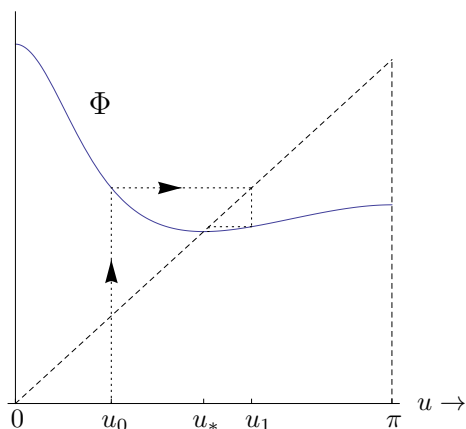
$$u_r = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es par,} \\ 2\pi & \text{si } r \text{ es impar,} \end{cases}$$

y en consecuencia no hay convergencia a $u_* = K_{1/2}(\pi) = \pi$.

Por otra parte, si observamos la gráfica de Φ nos daremos cuenta de que $u_0 \in [u_*, \pi]$ implica $u_n \rightarrow u_*$,



y también, si $u_0 \in [0, u_*]$ y $u_1 \in [0, \pi]$, entonces $u_1 \in [u_*, \pi]$ y $u_n \rightarrow u_*$:



Proposición 2.13.1 (Condición suficiente de convergencia). Sean $\zeta \in [0, \pi]$, $\varepsilon \in [0, 1[$ y $u_0 \in [0, \pi]$. Si $u_1 \in [0, \pi]$, entonces $u_n \rightarrow u_*$.

Demostración. La gráfica de Φ muestra que

$$\Phi([0, \pi]) \cap [0, \pi] \subset [u_*, \pi].$$

Por otra parte, $[u_*, \pi]$ es positivamente invariante,

$$\Phi([u_*, \pi]) \subset [u_*, \pi],$$

y deducimos que si $u_0, u_1 \in [0, \pi]$ entonces $u_n \in [u_*, \pi]$ para cada $n \geq 1$. En este intervalo, la gráfica de Φ se encuentra por debajo de la diagonal, $\Phi(u) \leq u$, lo que implica que

$$u_{n+1} = \Phi(u_n) \leq u_n, \quad n \geq 1.$$

La sucesión $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es monótona y acotada, y por tanto convergente, $u_n \rightarrow L$. Como $u_{n+1} = \Phi(u_n)$, de la continuidad de Φ se sigue que $L = \Phi(L)$. Pero u_* era el único punto fijo de Φ , y en consecuencia $L = u_*$ y $u_n \rightarrow u_*$. \square

2.14. Las funciones de Bessel y las soluciones elípticas

Presentamos a continuación un segundo enfoque destinado también a resolver la ecuación de Kepler:

$$u - \varepsilon \sin u = \zeta,$$

o lo que es igual, a describir la ‘función resolvente’ K_ε . Para ello recordamos que

$$K_\varepsilon(\zeta + 2\pi) = K_\varepsilon(\zeta) + 2\pi, \quad K_\varepsilon(-\zeta) = -K_\varepsilon(\zeta).$$

Entonces, $h(\zeta) := K_\varepsilon(\zeta) - \zeta$ es 2π -periódica e impar, y resulta natural tratar de obtener su desarrollo en *serie de Fourier*. En este punto recordamos algunos resultados básicos sobre series de Fourier:

Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\zeta \mapsto h(\zeta)$ una función 2π -periódica, continua y con derivada continua a trozos. Entonces

$$h(\zeta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos n\zeta + b_n \operatorname{sen} n\zeta \right\}, \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\zeta) d\zeta,$$

y, para $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\zeta) \cos n\zeta d\zeta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\zeta) \operatorname{sen} n\zeta d\zeta.$$

Además, la convergencia de la serie es absoluta y uniforme en \mathbb{R} .

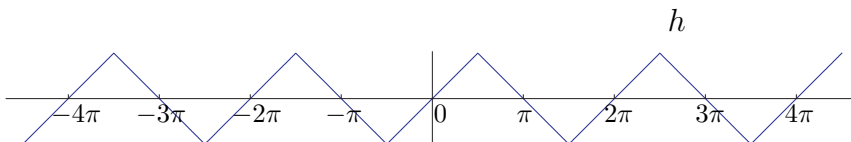
En el caso de una función impar, $h(-\zeta) = -h(\zeta)$, los coeficientes a_n se anulan y se obtiene el desarrollo de h en senos:

$$h(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

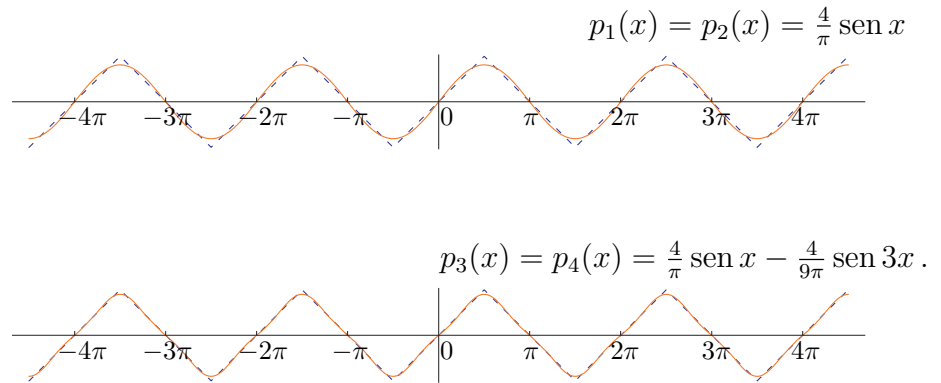
con $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(\zeta) \operatorname{sen} n\zeta d\zeta$.

Como ejemplo, para la función ‘dientes de sierra’, definida por

$$h(\zeta) = \begin{cases} \pi/2 - |\zeta - \pi/2| & \text{si } 0 \leq \zeta \leq \pi, \\ -h(-\zeta) & \text{si } -\pi \leq \zeta \leq 0, \\ h(\zeta + 2\pi) & \text{para todo } \zeta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$



se tiene que $b_1 = 4/\pi$, $b_2 = 0$, $b_3 = -\frac{4}{9\pi}$, $b_4 = 0$, y las primeras sumas parciales de la serie son



Buscamos el desarrollo en senos de $h(\zeta) = K_\varepsilon(\zeta) - \zeta$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (K_\varepsilon(\zeta) - \zeta) \operatorname{sen} n\zeta \, d\zeta = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = K_\varepsilon(\zeta) - \zeta \quad \quad \quad du = (K'_\varepsilon(\zeta) - 1)d\zeta \\ dv = \operatorname{sen} n\zeta \, d\zeta \quad \quad \quad v = -\frac{\cos n\zeta}{n} \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(K_\varepsilon(\zeta) - \zeta) \cos n\zeta}{n} \right]_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (K'_\varepsilon(\zeta) - 1) \cos n\zeta \, d\zeta. \end{aligned}$$

Como $K_\varepsilon(0) = 0$ y $K_\varepsilon(\pi) = \pi$, el corchete se anula, mientras que, de la definición de K_ε como la inversa de f_ε ,

$$K_\varepsilon(\zeta) - \varepsilon \operatorname{sen} K_\varepsilon(\zeta) = \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

y derivando obtenemos que $K'_\varepsilon(\zeta) - \varepsilon K'_\varepsilon(\zeta) \cos K_\varepsilon(\zeta) = 1$, o lo que es igual,

$$K'_\varepsilon(\zeta) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos K_\varepsilon(\zeta)}.$$

Por último, observamos que $\int_0^\pi \cos n\zeta \, d\zeta = 0$. Se obtiene

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi K'_\varepsilon(\zeta) \cos n\zeta \, d\zeta = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\zeta}{1 - \varepsilon \cos K_\varepsilon(\zeta)} \, d\zeta.$$

Ahora usamos el cambio de variable

$$u = K_\varepsilon(\zeta), \quad du = K'_\varepsilon(\zeta) \, d\zeta = \frac{d\zeta}{1 - \varepsilon \cos K_\varepsilon(\zeta)},$$

que nos lleva a

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos [n(u - \varepsilon \operatorname{sen} u)] \, du.$$

Dado un número natural $n \geq 1$, la función de Bessel de índice n se puede definir por la fórmula

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - x \operatorname{sen} u) du.$$

Observa que esta definición nos permite reescribir los coeficientes de Fourier de la función K_ε :

$$b_n = \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon).$$

Obtenemos la solución de la ecuación de Kepler como una serie:

$$K_\varepsilon(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \operatorname{sen} n\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

A partir de aquí obtenemos una fórmula ‘explícita’ para los movimientos elípticos bajo un campo gravitatorio Newtoniano. Si se trata de una órbita elíptica con semieje mayor $a > 0$, excentricidad $\varepsilon > 0$, y que pasa por el perihelio en un cierto instante t_0 , entonces

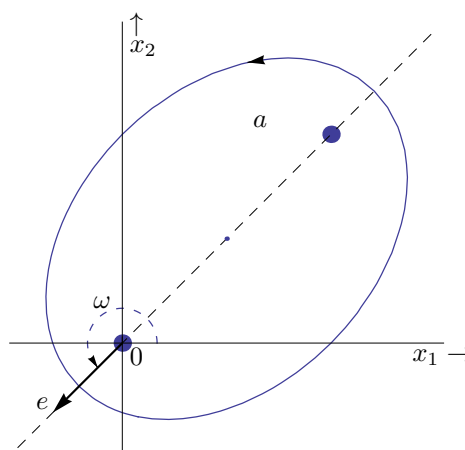
$$\begin{cases} x_1(t) = a(\cos u(t) - \varepsilon), \\ x_2(t) = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u(t), \\ u(t) = \nu(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \operatorname{sen} [n\nu(t - t_0)], \end{cases}$$

donde $\nu = \sqrt{\mu}/a^{3/2} = 2\pi/p$.

2.15. Elementos de una solución elíptica: las coordenadas astronómicas

En el plano x_1x_2 una solución elíptica está determinada por los siguientes parámetros:

- a semieje mayor.
- ε excentricidad.
- ω ángulo del eje x_1 al eje de excentricidad.
- T momento de paso por el perihelio.
- \pm sentido de giro (+ para el antihorario).



Utilizando la invarianza por rotaciones de movimientos en el plano, la solución $(a, \varepsilon, \omega, T, +)$ puede escribirse como $x(t) = R y(t)$, siendo

- $R = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\operatorname{sen} \omega \\ \operatorname{sen} \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$ la matriz de la rotación de ángulo ω ,
- $y(t) = \left(a(\cos u - \varepsilon), a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u \right)$,
- $u - \varepsilon \operatorname{sen} u = \nu(t - T), \quad \nu = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$,

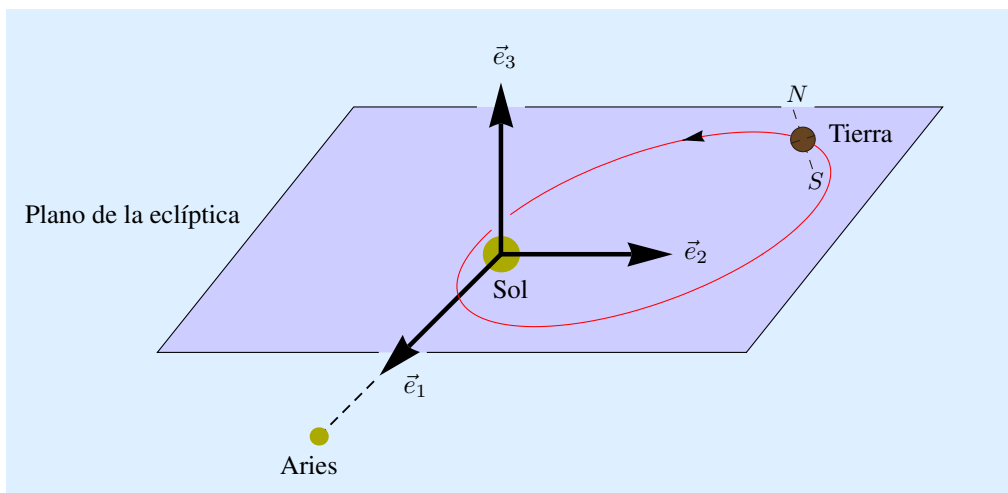
y la solución $(a, \varepsilon, \omega, -T, -)$ es $x(-t)$.

Ahora bien, a veces no es suficiente con describir órbitas en un plano fijo. Por ejemplo, los planetas del sistema solar giran cada uno en un plano distinto (aunque sean próximos). ¿Qué datos hacen falta para describir una órbita cualquiera en el espacio tridimensional?

Un inciso astronómico. En el espacio ‘matemático’ \mathbb{R}^3 , la base canónica nos proporciona *gratis* un sistema de referencia, pero en el espacio físico real, el sistema de referencia hay que construirlo. Buscaremos un sistema de referencia ortonormal, esto es, los vectores de la base serán unitarios y perpendiculares entre sí.

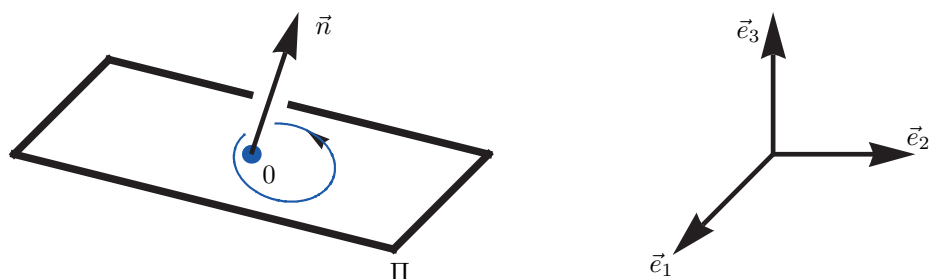
Es usual fijar el origen en el Sol. El primer vector \vec{e}_1 de la base se toma (unitario) sobre la semirrecta que parte del Sol y se dirige hacia la constelación de Aries (las estrellas se consideran fijas). Este vector tiene una propiedad interesante: que se encuentra sobre el plano en el que se mueve la Tierra (llamado plano de la Eclíptica). Éste será nuestro plano $\overline{x_1 x_2}$, y para ello, fijaremos sobre él nuestro segundo vector básico \vec{e}_2 ; como queremos que la base sea ortonormal, hay dos posibilidades, así que escogeremos aquella que hace que la Tierra gire en sentido positivo.

Aún nos falta el tercer vector básico \vec{e}_3 . Como ha de ser perpendicular a los dos anteriores y unitario, de nuevo hay sólo dos posibilidades, así que se escoge aquella que hace que el vector que une el Polo Sur con el Polo Norte terrestres apunte hacia arriba.



Una vez fijado el sistema de referencia, el espacio físico se identifica con \mathbb{R}^3 . Volvamos a la pregunta anterior: ¿Qué datos hacen falta para describir el movimiento de un planeta sobre una órbita elíptica cualquiera en \mathbb{R}^3 ? Todavía tiene sentido hablar de la excentricidad ε de la elipse, de la longitud a de su semieje mayor, y de un momento T de paso del planeta por el perihelio. Pero estos datos no son suficientes para determinar totalmente nuestra órbita, pues, además del argumento del perihelio ω (que habrá que ver desde dónde se mide), aún falta por precisar el plano Π en el que se mueve la partícula y un sentido de giro (o lo que es igual, una orientación en el plano).

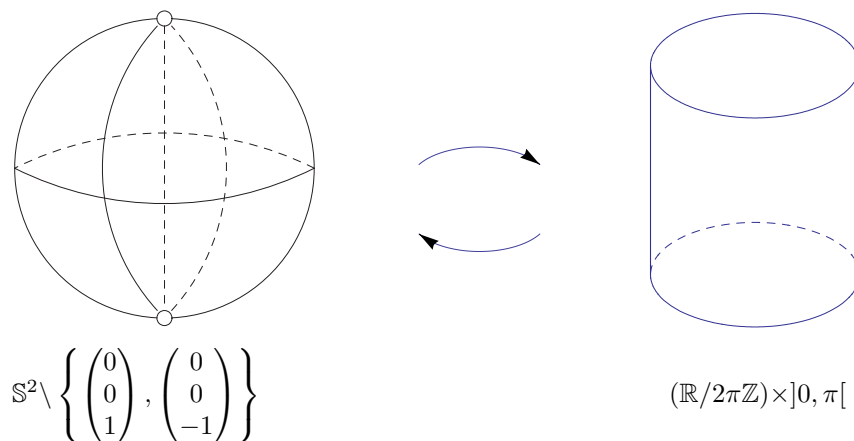
Nuestro primer objetivo será codificar estas dos cosas: el plano Π del movimiento y su orientación. Podemos matar ambos pájaros de un tiro dando un vector unitario normal a Π . Observa que hay dos vectores normales unitarios (como hay también dos orientaciones) para cada plano; ésto nos permite identificar cada plano vectorial orientado con el vector normal unitario \vec{n} en el sentido del momento angular de una partícula que girara con esa orientación:



Así pues, el conjunto de planos orientados de \mathbb{R}^3 puede identificarse con la esfera unidad \mathbb{S}^2 . A partir de ahora supondremos que nuestro plano Π no es el plano coordenado $\overline{x_1x_2}$, o lo que es igual, que el vector normal \vec{n} pertenece a la esfera menos los dos polos.

$$\Pi \neq \overline{x_1x_2} \Leftrightarrow \vec{n} \in \mathbb{S}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observa que la esfera menos los dos polos es homeomorfa al cilindro ‘sin tapas’ $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times]0, \pi[$,



$$\mathbb{S}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

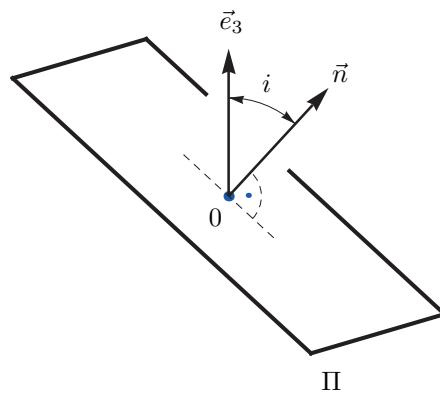
$$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times]0, \pi[$$

así que podremos parametrizar los planos orientados $\Pi \neq \overline{x_1x_2}$ usando dos números: un ángulo orientado sobre Π (será un elemento de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) y otro ángulo no orientado entre dos vectores no colineales de \mathbb{R}^3 (estará en el intervalo $]0, \pi[$).

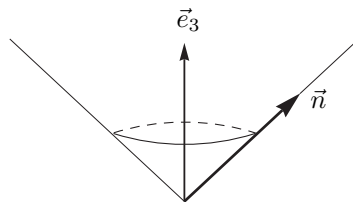
Vamos allá. Partimos de nuestro plano orientado $\Pi \neq \overline{x_1x_2}$, y definimos el *ángulo de inclinación*

$$i = \angle(\vec{e}_3, \vec{n}),$$

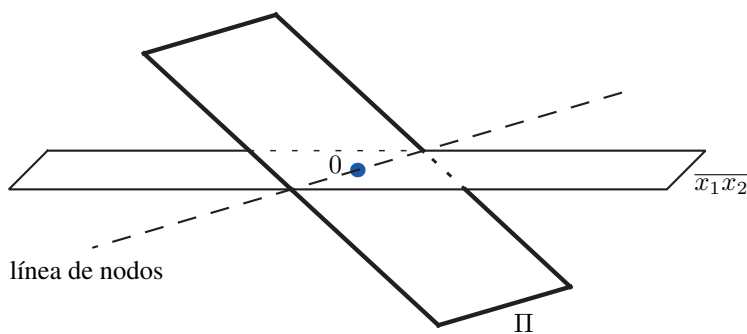
donde \vec{n} es el vector normal unitario asociado.



Observa que \vec{e}_3 y \vec{n} son linealmente independientes, así que $i \in]0, \pi[$. Observa también que i no es suficiente para determinar el plano Π , pues todos los vectores \vec{n} en un cono producen el mismo ángulo de inclinación i .

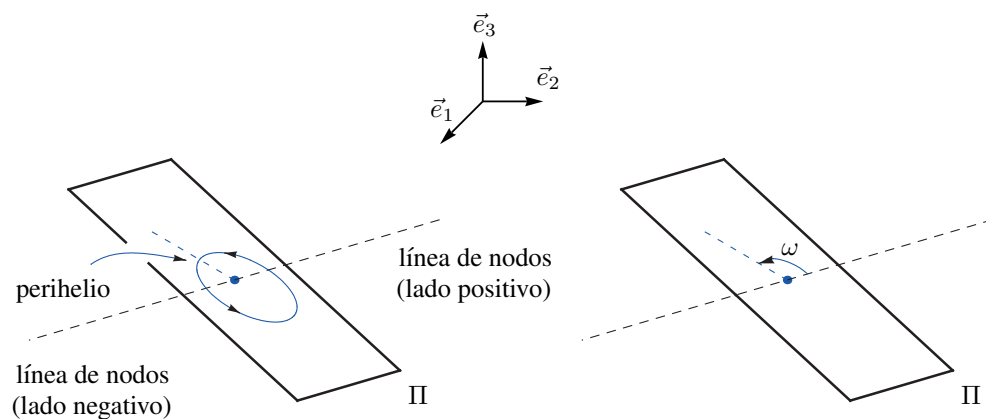


Consideremos la recta donde se cortan los planos Π y $\overline{x_1x_2}$, llamada línea de nodos:



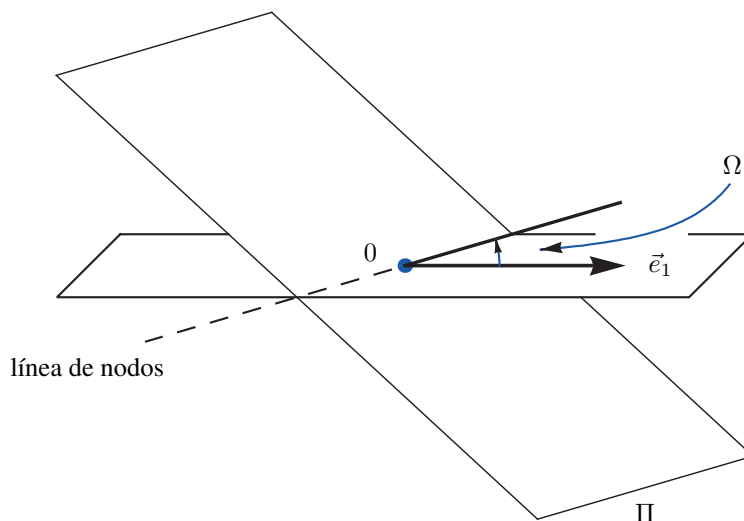
La línea de nodos nos servirá de punto de partida para medir el argumento del perihelio ω de nuestra órbita. Eso nos exige determinar el lado positivo de la misma; elegiremos aquel que el planeta cruza cuando asciende (el sentido de la palabra ‘ascender’ está determinado por el vector básico \vec{e}_3):

En este punto recordamos que la línea de nodos está contenida en el plano $\overline{x_1x_2}$.



Definimos:

$$\Omega = \angle(\vec{e}_1, \text{lado positivo de la línea de nodos}).$$



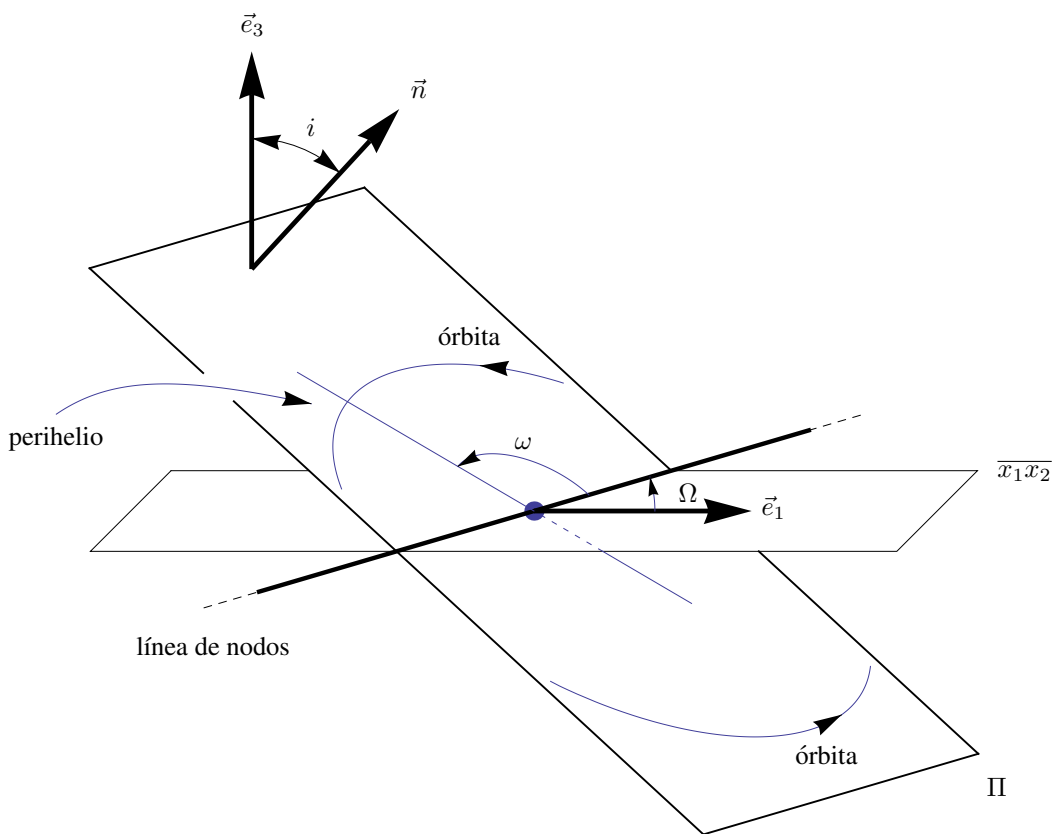
Es usual llamar a Ω longitud del nodo ascendente. Es un ángulo orientado, y por tanto, está en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Observa que *los ángulos i y Ω determinan el plano Π y su orientación.*

Ahora podemos describir la órbita por los elementos

$$\boxed{i, \Omega, a, \varepsilon, \omega, T.}$$

Es costumbre sustituir ω por $\varpi = \omega + \Omega$ (longitud del perihelio).

En resumen:



Como ilustración, observa la tabla siguiente con los valores de i , Ω , a , ε , ϖ y T para los planetas del sistema solar. La constante a aparece en unidades astronómicas (es decir, que 1 es la longitud del semieje mayor de la órbita de la Tierra) y T es el primer día de paso por el perihelio después del 31 de diciembre de 1899. En el caso de la Tierra, se toma, por convenio, $i = \Omega = 0$.

Planeta	i	Ω	a	ε	ϖ	T
Mercurio	7°,00	47°,14	0,387	0,206	75°,90	3 de marzo de 1900
Venus	3°,59	75°,78	0,723	0,007	130°,15	1 de abril de 1900
Tierra	0°,00	0°,00	1,000	0,017	101°,22	1 de enero de 1900
Marte	1°,85	48°,78	1,524	0,093	334°,22	18 de marzo de 1900
Júpiter	1°,31	99°,44	5,203	0,048	12°,72	1 de junio de 1904
Saturno	2°,5	112°,79	9,546	0,056	91°,09	20 de febrero de 1915
Urano	0°,77	73°,48	19,20	0,047	169°,05	20 de mayo de 1966
Neptuno	1°,78	130°,68	30,09	0,009	43°,83	15 de septiembre de 2042

Ejercicio. Identificando cada plano orientado con su vector normal unitario, hemos definido una aplicación

$$F : \mathbb{S}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times]0, \pi[, \quad \vec{n} \mapsto (\Omega, i).$$

Encuentra la expresión de F en coordenadas y prueba que es un difeomorfismo.

2.16. Ejercicios

2.1 Una elipse pasa por el punto $(8, 0)$ y tiene los focos en $(0, 0)$ y $(-1, -1)$. Escribe su ecuación. ¿Cuál es la dirección de su eje de excentricidad?

2.2 Una órbita elíptica del problema de Kepler

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

tiene momento angular $c = (0, 1, 1)$ y periodo mínimo 2. Calcula el plano en que se efectúa el movimiento y la excentricidad de la elipse.

2.3 Demuestra que la función de Bessel

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - x \sin u) du, \quad n = 1, 2, \dots$$

cumple la ecuación

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

2.4 Encuentra los movimientos acotados de

$$\ddot{x} = -\frac{x}{|x|^4}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

2.5 Se aplica el método de Newton a la ecuación

$$u - \varepsilon \sin u = \zeta,$$

con $\varepsilon = 0.01$, $\zeta = 0.1$ y $u_0 = \pi$. ¿Converge?

2.6 En este ejercicio consideramos un campo de fuerzas centrales *repulsivo*:

$$\ddot{x} = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

(a) Reescribe la ecuación como un sistema sobre las coordenadas polares.

(b) Demuestra que las soluciones no están acotadas en su intervalo maximal de definición.

2.7 Se considera la cónica de ecuación

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 3.$$

Clasificala. Encuentra su(s) foco(s) y su eje de excentricidad. Localiza, de manera razonada, el punto de esta cónica más próximo al origen.

2.8 De una solución $x = x(t)$ de la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{2x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

se sabe que $x(3) = (0, 1, 2)$ y $\dot{x}(3) = (1, 2, 3)$. Clasifica esta solución. ¿Cuál es su intervalo maximal de definición?

2.9 (Pollard). Un movimiento $x = x(t)$ en el campo gravitatorio Newtoniano

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

tiene momento angular $c \neq 0$ y energía $h \in \mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|x(t)|}{t} = \begin{cases} 0 & \text{si } h < 0, \\ \sqrt{2h} & \text{si } h \geq 0. \end{cases}$$

2.10 Clasifica las soluciones de la ecuación

$$|x| + \langle x, e \rangle = k, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

en función de $e \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$ (no necesariamente positivo).

2.11 Para resolver de manera aproximada la ecuación de Kepler

$$u - (1/2) \operatorname{sen} u = 3,$$

se usa el método de Newton. ¿Cómo debe de elegirse la aproximación inicial $u_0 \in [0, \pi]$ para que la sucesión obtenida sea monótona?

2.12 Sea $G \neq \{0\}$ un subgrupo aditivo de \mathbb{R} , es decir, $G \neq \emptyset$ y

- $x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$,
- $x \in G \Rightarrow -x \in G$.

y definamos $\alpha := \inf(G \cap]0, +\infty[)$.

(i) Si $\alpha = 0$, demuestra que G es denso.

(ii) Si $\alpha > 0$ prueba que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

2.13 Demuestra que si $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, periódicas y no constantes, con periodos respectivos $T_1, T_2 > 0$, y resulta que $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$ (los periodos no son conmensurables), entonces $h := h_1 + h_2$ no es periódica (de ningún periodo).

(Indicación: Usando un argumento de reducción al absurdo, supón que $h_1 + h_2$ fuese T -periódica para algún $T > 0$ y considera la función $\varphi(t) = h_1(t + T) - h_1(t) = h_2(t) - h_2(t + T)$. Prueba que φ es constante.)

2.14 Se aplica el método de Newton a la ecuación de Kepler:

$$u - \varepsilon \operatorname{sen} u = \zeta,$$

donde $\varepsilon \in [0, 1[$ y $\zeta \in]0, \pi[$. ¿Es cierto que hay convergencia para cualquier $u_0 \in]0, \pi[$ si ε es pequeño?

2.15 Describe el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| + \langle e, x \rangle = k \right\},$$

donde $e \in \mathbb{R}^3$ y $k > 0$ son dados.

2.16 Dado $\varepsilon > 1$ y $\zeta \in \mathbb{R}$, determina cuántas soluciones tiene la ecuación

$$u + \varepsilon \operatorname{senh} u = \zeta.$$

2.17 Sea $x = x(t)$ un movimiento elíptico en un campo gravitatorio Newtoniano. Expresa el área encerrada por la órbita en función de

(i) El semieje mayor y la excentricidad.

(ii) El periodo mínimo y el momento angular.

2.18 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^1 que cumple

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi, \quad f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Justifica la fórmula

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad x \in \mathbb{R},$$

y expresa los coeficientes b_n en términos de f .

2.19 Un asteroide se mueve sobre el plano (x_1, x_2) sometido a la influencia del campo gravitatorio Newtoniano producido por un sol fijo en el origen. Su trayectoria T puede describirse por la ecuación

$$T : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1/3 = 3.$$

- (a) ¿Tiene nombre propio esta figura geométrica?
- (b) Encuentra una ecuación para las coordenadas polares de T .
- (c) Encuentra su(s) foco(s) y su excentricidad.
- (d) Define la energía del asteroide. ¿Qué se puede decir sobre su signo?

2.20 Sea $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{u} = \frac{1}{3 - \cos u - \operatorname{sen}(2u)}.$$

- (a) Muestra que u es un difeomorfismo de \mathbb{R} sobre sí mismo.
- (b) Muestra que existe un número $T > 0$ tal que $u(t + T) = u(t) + 2\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (c) Muestra que T es el periodo mínimo de la curva $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

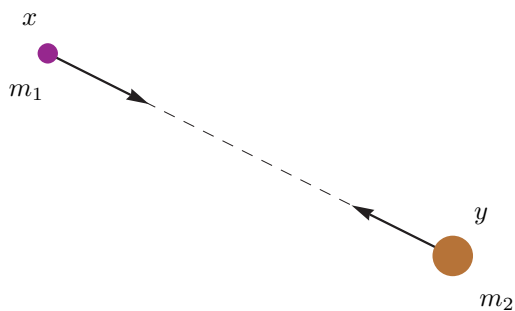
$$x(t) = (\cos u(t), \operatorname{sen} u(t)).$$

Lección 3

El problema de los dos cuerpos

3.1. Introducción

En todo lo que llevamos de curso hemos mantenido el postulado consistente en suponer que el Sol está fijo y su quietud no se ve perturbada por la atracción de los demás planetas. En este momento abandonamos esa simplificación y consideramos dos partículas en \mathbb{R}^3 que se mueven de acuerdo a la ley de gravitación.



Sus trayectorias $x = x(t)$, $y = y(t)$ cumplirán las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = G m_1 m_2 \frac{y - x}{|y - x|^3}, \\ m_2 \ddot{y} = G m_1 m_2 \frac{x - y}{|y - x|^3}. \end{cases}$$

Definimos $\Omega = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \Delta$, donde $\Delta = \{(\zeta, \zeta) : \zeta \in \mathbb{R}^3\}$. Es sencillo comprobar que Ω es abierto y conexo. Una solución de nuestro sistema deberá ser una función regular

$$(x, y) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega, \quad t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Hay dos grupos de movimientos en el espacio que actúan sobre las soluciones:

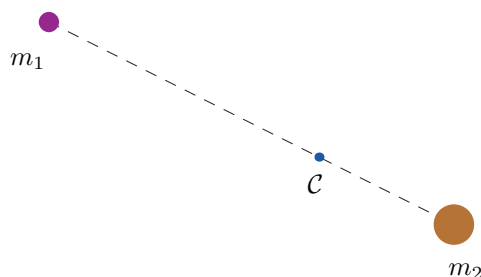
- (i) **Traslaciones de \mathbb{R}^3** Dado $a \in \mathbb{R}^3$ y una solución $(x(t), y(t))$ a nuestro sistema, $(x(t) + a, y(t) + a)$ es también una solución.
(El espacio es *homogéneo*).
- (ii) **Isometrías de \mathbb{R}^3** Dada una matriz ortogonal $R \in \mathcal{O}(3)$ y una solución $(x(t), y(t))$ a nuestro sistema, $(Rx(t), Ry(t))$ es también una solución.
(El espacio es *isótropo*).

La primera propiedad puede generalizarse. El *principio de relatividad de Galileo* dice:

- Dada una solución $(x(t), y(t))$ y constantes $p, v \in \mathbb{R}^3$, entonces $(x(t) + p + vt, y(t) + p + vt)$ también es solución.

Este hecho es de comprobación inmediata, pero veremos que tiene importantes consecuencias. Comenzamos con una solución $(x(t), y(t))$ y definimos su centro de masas

$$\mathcal{C}(t) := \frac{m_1}{m_1 + m_2}x(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}y(t).$$



Observamos que \mathcal{C}
está en el segmento que
une x e y ,

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Derivando,

$$\ddot{\mathcal{C}}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{x} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{y} = 0.$$

(Razonando heurísticamente, la fuerza resultante que actúa sobre el centro de masas debe ser nula, pues las fuerzas que ejerce cada partícula sobre la otra son de sentido opuesto pero de igual módulo y dirección).

Llegamos a la conclusión de que

$$\mathcal{C}(t) = \alpha + \beta t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3 \text{ constantes.}$$

(El centro de masas se desplaza a velocidad constante).

3.2. Mirando el sistema desde el centro de masas

Partimos de una solución (x, y) al problema de dos cuerpos.

Usando el principio de relatividad de Galileo,

$$\hat{x}(t) = x(t) - \alpha - \beta t, \quad \hat{y}(t) = y(t) - \alpha - \beta t$$

también es una solución, y su centro de masas está en equilibrio:

$$\hat{\mathcal{C}}(t) = \mathcal{C}(t) - \alpha - \beta t = 0.$$

Sea ahora $(x(t), y(t))$ una solución con centro de masas en el origen:

$$m_1 x + m_2 y = 0 \Rightarrow y = -\frac{m_1}{m_2} x.$$

Sustituyendo en la primera ecuación de nuestro sistema

$$m_1 \ddot{x} = -\frac{G m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{x}{|x|^3}.$$

De igual manera, de la segunda ecuación

$$m_2 \ddot{y} = -\frac{G m_2 m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{y}{|y|^3}.$$

Hemos desacoplado el sistema. Cada uno de los cuerpos es solución de un problema de Kepler con un Sol imaginario de masa

$$\frac{(\text{masa del otro cuerpo})^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

En particular, los momentos angulares $c_x = x \wedge \dot{x}$, $c_y = y \wedge \dot{y}$ deben ser constantes. Supongamos que $c_x \neq 0$; se cumplirá

$$|x| + \langle e, x \rangle = k, \quad e \in \mathbb{R}^2, k > 0.$$

(Suponemos ya que x se mueve sobre el plano \mathbb{R}^2). Como quiera que

$$y = -\lambda x, \quad \lambda = \frac{m_1}{m_2} > 0,$$

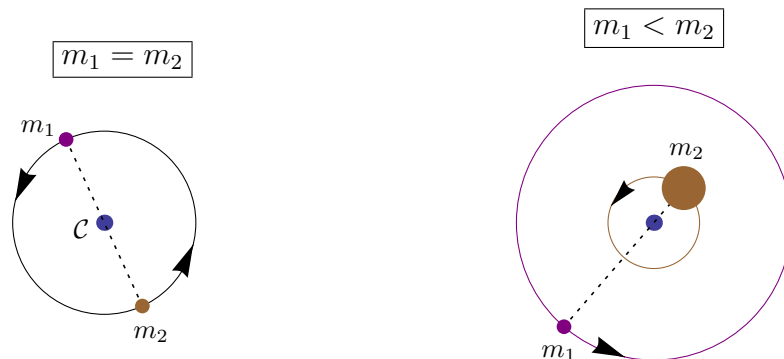
también y se mueve en el mismo plano, y cumple

$$|y| + \langle -e, y \rangle = k\lambda.$$

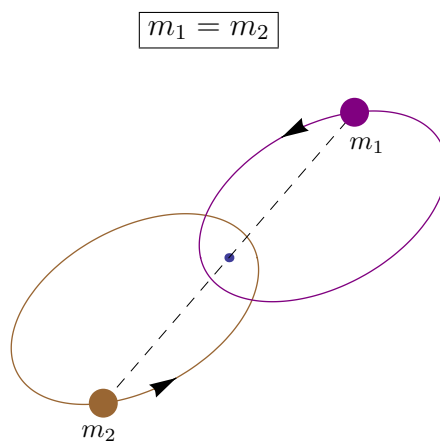
Las dos cónicas son del mismo tipo, y los ejes de excentricidad son opuestos.

Ejemplos:

- Movimiento circular: $e = 0$.

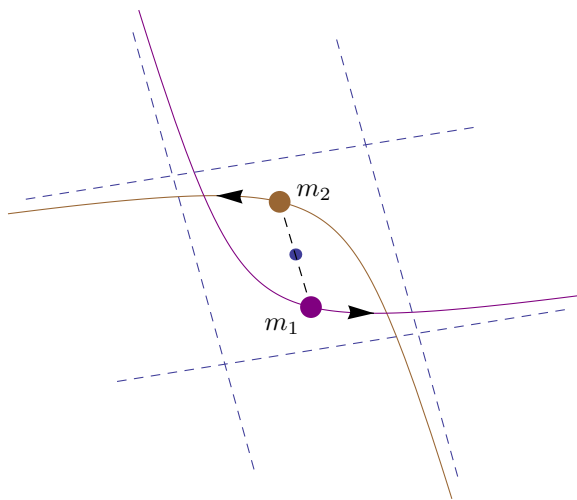


- Movimiento elíptico: $0 < |e| < 1$.



- Movimiento hiperbólico: $|e| > 1$.

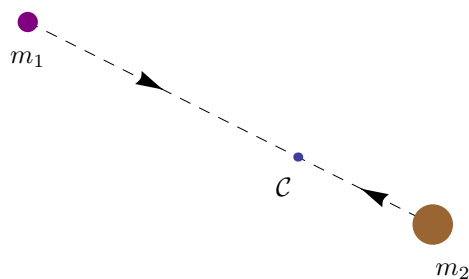
$$m_1 = m_2$$



Por el contrario, si seguimos suponiendo que el centro de masas está fijo en el origen pero $c_x \neq 0$, el movimiento de ambas partículas será rectilíneo.

Ejemplo:

$$m_1 < m_2$$



Colisión en el centro de masas

Pensemos ahora en una solución $(x(t), y(t))$ con el centro de masas en movimiento:

$$\mathcal{C}(t) = \alpha + \beta t, \quad \beta \neq 0.$$

Entonces, el movimiento puede no estar en un plano.

Ejemplo: Las trayectorias

$$x(t) = (\cos \omega t, \sin \omega t, t), \quad y(t) = (-\cos \omega t, -\sin \omega t, t),$$

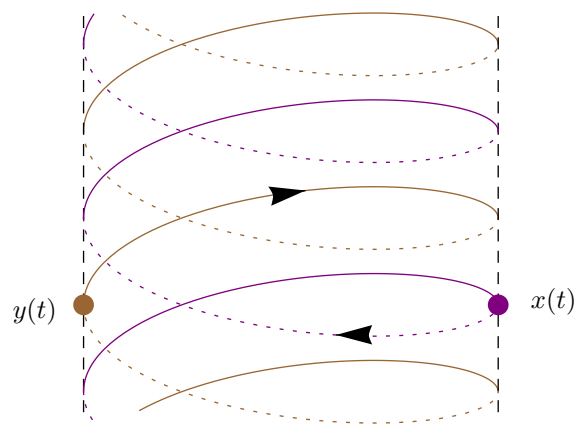
son solución al problema

de 2 cuerpos si $m_1 = m_2$

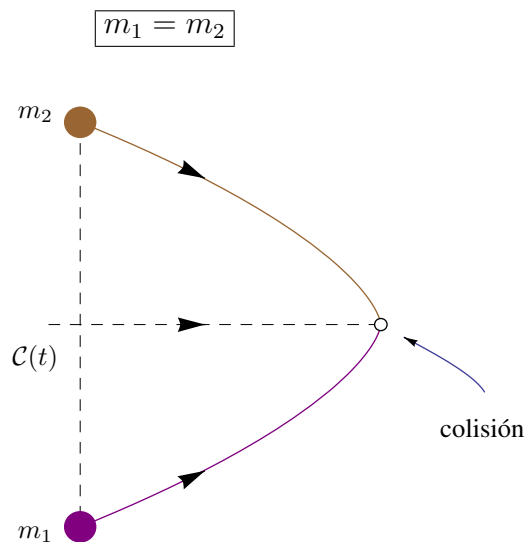
y ω se escoge de manera

apropiada. Las órbitas

son hélices.



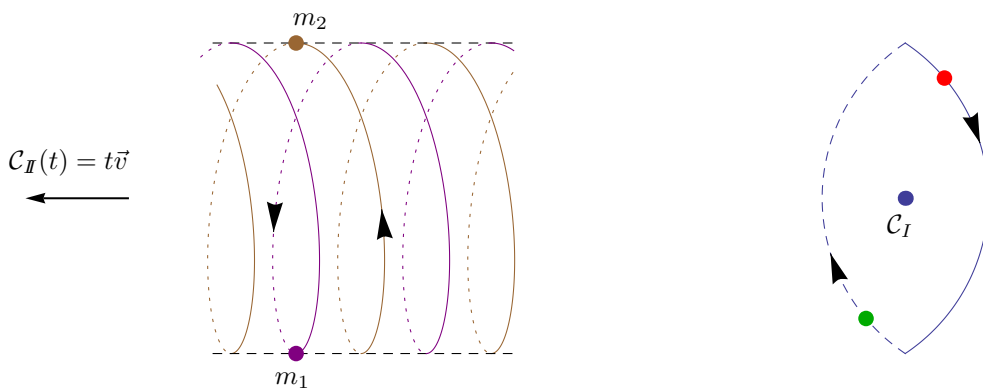
Por último, dibujamos una colisión con centro de masas móvil:



3.3. Ejercicios

3.1 (*Una historia de otra galaxia*). En un mundo muy lejano hay dos parejas de planetas gemelos; como están muy alejados entre sí, cada pareja se rige por un modelo de dos cuerpos.

Los astrónomos del primer sistema han observado que el centro de gravedad de su sistema está en reposo, $C_I(t) \equiv 0$, y sus órbitas son circulares, mientras que el centro de gravedad del segundo sistema se aleja según la ley $C_{II}(t) = t\vec{v}$.



Los astrónomos del segundo sistema sostienen justamente lo contrario, C_{II} está fijo y es el primer sistema el que se está alejando según la ley $C_I(t) = -t\vec{v}$.

¿Podrías ayudar a unos y a otros a ponerse de acuerdo?

3.2 En un problema de dos cuerpos con masas $m_1 = 2m_2$ que se mueven en el plano se tiene que

$$x(0) = (1, 0), \dot{x}(0) = (0, -\lambda); \quad y(0) = (-1, 0), \dot{y}(0) = (0, \lambda)$$

(aquí, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro). Describe el tipo de movimiento. La misma cuestión si $m_1 = m_2$ y

$$x(0) = (1, 0), \dot{x}(0) = (\lambda, 0); \quad y(0) = (0, 1), \dot{y}(0) = (\lambda, 0).$$

3.3 En un problema de dos cuerpos uno de los planetas describe una órbita circular. ¿Será también circular la órbita del otro planeta o puede describir una elipse de excentricidad positiva?

3.4 En un problema de dos cuerpos, las masas cumplen $m_1 = 2m_2$. Si el centro de masas está en el origen y las órbitas son elipses, ¿qué relación hay entre las excentricidades de las elipses?

3.5 Sea $(x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una solución al problema de 2 cuerpos con masas respectivas m_1, m_2 . Su *energía* se define como sigue:

$$h = \frac{m_1}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{y}(t)|^2 - \frac{G m_1 m_2}{|x(t) - y(t)|}.$$

Demuestra que esta cantidad no depende de t (la energía del sistema se conserva).

3.6 Se considera el problema de 2 cuerpos

$$m_1 \ddot{x} = G m_1 m_2 \frac{(y-x)}{|y-x|^3}, \quad m_2 \ddot{y} = G m_1 m_2 \frac{(x-y)}{|x-y|^3}, \quad (*)$$

y se supone que el centro de masas está en el origen. Determina μ de manera que y sea un movimiento en el campo gravitatorio Newtoniano

$$\ddot{y} = -\mu \frac{y}{|y|^3}. \quad (**)$$

¿Qué relación hay entre las energías asociadas a los sistemas (*) y (**)?

3.7 En una galaxia remota hay únicamente dos estrellas gemelas (es decir, de igual masa), con vectores de posición asociados $x = x(t)$, $y = y(t)$. En un instante dado nuestras estrellas se encuentran sobre los puntos

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

con velocidades respectivas

$$\dot{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \dot{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

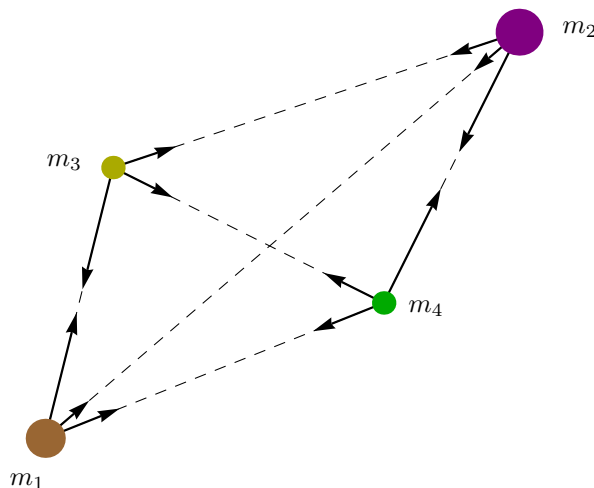
- Un observador intergaláctico y sin masa que pasaba por allí relata al regresar que tras una semana las estrellas chocaron en una colisión terrible. ¿Puede estar diciendo la verdad?
- Determina la posición del centro de masas en función del tiempo. El centro de masas en cuestión, ¿está más próximo a x , o a y , o la respuesta depende del tiempo?
- Sabiendo que la distancia entre las estrellas está acotada en el tiempo, ¿podrías dar una relación entre la masa común de nuestras estrellas y la constante de gravitación universal de este universo?

Lección 4

El problema de los n cuerpos

4.1. Introducción

En esta lección estudiaremos el movimiento de un número arbitrario (pero finito) n de partículas que se atraen mutuamente según la ley de gravitación universal.



En el caso más ‘simple’ de tres partículas, este problema ya le interesó al propio Newton, que, tras resolver el problema de dos cuerpos quiso estudiar el movimiento de la Luna. Y claro, sobre la Luna actúan dos fuerzas gravitatorias nada desdeñables, la del Sol y la de la Tierra. Es famosa la cita de Newton, que en una ocasión comentó que este problema le había dado dolor de cabeza...

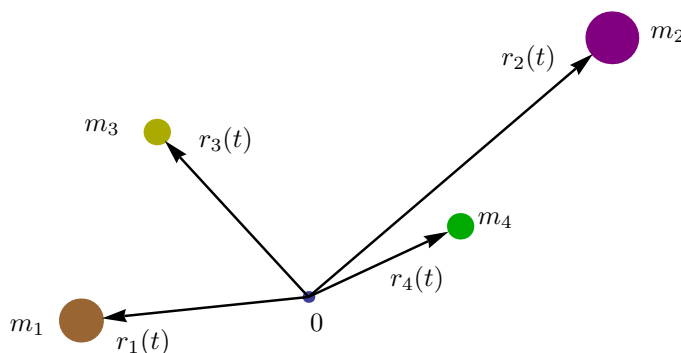
Y el dolor de cabeza de Newton no ha sido completamente resuelto, pues todavía hay preguntas sin respuesta en el problema de tres cuerpos (más aún en el problema de n cuerpos); estos problemas continúan siendo hoy en día un campo muy activo de investigación. No obstante, más que Newton sabemos, y nosotros estudiaremos aquí al-

gunos avances importantes. Por ejemplo, la fórmula de Lagrange-Jacobi nos permitirá llegar al Teorema de Sundman sobre colisiones totales, y nuestro estudio del problema restringido de tres cuerpos nos permitirá calcular las posiciones de equilibrio relativo para un cuerpo de masa despreciable (digamos un satélite artificial) que se ve sometido a la atracción de dos masas mucho más grandes (como la Tierra y la Luna).

4.2. Las ecuaciones en el problema de los n cuerpos. Potencial y energía

Describiremos la posición de cada cuerpo por una función vectorial

$$r_i : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), \quad 1 \leq i \leq n.$$



Según la segunda ley de Newton, se cumplirá

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_1, \dots, r_n) = \text{fuerza que ejercen los otros cuerpos sobre } m_i,$$

es decir,

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_1, \dots, r_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3}$$

Dos cuerpos no pueden ocupar la misma posición; por tanto, debemos excluir los conjuntos de colisión

$$i < j, \quad \Delta_{ij} = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n} : r_i = r_j\}.$$

Cada Δ_{ij} es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{3n} de dimensión $3n - 3$. Definimos

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}.$$

Observa que Δ es una unión finita de subespacios y es por tanto cerrado en \mathbb{R}^{3n} . Eso quiere decir que $\Omega = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es abierto.

Ejercicio. Demuestra que Ω es conexo.

Indicación: Siendo Ω abierto en \mathbb{R}^{3n} , conexión y arco-conexión son propiedades equivalentes; prueba que Ω es arco-conexo.

Continuemos ahora con nuestra exposición. Las soluciones al problema de n cuerpos habrá que buscarlas como funciones de clase C^∞

$$r : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta, \quad r = (r_1, \dots, r_n),$$

que cumplirán

$$\mathfrak{M} \ddot{r} = F(r), \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_1 I_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 I_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n I_3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Vamos a comenzar observando una propiedad importante de nuestro campo de fuerzas $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$.

F es conservativo, esto es, existe una función de clase C^1 $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = -\nabla \mathcal{V}$.

Por simplicidad, usaremos la notación

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(r_1, \dots, r_n), \quad \nabla \mathcal{V} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_n} \right),$$

donde cada parcial tiene tres componentes

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_i} \right).$$

La función \mathcal{V} , llamada el *potencial Newtoniano*, viene dada por

$$\mathcal{V}(r_1, \dots, r_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{|r_i - r_j|}, \quad (r_1, \dots, r_n) \in \Omega.$$

[Observa que

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} (|r_i - r_j|) &= \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} \\ \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{|r_i - r_j|} \right) &= - \frac{1}{|r_i - r_j|^2} \frac{\partial}{\partial r_i} (|r_i - r_j|) \end{aligned} \right].$$

En ocasiones escribiremos las ecuaciones de los n cuerpos en la forma

$$m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

que tiene la ventaja formal de que se refiere a una única función \mathcal{V} . Definimos la *energía cinética* de una solución $r = (r_1, \dots, r_n)$ como

$$T(t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i(t)|^2.$$

Finalmente, la *energía total* de la solución r viene dada por

$$h = T(t) + \mathcal{V}(r(t)),$$

y es claro que esta cantidad se conserva:

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \langle \ddot{r}_i, \dot{r}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}, \dot{r}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle m_i \ddot{r}_i + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}, \dot{r}_i \right\rangle = 0.$$

4.3. El teorema de Euler para las funciones homogéneas y el porqué de la no existencia de equilibrios

Comencemos observando la siguiente propiedad del potencial Newtoniano $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{V}(\lambda r_1, \dots, \lambda r_n) = \lambda^{-1} \mathcal{V}(r_1, \dots, r_n) \quad \text{si } \lambda > 0,$$

(decimos que \mathcal{V} es homogéneo de grado -1). Observa que hemos podido calcular $\mathcal{V}(\lambda r_1, \dots, \lambda r_n)$ porque el dominio Ω tiene la siguiente propiedad:

$$r \in \Omega, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda r \in \Omega.$$

Un subconjunto cualquiera $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ que cumpla esto es lo que se llama un **cono**. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *homogénea de grado $p \in \mathbb{R}$* si Ω es un cono y se cumple

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x), \quad x \in \Omega, \lambda > 0.$$

Teorema 4.3.1 (de Euler para las funciones homogéneas). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un cono abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^1 y homogénea de grado p . Entonces*

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = p f(x), \quad x \in \Omega.$$

Demostración. Fijemos $x \in \Omega$ y consideremos la función de clase \mathcal{C}^1 siguiente:

$$\lambda \in]0, +\infty[\mapsto f(\lambda x) = \lambda^p f(x).$$

Derivando ambas expresiones de nuestra función

$$\langle \nabla f(\lambda x), x \rangle = p \lambda^{p-1} f(x),$$

y se concluye tomando $\lambda = 1$. □

Podemos ahora concluir con un hecho muy intuitivo:

Proposición 4.3.2. *El problema de n cuerpos no tiene equilibrios.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Si $r \equiv cte$ fuese un equilibrio,

$$\ddot{r} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

y por el Teorema de Euler (observa que $\Omega = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es un cono abierto),

$$0 = \langle \nabla \mathcal{V}(r), r \rangle = -\mathcal{V}(r),$$

lo cual es imposible porque \mathcal{V} es negativa. \square

4.4. Soluciones no prolongables y partículas que se aproximan

Reescribamos el problema de los n cuerpos como un sistema de primer orden:

$$\dot{r}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = \frac{1}{m_i} F_i(r_1, \dots, r_n) = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}(r_1, \dots, r_n),$$

definido en $D = \Omega \times \mathbb{R}^{3n}$. Podemos aplicar los teoremas de existencia y unicidad y deducir que dado $(r_*, v_*) \in D$ hay una única solución maximal definida en un cierto intervalo $] \alpha, \omega [$ (con $\alpha < 0 < \omega$), que cumple la condición inicial

$$r(0) = r_*, \quad \dot{r}(0) = v_*.$$

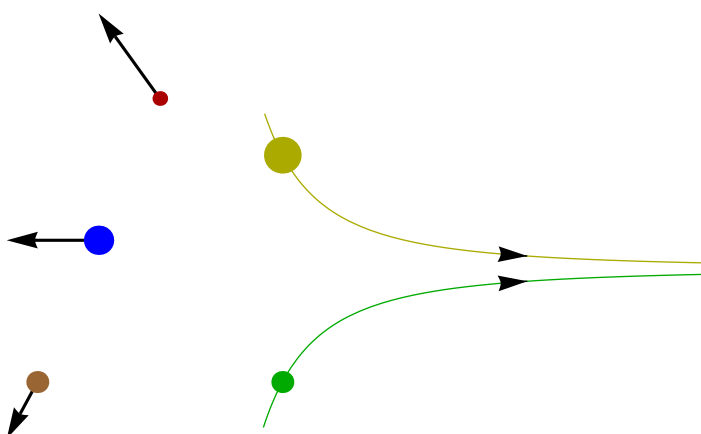
Vamos a probar que si la solución deja de estar definida en tiempo finito ($\alpha > -\infty$ o $\omega < +\infty$), esto es porque se aproxima al conjunto de colisiones Δ .

Teorema 4.4.1. *Sea $r = r(t)$ solución con $\omega < +\infty$. Definimos*

$$\rho(t) = \min \{ |r_i(t) - r_j(t)| : 1 \leq i < j \leq n \}.$$

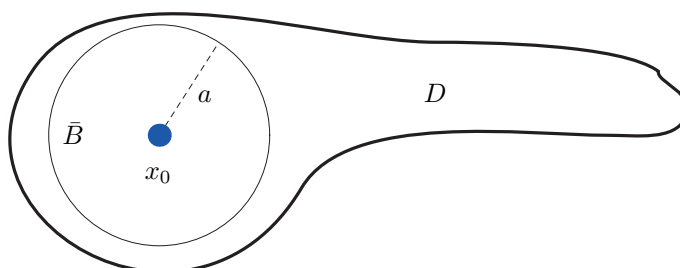
Entonces $\rho(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \omega$.

Es tentador enunciar este resultado como: la solución es prolongable hasta infinito a menos que haya una colisión de dos o más cuerpos. Si por ‘colisión’ entendemos la existencia de un límite común, este resultado no es correcto, pues (¡por extraño que parezca!) puede ocurrir que los cuerpos escapen a infinito en tiempo finito y ‘colisionen en infinito’ [Painlevé, Xia].



Para probar el teorema anterior vamos a necesitar una *versión cuantitativa del teorema de existencia para el problema de Cauchy*, que pasamos a exponer. Sea D un abierto de \mathbb{R}^d , $X : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un campo (continuo), y $x_0 \in D$. Elegimos $a > 0$ tal que

$$\bar{B} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| \leq a\} \subset D.$$



Definimos $K := \max_{x \in \bar{B}} \|X(x)\|$. Entonces cualquier solución de

$$\dot{x} = X(x), \quad x(0) = x_0,$$

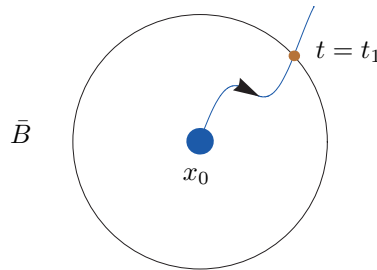
está definida sobre $[-a/K, a/K]$.

Nota. Aquí, $\|\cdot\|$ denota una norma cualquiera en \mathbb{R}^d .

Demostración. Sea $x = x(t)$ una solución, con intervalo maximal de definición (α, ω) . Si $\omega \leq a/K$, por los teoremas de prolongación $x(t)$ tendría que salir de \bar{B} antes de

$t = a/K$. Sea

$$t_1 = \min \left\{ t \in]0, \omega[: \|x(t) - x_0\| = a \right\} < a/K .$$



Por la regla de Barrow, $x(t_1) = x_0 + \int_0^{t_1} X(x(s)) ds$. Pero como $x(t) \in \bar{B}$ si $t \in [0, t_1]$, deducimos que

$$a = \|x(t_1) - x_0\| \leq \int_0^{t_1} \|X(x(s))\| ds \leq K t_1 \Rightarrow t_1 \geq a/K ,$$

una contradicción. □

Este resultado es muy intuitivo. Si una partícula se mueve sobre una región a velocidad como máximo K , no puede recorrer una distancia mayor que a antes de tiempo a/K .

Ejercicio. El intervalo $[-a/K, a/K]$ que da el teorema no tiene sentido si $K = 0$. ¿Qué sucede en este caso?

Vamos ahora a aplicar este resultado a nuestro problema de los n cuerpos:

Lema 4.4.2. *Dados $h \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, existe un número*

$$\tau = \tau(h, \delta) > 0$$

tal que cualquier solución $r = r(t)$ de energía h que cumpla $\rho(0) \geq \delta$ está definida en $[-\tau, \tau]$.

Demostración. Tomaremos

$$D = \Omega \times \mathbb{R}^{3n}, \quad X(r, v) = (v, \mathfrak{M}^{-1}F(r)), \quad x_0 = (r(0), v(0)),$$

siendo

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_1 I_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 I_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n I_3 \end{pmatrix}$$

la matriz de masas. Usaremos, por simplicidad, la norma del máximo:

$$\|(r, v)\| := \text{máx} \left\{ |r_1|, \dots, |r_n|, |v_1|, \dots, |v_n| \right\}.$$

Tomamos $a = \delta/4$ y observamos que en el conjunto \bar{B} se cumple

$$\left\| (r, v) - (r(0), v(0)) \right\| \leq \frac{\delta}{4} \Rightarrow |r_k - r_k(0)| \leq \frac{\delta}{4},$$

y por tanto,

$$|r_k - r_i| \geq |r_k(0) - r_i(0)| - |r_k - r_k(0)| - |r_i - r_i(0)| \geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2},$$

y esto nos permite estimar la segunda componente de X en \bar{B} :

$$\left| \frac{1}{m_k} F_k(r_1, \dots, r_n) \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{G m_i}{|r_k - r_i|^2} \leq \frac{4G}{\delta^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n m_i. \quad (*)$$

Ahora que sabemos que nuestras partículas no están demasiado juntas, podremos estimar también su energía potencial. Como, por otro lado, conocemos la energía total h , esto nos proporcionará cotas de la energía cinética, o, lo que es igual, de v . Vamos a las cuentas: partimos de la expresión de la energía (en tiempo $t = 0$),

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i(0)|^2 + \mathcal{V}(r(0)),$$

de donde deducimos que

$$|\dot{r}_k(0)| \leq \left[\frac{2}{m_k} (h - \mathcal{V}(r(0))) \right]^{1/2}.$$

Pero $-\mathcal{V}(r(0)) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{\delta}$, y llegamos a la estimación

$$|\dot{r}_k(0)| \leq \left[\frac{2}{m_k} \left(h + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{\delta} \right) \right]^{1/2} =: \Phi_k(h, \delta),$$

y en consecuencia, si $(r, v) \in \bar{B}$, tenemos

$$|v_k| \leq |v_k - \dot{r}_k(0)| + |\dot{r}_k(0)| \leq \frac{\delta}{4} + \Phi_k(h, \delta). \quad (**)$$

Combinando (*) y (**) observamos que es posible encontrar una cota $K = K(h, \delta)$ para el conjunto $\{\|X(r, v)\| : (r, v) \in \bar{B}\}$. Como esta cota sólo depende de h y de δ , lo mismo le ocurre a $\tau = a/K = \delta/(4K)$. \square

Después de este lema es muy fácil probar el teorema:

Demostración del Teorema 4.4.1. Por reducción al absurdo, si $\omega < +\infty$ pero $\rho(t) \not\rightarrow 0$, ha de existir una sucesión $t_n \rightarrow \omega$ y $\delta > 0$ tal que $\rho(t_n) \geq \delta$ para cada n .

Aplicando el lema anterior, la solución $r(t)$ podría prolongarse, como mínimo, hasta $t_n + \tau$. Ahora bien, τ es fijo (depende sólo de h y δ), y por tanto $t_n + \tau \geq \omega$ para n grande. Esto contradice la definición de ω . \square

4.5. El momento de inercia y la fórmula de Lagrange-Jacobi

Sea $r = (r_1, \dots, r_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ una solución al problema de los n cuerpos. Su *momento de inercia* se define como sigue:

$$I(t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i(t)|^2, \quad t \in J.$$

Vamos a derivar dos veces esta cantidad; obtenemos

$$\dot{I} = \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i, \dot{r}_i \rangle, \quad \ddot{I} = \sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i|^2 + \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i, \ddot{r}_i \rangle.$$

El primer sumando que aparece en la expresión de \ddot{I} es $2T$, el doble de la energía cinética. Respecto al segundo, recordamos que $m_i \ddot{r}_i = -(\partial \mathcal{V} / \partial r_i)(r)$, y por tanto,

$$\ddot{I} = 2T - \sum_{i=1}^n \left\langle r_i, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}(r) \right\rangle = 2T + \mathcal{V}(r),$$

igualdad en la que se ha usado el teorema de Euler para las funciones homogéneas. Hemos llegado así a la *identidad de Lagrange-Jacobi*:

$$\boxed{\ddot{I} = 2T + \mathcal{V}(r) = 2h - \mathcal{V}(r)}$$

Observa ahora que

$$\|(r_1, \dots, r_n)\| := \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i|^2}$$

es una norma en \mathbb{R}^{3n} . Pensando en clave de esta norma, podemos interpretar el momento de inercia como la norma de nuestra solución al cuadrado (bueno, también la energía cinética admite una interpretación similar). Significa esto que cualquier información que podamos obtener sobre la función momento de inercia nos hablará de la evolución del ‘tamaño’ de la solución.

Teniendo esto en cuenta, vamos a usar la identidad de Lagrange-Jacobi para probar que las órbitas con energía positiva y definidas para todo tiempo futuro escapan a infinito.

Ejemplo. Sea $r :]\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ una solución con energía $h > 0$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = +\infty.$$

Demostración. Como $\ddot{I} = 2h - \mathcal{V}(r)$ y $\mathcal{V} < 0$, deducimos que

$$\ddot{I} > 2h.$$

Fijemos ahora un instante $t_0 > \alpha$. La regla de Barrow implica que

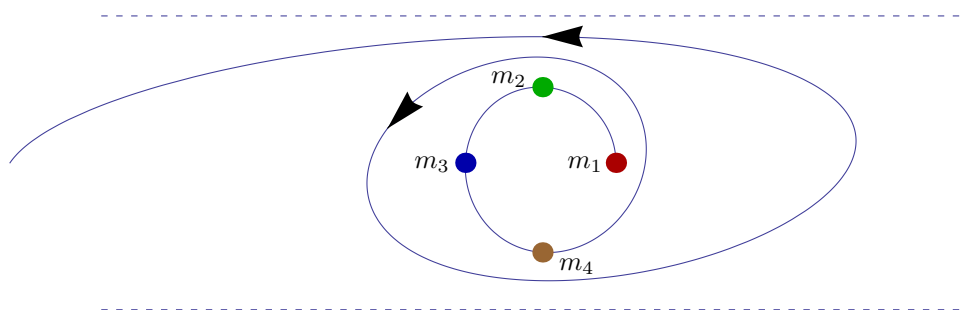
$$\dot{I}(t) \geq \dot{I}(t_0) + h(t - t_0), \quad t \geq t_0,$$

y de nuevo por la regla de Barrow,

$$I(t) \geq I(t_0) + \dot{I}(t_0)(t - t_0) + \frac{h(t - t_0)^2}{2} \rightarrow +\infty \text{ si } t \rightarrow +\infty.$$

□

Observa que esto no implica que alguno de los planetas escape a infinito ($|r_i(t)| \rightarrow \infty$). En principio podríamos tener también una situación del tipo



4.6. Centro de masas y conservación del momento lineal

En la sección anterior hemos obtenido algunas consecuencias de la conservación de la energía. A lo largo de esta sección y la siguiente encontraremos otras integrales primeras (cantidades que se conservan a lo largo de las soluciones). Partimos de una

solución cualquiera $r = (r_1, \dots, r_n) : J \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ al problema de los n cuerpos con masas m_1, \dots, m_n , y definimos su centro de masas

$$\mathcal{C}(t) := \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i(t), \quad t \in J,$$

donde $M = m_1 + \dots + m_n$ es la masa total del sistema.

Dicho con palabras, el centro de masas es una *media ponderada* de los distintos vectores de posición en la que el peso de cada partícula viene dado por la proporción de su masa en el conjunto del sistema. Vamos a estudiar su movimiento, y para ello calculamos su aceleración:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{C}}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i(t) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} + \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3}. \end{aligned}$$

Observa que los dos sumandos de la segunda línea se cancelan mutuamente. Detrás de esto está la ley de acción y reacción; puesto que cada fuerza que una partícula ejerce sobre otra está acompañada por otra fuerza igual y de sentido contrario que la segunda partícula ejerce sobre la primera, la fuerza total que actúa sobre el centro de masas es nula. Llegamos pues a que

$$\ddot{\mathcal{C}}(t) = 0,$$

o lo que es igual,

$$\mathcal{C}(t) = \alpha + \beta t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ constantes.}$$

Mencionemos aquí que la cantidad $\sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i(t) = M \dot{\mathcal{C}}(t)$ es el denominado *momento lineal* del sistema. Observa que otra forma de expresar las igualdades anteriores es

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i(t) = \text{cte} \quad (\text{el momento lineal se conserva}).$$

De manera similar a como observamos en el problema de los 2 cuerpos, dada una solución $r = (r_1, \dots, r_n)$, y constantes $p, v \in \mathbb{R}^3$, también $(r_1 - p - vt, \dots, r_n - p - vt)$ es solución. Este hecho permitirá, cuando se desee, cambiar el sistema de referencia al centro de masas y suponer que el centro de masas está fijo en el origen:

$$\hat{r}_i(t) := r_i(t) - \mathcal{C}(t) \Rightarrow \dot{\hat{\mathcal{C}}}(t) \equiv 0.$$

No obstante, hay una diferencia fundamental: si $n \geq 3$ ya **no es cierto** que cada partícula se mueva como si estuviera sometida únicamente a la atracción de un sol imaginario en el centro de masas.

Supongamos ahora que tenemos n partículas en puntos r_1, \dots, r_n conocidos, pero de las que ignoramos sus masas. Nos planteamos la cuestión: ¿qué se puede decir sobre su centro de masas?

Antes de reponder a esta pregunta vamos a recordar varios hechos importantes relacionados con la convexidad.

- Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ se dice *convexo* si cumple

$$x, y \in A, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

- Sea $\{A_\lambda\}_\lambda$ una familia cualquiera de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . Entonces, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es convexo.
- Dado $S \subset \mathbb{R}^d$, su envolvente convexa se define por

$$\text{co}(S) := \bigcap_{\substack{A \supset S \\ A \text{ convexo}}} A$$

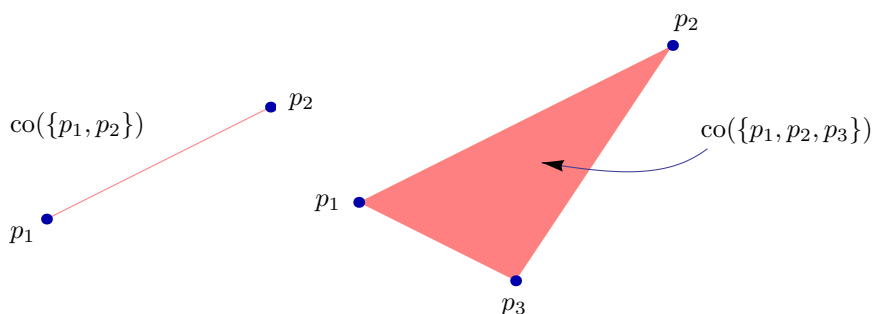
(es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A).

- Dados $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$,

$$\text{co}(\{p_1, \dots, p_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

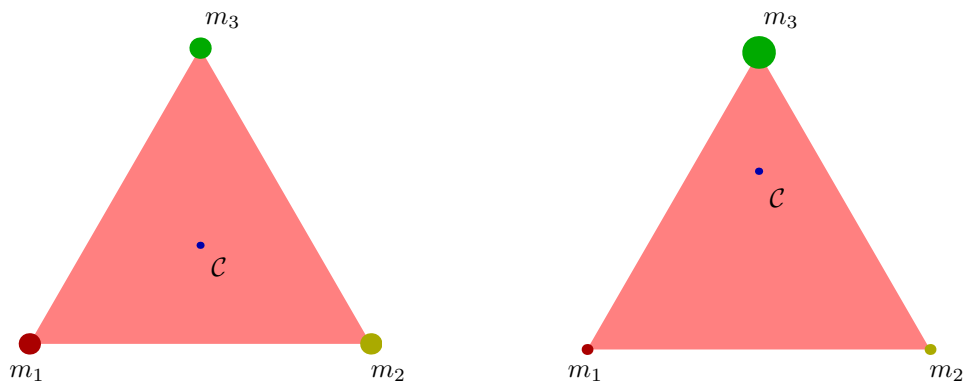
Ejercicio. Demuestra esta igualdad.

Por ejemplo, la envolvente convexa de dos puntos es el segmento que los une; la envolvente convexa de tres puntos no alineados es el triángulo con vértices en esos tres puntos.



Proposición 4.6.1. *El centro de masas \mathcal{C} de n partículas pertenece a la envolvente convexa $\text{co}(r_1, \dots, r_n)$ de sus vectores de posición.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{C} = \sum_{i=1}^n (m_i/M)r_i$, basta observar que $m_i/M \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n (m_i/M) = 1$. \square



Dos ejemplos en el plano \mathbb{R}^2

Ejercicio. Sean r_1, r_2, r_3 tres puntos no alineados de \mathbb{R}^2 . Describe exactamente el conjunto de puntos del plano que pueden ser centro de masas para un sistema de tres partículas situadas sobre los r_i .

4.7. Conservación del momento angular

Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución al problema de n cuerpos con masas m_1, \dots, m_n . Se define su *momento angular*:

$$c := \sum_{i=1}^n m_i (r_i \wedge \dot{r}_i).$$

En principio, $c = c(t)$ es una función de clase \mathcal{C}^∞ , pero vamos a probar que es independiente del tiempo. Derivando, obtenemos:

$$\frac{dc}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{r}_i \wedge \dot{r}_i + r_i \wedge \ddot{r}_i).$$

Observa que, de un lado, $\dot{r}_i \wedge \dot{r}_i = 0$, y del otro,

$$r_i \wedge (m_i \ddot{r}_i) = r_i \wedge \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i) \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j,$$

y por tanto

$$\frac{dc}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j.$$

Los dos sumandos a la derecha de la igualdad se cancelan mutuamente por la anti-simetría del producto vectorial, y en consecuencia,

$$\frac{dc}{dt} = 0.$$

Marcando otra vez las distancias con respecto al caso de dos cuerpos, si $n \geq 3$, la conservación del momento angular **no** significa que el movimiento sea plano, ni siquiera suponiendo que el centro de masas esté fijo en el origen.

Ejercicio. Demuéstralo.

(Indicación: usa el teorema de Cauchy de existencia de solución para problemas de valores iniciales).

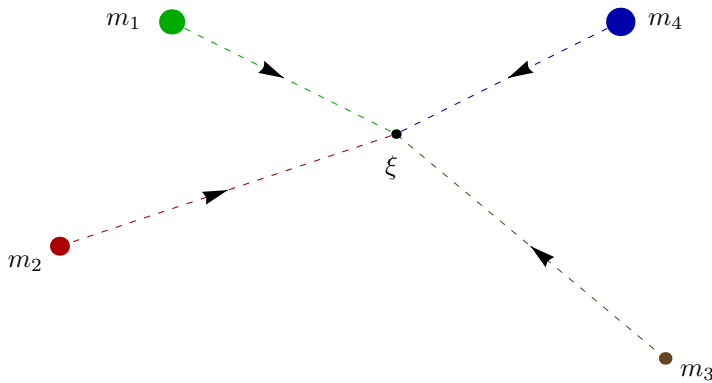
4.8. Colapso total

Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución al problema de n cuerpos, definida sobre un intervalo maximal $]\alpha, \omega[$. Supondremos, por comodidad, que el centro de masas se ha fijado en el origen:

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i = 0.$$

Decimos que la solución acaba en *colapso* (o colisión) *total* si existe un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \omega} r_i(t) = \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Colapso total

La primera observación es que el punto de colapso ha de ser el centro de masas, $\xi = 0$, pues

$$0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i(t) \rightarrow \xi \quad \text{si } t \rightarrow \omega.$$

La segunda observación es que el colapso total ha de producirse en tiempo finito, $\omega < +\infty$. Para verlo, observamos el comportamiento del potencial y del momento de inercia cuando $t \rightarrow \omega$,

$$\begin{cases} \mathcal{V}(r(t)) = -G \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{|r_i(t) - r_j(t)|} \rightarrow -\infty, \\ I(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i(t)|^2 \rightarrow 0. \end{cases}$$

Por otra parte, de la identidad de Lagrange-Jacobi,

$$\ddot{I} = -\mathcal{V}(r(t)) + 2h,$$

deducimos que existe un instante $t_0 < \omega$ tal que

$$\ddot{I}(t) \geq 1 \quad \text{si } t \in [t_0, \omega[$$

(pues $\lim_{t \rightarrow \omega} \ddot{I}(t) = +\infty$). Integrando dos veces, esto implica que

$$I(t) \geq I(t_0) + \dot{I}(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)^2/2, \quad t_0 \leq t < \omega.$$

Ahora bien, si $\omega = +\infty$, de la desigualdad anterior obtenemos

$$I(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

lo cual no es posible, pues ya sabemos que $I(t)$ tiende a 0.

Aplicación 4.8.1. Todavía no hemos estudiado ningún ejemplo concreto de solución para el problema de n cuerpos si $n \geq 3$. Nos disponemos a construir soluciones donde se produce colisión total en el problema de 3 cuerpos. Trabajaremos en el plano \mathbb{R}^2 , así que $r_i = (x_i, y_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$. Fijamos un punto $p_1 \in \mathbb{R}^2$ con $|p_1| = 1$ y consideramos la rotación de 120° en sentido contrario a las agujas del reloj.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$p_2 := R p_1, \quad p_3 := R p_2.$$

De $R^3 = I$ se sigue que

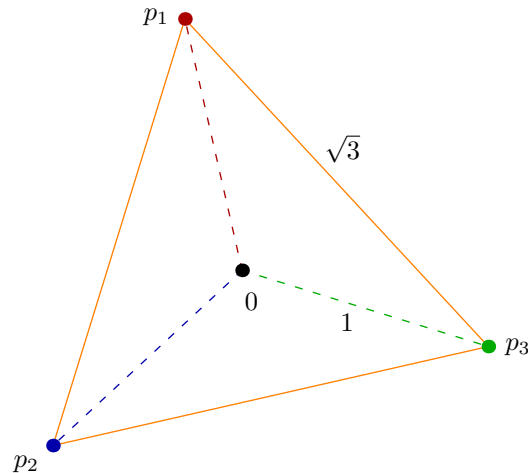
$$R^3 - I = (R - I)(I + R + R^2) = 0,$$

y como $\det(R - I) \neq 0$ (pues 1 no es un valor propio de la rotación R), deducimos que $I + R + R^2 = 0$, lo cual implica que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0.$$

Además, como R es una isometría, $|p_1| = |p_2| = |p_3| = 1$.

Por otro lado, $|p_2 - p_1| = |(R - I)p_1|$; ahora bien, se comprueba fácilmente que $R - I = \sqrt{3}O$ para cierta matriz ortogonal O , y por tanto $|p_2 - p_1| = \sqrt{3}$. De forma similar, $|p_1 - p_3| = |p_2 - p_3| = \sqrt{3}$.

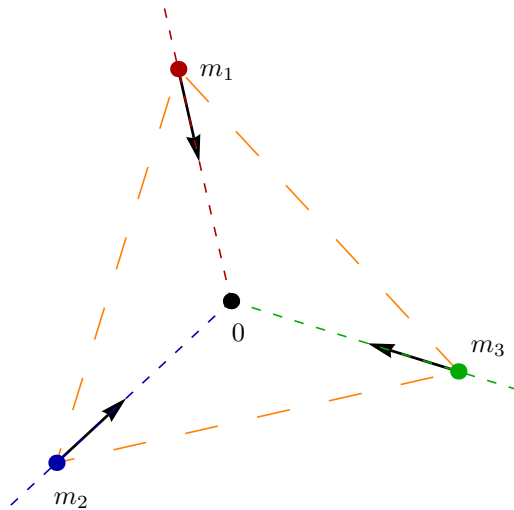


Así pues, p_1, p_2, p_3 ocupan los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen. Vamos a buscar una solución particular al problema de 3 cuerpos con masas

iguales $m_1 = m_2 = m_3 = m > 0$, del tipo

$$r_i(t) = \lambda(t) p_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde $\lambda :]\alpha, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ sea una función regular.



Observa que $\ddot{r}_i(t) = \ddot{\lambda}(t) p_i$ y, si $i \neq j$, $|r_i(t) - r_j(t)| = \lambda(t) |p_i - p_j| = \sqrt{3} \lambda(t)$, así que las ecuaciones del problema de tres cuerpos adquieren la forma siguiente:

$$\ddot{\lambda}(t) p_i = G m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{\lambda(t)(p_j - p_i)}{(\sqrt{3} \lambda(t))^3} = \frac{G m}{3\sqrt{3} \lambda(t)^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (p_j - p_i).$$

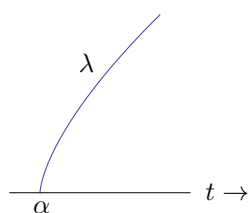
Ahora bien

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (p_j - p_i) = \sum_{j=1}^3 (p_j - p_i) = -3p_i,$$

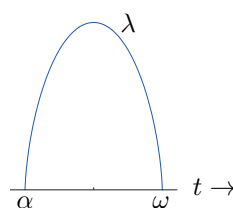
puesto que $p_1 + p_2 + p_3 = 0$. En consecuencia, las ecuaciones de los tres cuerpos se transforman en una única ecuación diferencial para la función $\lambda = \lambda(t)$:

$$\ddot{\lambda} = -\frac{G m / \sqrt{3}}{\lambda^2}.$$

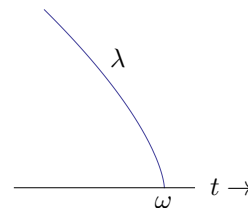
¡Caramba! Esta ecuación es una vieja conocida; modela el movimiento rectilíneo de una partícula sometida a la atracción de un sol fijo de masa $m/\sqrt{3}$. Recordando lo visto en la aplicación 1.13.1, el comportamiento de λ puede ser, esencialmente de tres tipos distintos. Ahora cada uno de estos tipos modelan un comportamiento distinto para el sistema de las tres partículas



Big-Bang inicial
expansión indefinida después



Big-Bang inicial
colapso final



Contracción desde tiempos remotos
colapso final

Observamos que, en cualquier caso, el momento angular se anula:

$$c = \sum_{i=1}^3 m_i (r_i \wedge \dot{r}_i) = \sum_{i=1}^3 m_i \lambda(t) \dot{\lambda}(t) (p_i \wedge p_i) = 0.$$

Este hecho es más general:

Teorema 4.8.2 (Sundman). *Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución del problema de n cuerpos con centro de masas fijo en el origen y una colisión total. Entonces su momento angular es $c = 0$.*

Como el sistema de n cuerpos es reversible podemos hablar de colapso final o de explosión inicial. Se sigue que, si suponemos que el universo nació de una explosión desde una partícula inicial, hemos de concluir que tiene momento angular cero (medido desde su centro de masas). Asimismo, como el momento angular del sistema solar¹ es claramente no nulo (los planetas giran en planos similares, todos en el mismo sentido), otra consecuencia del Teorema de Sundman es que el sistema solar no pudo originarse en la explosión de una partícula.

Para demostrar el teorema de Sundman necesitaremos un par de observaciones:

Lema 4.8.3 (Desigualdad de Sundman). *Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución del problema de n cuerpos. Entonces*

$$|c|^2 \leq 4I(\dot{I} - h).$$

Demostración. De la definición del momento angular,

$$c = \sum_{i=1}^n m_i (r_i \wedge \dot{r}_i),$$

¹que se supone aislado.

deducimos

$$|c| \leq \sum_{i=1}^n m_i |r_i \wedge \dot{r}_i| \leq \sum_{i=1}^n m_i |r_i| |\dot{r}_i| = \sum_{i=1}^n (\sqrt{m_i} |r_i|) (\sqrt{m_i} |\dot{r}_i|),$$

y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|c| \leq \left(\sum_{i=1}^n m_i |r_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n m_i |\dot{r}_i|^2 \right)^{1/2} = (2I)^{1/2} (2T)^{1/2},$$

o, lo que es igual,

$$|c|^2 \leq 4IT.$$

Ahora bien, la fórmula de Lagrange-Jacobi nos da $\ddot{I} = T + h$, y sustituyendo T por su valor en la desigualdad anterior obtenemos la desigualdad que buscábamos:

$$|c|^2 \leq 4I(\ddot{I} - h).$$

□

Lema 4.8.4 (Una desigualdad diferencial). *Sea $\varphi \in \mathcal{C}^2[t_0, \omega[$ una función que cumple*

$$\varphi(t) > 0, \quad \dot{\varphi}(t) < 0, \quad \ddot{\varphi}(t) \geq \alpha + \frac{\beta}{\varphi(t)}, \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Entonces

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)^2 - \alpha \varphi(t) - \beta \ln \varphi(t) \leq E, \quad t \in [t_0, \omega[,$$

donde $E = \dot{\varphi}(t_0)^2/2 - \alpha \varphi(t_0) - \beta \ln \varphi(t_0)$.

Demostración. Se multiplica la desigualdad por $\dot{\varphi}$ y se integra en $[t_0, t[$. □

Demostración del teorema de Sundman. De la desigualdad de Sundman observamos que

$$\ddot{I} \geq h + \frac{|c|^2}{4I}.$$

Como $I(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \omega$, deducimos (si $c \neq 0$) que $\ddot{I}(t) \rightarrow +\infty$. Así, $\ddot{I} > 0$ cerca de ω , y por tanto \dot{I} es creciente; en particular, \dot{I} tiene signo cerca de ω , $\dot{I}(t) > 0$ en un cierto intervalo $[t_0, \omega[$ o $\dot{I}(t) < 0$ en $[t_0, \omega[$. Como $I > 0$ pero $\lim_{t \rightarrow \omega} I(t) = 0$ deducimos que $\dot{I}(t) < 0$ en $[t_0, \omega[$, y aplicando la desigualdad diferencial anterior

$$\frac{1}{2} \dot{I}(t)^2 - hI(t) - |c|^2 \ln I(t) \leq E \quad \text{en } [t_0, \omega[.$$

Absurdo, porque $I(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \omega$. □

Ejercicio. En la demostración se ha usado que el centro de masas está fijo *en el origen*. Demuestra ahora que esto no es esencial en el Teorema de Sundman, es decir, que el resultado sigue siendo cierto si el centro de masas está fijo en un punto $p \in \mathbb{R}^3$ cualquiera. Demuestra también que el resultado deja de ser cierto si el centro de masas está en movimiento.

4.9. Las soluciones circulares de Lagrange: una danza para la música celeste

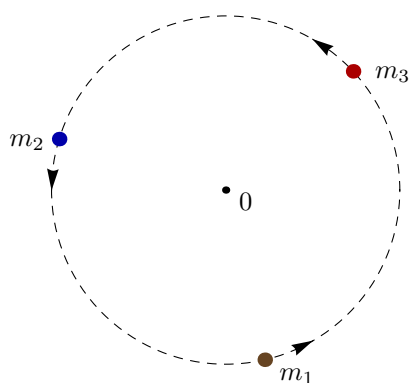
En la sección anterior hemos encontrado algunas soluciones al problema plano de tres cuerpos con masas iguales; se trataba de soluciones con colisión total. A continuación vamos a buscar nuevas soluciones, también para el problema plano de tres cuerpos, que serán *periódicas*, con las tres partículas girando en torno al centro de masas. Por comodidad, obligaremos a que el centro de masas esté fijo en el origen

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0.$$

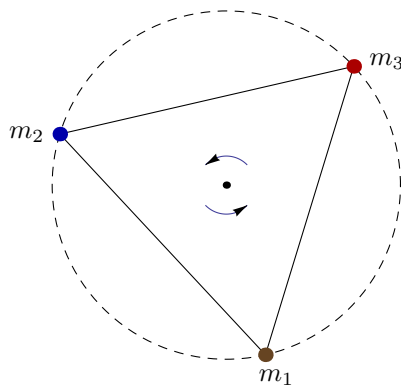
Antes de hacer cuentas es conveniente explicar de forma intuitiva cómo serán estas soluciones. Distinguiremos tres casos dependiendo de si las masas son iguales, o hay dos iguales y una distinta, o las tres son distintas:

Caso 1: $m_1 = m_2 = m_3$

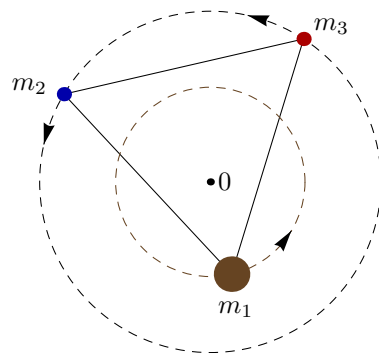
Ubicamos las masas en tres puntos equidistantes de una circunferencia y las hacemos girar a igual velocidad angular:



Si esta velocidad angular es pequeña, la fuerza de atracción entre las masas será preponderante y hará que entren dentro del círculo. Si, por el contrario, la velocidad es grande, la fuerza centrífuga hará que escapen fuera. Veremos que hay una velocidad angular que permite a las tres masas permanecer sobre la circunferencia. Podemos pensar que hay un triángulo equilátero (imaginario) que une las masas y que rota alrededor del centro de masas.

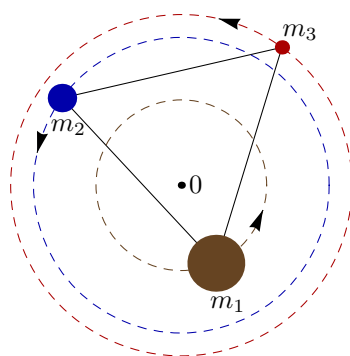


Caso 2: $m_1 > m_2 = m_3$



Ahora, el centro de masas
no coincide con el baricentro
del triángulo

Caso 3: $m_1 > m_2 > m_3$



El triángulo siempre
es equilátero; las tres
masas tienen igual
velocidad angular

Dado $\omega \neq 0$, definimos

$$R[\omega t] := \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\operatorname{sen} \omega t \\ \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Si fijamos un punto $z \in \mathbb{R}^2$, $z \neq 0$, la curva $t \mapsto R[\omega t] z$ describe una circunferencia de centro 0 y radio $|z|$ a velocidad angular constante ω .

Teorema 4.9.1. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no alineados. Entonces

$$r_i(t) = R[\omega t] z_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

es solución del problema de tres cuerpos si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(a) El centro de masas está en el origen, es decir,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0.$$

(b) los puntos z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero de lado $d > 0$,

$$(c) |\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}, \quad M = m_1 + m_2 + m_3.$$

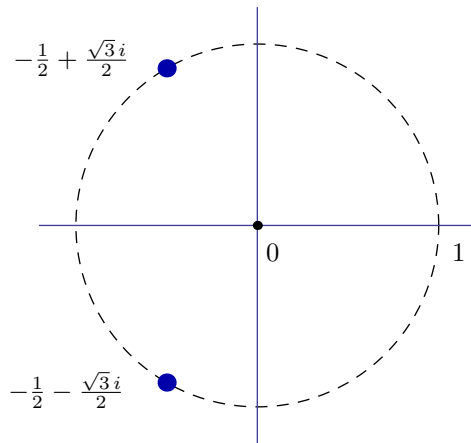
Demostraremos este resultado en un momento, pero antes vamos a ver de qué formas se pueden colocar tres masas m_1, m_2, m_3 en el plano si se quiere que el centro de masas esté en el origen y que formen un triángulo equilátero.

Lema 4.9.2. Dadas tres masas m_1, m_2, m_3 y $d > 0$, existe un triángulo equilátero de lado d de manera que si se ubican las masas en sus vértices, entonces el centro de masas está en el origen. Además, este triángulo es único salvo isometrías alrededor del origen.

Demostración. Usaremos notación compleja y supondremos $d = \sqrt{3}$ (después se puede usar una homotecia). Los triángulos equiláteros de lado $\sqrt{3}$ se pueden describir por su baricentro λ y el argumento θ del primer vértice visto desde el baricentro:

$$z_1 = \lambda + e^{i\theta}, \quad z_2 = \lambda + \zeta e^{i\theta}, \quad z_3 = \lambda + \bar{\zeta} e^{i\theta},$$

donde $\zeta \neq 1$ es una raíz cúbica de la unidad, (esto es $\zeta^3 = 1$). Hay dos posibilidades: $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ o bien $\zeta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$.



Observa que la elección $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ nos llevará a un triángulo orientado en sentido positivo, y $\zeta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$, a sentido negativo. Imponiendo que el centro de masas sea el origen,

$$0 = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = \lambda M + e^{i\theta}(m_1 + m_2 \zeta + m_3 \bar{\zeta}),$$

o lo que es igual,

$$\lambda = -\frac{e^{i\theta}(m_1 + m_2 \zeta + m_3 \bar{\zeta})}{M},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\theta} \left(1 - \frac{m_1 + m_2 \zeta + m_3 \bar{\zeta}}{M} \right), \\ z_2 &= e^{i\theta} \left(\zeta - \frac{m_1 + m_2 \zeta + m_3 \bar{\zeta}}{M} \right), \\ z_3 &= e^{i\theta} \left(\bar{\zeta} - \frac{m_1 + m_2 \zeta + m_3 \bar{\zeta}}{M} \right). \end{aligned}$$

□

Observación: El lema anterior describe las soluciones del sistema

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = d, \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0, \\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Se trata de un sistema no lineal con 6 incógnitas y 5 ecuaciones.

Demostración del Teorema. Observamos que, como $R[\omega t]$ es una isometría,

$$|r_i(t) - r_j(t)| = |z_i - z_j| = r_{ij} \quad \text{no depende de } t \in \mathbb{R}.$$

Además, $\frac{d^2}{dt^2} R[\omega t] = -\omega^2 R[\omega t]$, y deducimos que $r = (r_1, r_2, r_3)$ es una solución de nuestro problema si y sólo si

$$(S) = \begin{cases} -\omega^2 z_1 = \frac{G m_2}{r_{12}^3} (z_2 - z_1) + \frac{G m_3}{r_{13}^3} (z_3 - z_1), \\ -\omega^2 z_2 = \frac{G m_1}{r_{12}^3} (z_1 - z_2) + \frac{G m_3}{r_{23}^3} (z_3 - z_2), \\ -\omega^2 z_3 = \frac{G m_1}{r_{13}^3} (z_1 - z_3) + \frac{G m_2}{r_{23}^3} (z_2 - z_3). \end{cases}$$

Se trata de un sistema *no lineal*, pues r_{ij} depende de z_i y de z_j . Pero vamos a pensar en él como si se tratase de un sistema lineal homogéneo en el que los r_{ij} están fijos y las incógnitas son los z_i . Multiplicando la primera ecuación por m_1 , la segunda por m_2 , la tercera por m_3 , y sumando, obtenemos que

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0, \quad (*)$$

es decir, el centro de masas debe estar en el origen. Ahora podemos sustituir una de las ecuaciones de nuestro sistema (S) por (*); lo hacemos con la tercera, y obtenemos

$$\begin{cases} -\omega^2 z_1 = \frac{G m_2}{r_{12}^3} (z_2 - z_1) + \frac{G m_3}{r_{13}^3} (z_3 - z_1), \\ -\omega^2 z_2 = \frac{G m_1}{r_{12}^3} (z_1 - z_2) + \frac{G m_3}{r_{23}^3} (z_3 - z_2), \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0. \end{cases}$$

Recordemos ahora que $z_i = (x_i, y_i)$ son puntos del plano. Los vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ deben resolver $A\xi = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{G m_2}{r_{12}^3} - \frac{G m_3}{r_{13}^3} & \frac{G m_2}{r_{12}^3} & \frac{G m_3}{r_{13}^3} \\ \frac{G m_1}{r_{12}^3} & \omega^2 - \frac{G m_1}{r_{12}^3} - \frac{G m_3}{r_{23}^3} & \frac{G m_3}{r_{23}^3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Decir que los puntos z_1, z_2 y z_3 no están alineados implica que x, y son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 . Así, el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $A\xi = 0$ ha de tener dimensión al menos 2, y deducimos que $r(A) = 1$. En particular,

$$\begin{vmatrix} \frac{G m_1}{r_{12}^3} & \frac{G m_3}{r_{23}^3} \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{G m_2}{r_{12}^3} & \frac{G m_3}{r_{13}^3} \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se sigue que $r_{12} = r_{23} = r_{13}$. Así, si $r(t)$ es solución, los puntos z_1, z_2, z_3 han de ser vértices de un triángulo equilátero de lado $d > 0$.

Calculamos $\det A$. Ahora que sabemos que $r_{ij} = d$, multiplicamos la tercera fila por G/d^3 y se la restamos a la primera:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{GM}{d^3} & 0 & 0 \\ \frac{G m_1}{d^3} & \omega^2 - \frac{G(m_1 + m_3)}{d^3} & \frac{G m_3}{d^3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = \\ &= m_3 \left(\omega^2 - \frac{GM}{d^3} \right)^2. \end{aligned}$$

De $\det A = 0$ se sigue $|\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero de lado d , que el centro de masas está en el origen, y que $|\omega| = \sqrt{GM/d^3}$. Es muy fácil comprobar que se cumplen las ecuaciones del sistema (S) , y por tanto $r = (r_1, r_2, r_3)$ es solución al problema de 3 cuerpos. \square

Ejercicio. Comprueba los detalles.

4.10. El problema restringido de tres cuerpos

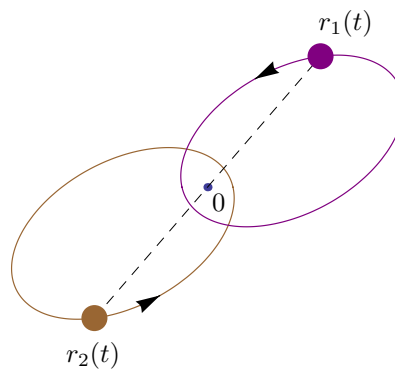
Es una idealización que consiste en suponer que hay dos cuerpos con masas positivas $m_1 \geq m_2 > 0$ (llamados *primarias*), y un tercero con masa despreciable $m_3 = 0$. Para ‘deducir’ las ecuaciones partimos del problema de 3 cuerpos,

$$\ddot{r}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{G m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

y hacemos $m_3 \searrow 0$. Obtenemos:

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 = \frac{G m_2}{|r_2 - r_1|^3} (r_2 - r_1), & \ddot{r}_2 = \frac{G m_1}{|r_1 - r_2|^3} (r_1 - r_2), \\ \ddot{r}_3 = \frac{G m_1}{|r_1 - r_3|^3} (r_1 - r_3) + \frac{G m_2}{|r_2 - r_3|^3} (r_2 - r_3), \end{cases}$$

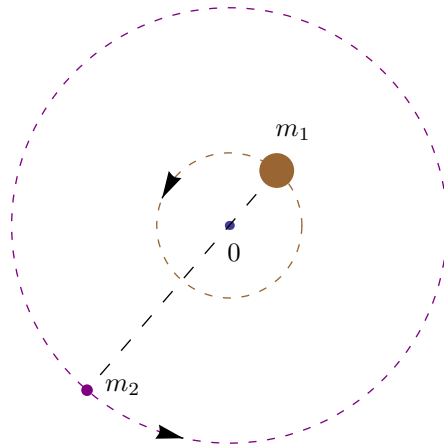
El sistema en las primarias se ha desacoplado (no depende de r_3) y es un problema usual de 2 cuerpos. Supondremos que $r_1(t)$ y $r_2(t)$ son soluciones conocidas, y, con más precisión, periódicas, y que el centro de masas está sobre el origen.



Llegamos a un sistema no autónomo (periódico) para r_3 :

$$\ddot{r}_3 = \frac{G m_1}{|r_1(t) - r_3|^3} (r_1(t) - r_3) + \frac{G m_2}{|r_2(t) - r_3|^3} (r_2(t) - r_3). \quad (*)$$

Trabajaremos en el plano, de manera que $r_i(t) \in \mathbb{R}^2$. Nos concentraremos en el *problema restringido circular*, que consiste en suponer que las primarias siguen órbitas circulares:



Comencemos describiendo el movimiento de las primarias; como se mueven a la misma velocidad angular (constante) sobre circunferencias en torno al origen, su movimiento se podrá expresar como

$$r_1(t) = R[\omega t] P_1, \quad r_2(t) = R[\omega t] P_2, \quad (**)$$

donde

$$R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad P_1 = r_1(0), \quad P_2 = r_2(0) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos a cambiar de unidades en la masa, el espacio y el tiempo (podemos hacer estos cambios de escala modificando el valor de G). En primer lugar, supondremos que la masa total del sistema es 1:

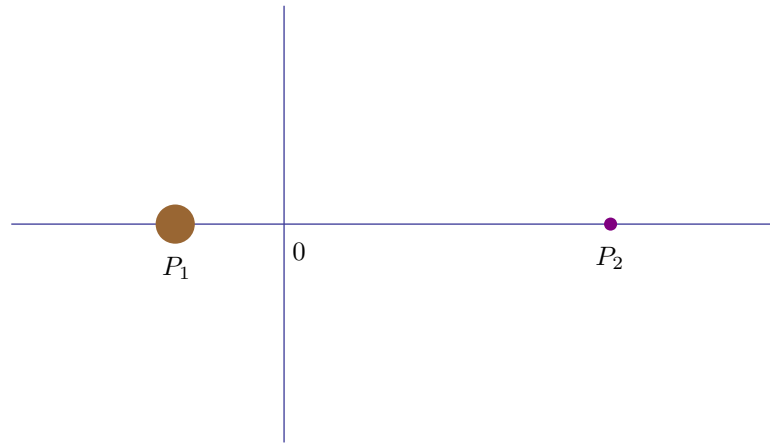
$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu, \quad \mu \in \left] 0, \frac{1}{2} \right].$$

El número μ será el parámetro de nuestro sistema. Si $\mu = 1/2$, las masas son iguales; a medida que μ tiende a 0, m_1 se hará más dominante.

Además, puesto que el centro de masas está en el origen,

$$(1 - \mu)P_1 + \mu P_2 = 0, \quad (***)$$

y tras una traslación en la variable tiempo, no es restrictivo suponer que P_1 y P_2 están sobre el eje de abscisas, con P_1 a la izquierda y P_2 a la derecha.



Observa ahora que la distancia entre las primarias es constante (e igual a la distancia entre P_1 y P_2). Tras cambiar de unidades en el espacio, podemos suponer que esta distancia es 1:

$$|P_1 - P_2| = 1,$$

y combinando este hecho con (***) deducimos que

$$P_1 = (-\mu, 0), \quad P_2 = (1 - \mu, 0).$$

Introduzcamos ahora un cambio de escala en el tiempo de manera que el año de las primarias sea exactamente 2π . Recordando (**), esto significa que $|\omega| = 1$, y no es restrictivo suponer que el sentido de giro es positivo:

$$r_1(t) = R[t] P_1, \quad r_2(t) = R[t] P_2.$$

Para calcular el valor de la constante de gravitación universal G con estas unidades recordamos que r_1 y r_2 deben ser solución al problema de dos cuerpos con masas $m_1 = 1 - \mu$ y $m_2 = \mu$; usando que la matriz $R[t]$ es ortogonal para cada t , un cálculo sencillo implica que $G = 1$. La ecuación (*) se convierte en:

$$\ddot{r}_3 = \frac{1 - \mu}{|R[t] P_1 - r_3|^3} (R[t] P_1 - r_3) + \frac{\mu}{|R[t] P_2 - r_3|^3} (R[t] P_2 - r_3).$$

Simplificaremos esta ecuación si introducimos un sistema de referencia para r_3 que gire con las primarias. Dicho de otra forma, usaremos el cambio de variables

$$r_3 = R[t] z$$

Observa que es un cambio admisible, con inversa $z = R[-t] r_3$, ambas de clase C^∞ . Derivando obtenemos:

$$\frac{d}{dt}R[t] = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t & -\operatorname{cos} t \\ \operatorname{cos} t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} = R[t]J,$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Derivando de nuevo,

$$\frac{d^2}{dt^2}R[t] = \frac{d}{dt}(R[t]J) = \left(\frac{d}{dt}R[t]\right)J = R[t]J^2 = -R[t],$$

pues $J^2 = -I$. En consecuencia,

$$\ddot{r}_3 = \left(\frac{d^2}{dt^2}R[t]\right)z + 2\left(\frac{d}{dt}R[t]\right)\dot{z} + R[t]\ddot{z} = R[t](\ddot{z} + 2J\dot{z} - z),$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$\begin{cases} \ddot{z} + 2J\dot{z} = z + \frac{1-\mu}{|P_1-z|^3}(P_1-z) + \frac{\mu}{|P_2-z|^3}(P_2-z) \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}. \end{cases}$$

En el cálculo anterior se ha usado que la rotación $z \mapsto R[t]z$ es lineal, biyectiva e isométrica como aplicación de \mathbb{R}^2 en sí mismo.

Observa también que en este sistema de referencia nuestra ecuación se ha transformado en autónoma; a cambio, nos han aparecido dos términos que no provienen de fuerzas gravitatorias ($2J\dot{z}$ y z).

Los términos de la derecha se pueden ver como el gradiente de una función:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|P_1-z|} + \frac{\mu}{|P_2-z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

(la constante $(1/2)\mu(1-\mu)$ es tradicional). El sistema se puede escribir ahora de manera ‘resumida’:

$$\ddot{z} + 2J\dot{z} = \nabla\Phi(z), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}.$$

4.11. La constante de Jacobi y los cinco puntos de libración

Una vez que hemos llegado a esta concisa forma de expresar el sistema podemos deducir sus propiedades más básicas.

La constante de Jacobi : Dada una solución $z = z(t)$ definimos

$$\mathcal{J} = 2\Phi(z(t)) - |\dot{z}(t)|^2,$$

y observamos que \mathcal{J} es una constante del movimiento (constante de Jacobi):

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = 2\langle \nabla\Phi(z), \dot{z} \rangle - 2\langle \dot{z}, \ddot{z} \rangle = 4\langle J\dot{z}, \dot{z} \rangle = 0,$$

pues $\langle Jp, p \rangle = 0 \forall p \in \mathbb{R}^2$.

Nota. El problema restringido circular se formula como una ecuación de segundo orden en el plano. En el espacio de estados (posición-velocidad) se trata de un sistema de primer orden en \mathbb{R}^4 . Si se fija un valor regular de la integral primera $\mathcal{J} = C$, entonces queda definida una variedad regular tridimensional $M = \mathcal{J}^{-1}(C) \subset \mathbb{R}^4$ que es invariante. De esta manera, el problema restringido para un valor regular fijo de la constante de Jacobi se puede escribir como un sistema del tipo

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in M, \dim M = 3.$$

donde X es un campo vectorial sobre M .

Puntos de libración : Vamos a buscar las soluciones constantes de nuestro sistema:

$$\ddot{z} + 2J\dot{z} = \nabla\Phi(z).$$

Serán los puntos críticos de Φ , es decir, las soluciones de

$$\nabla\Phi(z) = 0,$$

o lo que es igual,

$$z = \frac{1-\mu}{|P_1-z|^3}(z-P_1) + \frac{\mu}{|P_2-z|^3}(z-P_2).$$

Por simplicidad escribiremos $\rho_1 = |z - P_1|$, $\rho_2 = |z - P_2|$, llegando así a la igualdad

$$\left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)z = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}P_1 - \frac{\mu}{\rho_2^3}P_2.$$

Vamos a distinguir varios casos, dependiendo de si z se encuentra o no sobre el eje de abcisas y en qué parte de éste:

1. Comencemos suponiendo que

$$z = (\alpha, 0)$$

se encuentra sobre el eje de abscisas. Recordando que $P_1 = (-\mu, 0)$ y $P_2 = (1 - \mu, 0)$, la igualdad anterior se convierte en

$$\left(1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) \alpha = \frac{(1 - \mu)\mu}{\rho_1^3} - \frac{(1 - \mu)\mu}{\rho_2^3}.$$

Reescribamos esta ecuación desarrollando el producto de la izquierda y juntando por un lado los términos en los que aparece ρ_1 y por otro aquellos en los que aparece ρ_2 . Obtenemos:

$$\alpha - (1 - \mu) \left(\frac{\alpha + \mu}{\rho_1^3}\right) - \mu \left(\frac{\alpha + \mu - 1}{\rho_2^3}\right) = 0.$$

Ahora bien; como quiera que $z = (\alpha, 0)$, tenemos que $\rho_1 = |\mu + \alpha|$ y $\rho_2 = |\alpha + \mu - 1|$, y la ecuación anterior se reescribe como

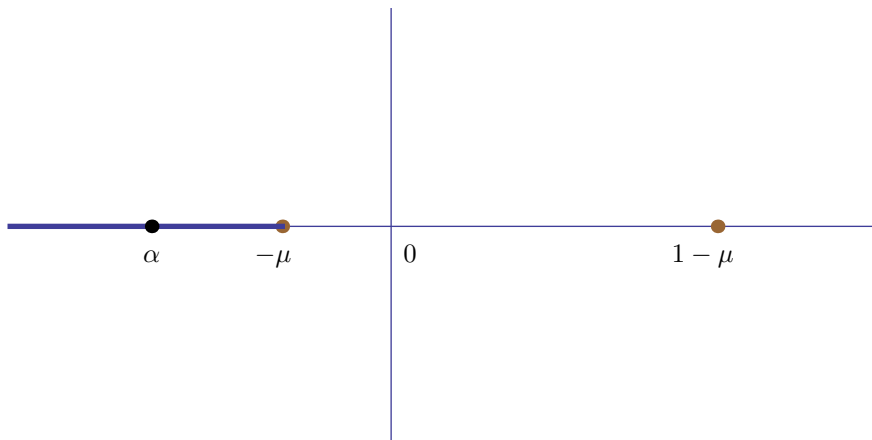
$$\alpha - (1 - \mu) \left(\frac{\alpha + \mu}{|\alpha + \mu|^3}\right) - \mu \left(\frac{\alpha + \mu - 1}{|\alpha + \mu - 1|^3}\right) = 0. \quad (****)$$

Observa que esta ecuación en la variable α está definida sobre tres intervalos disjuntos:

$$] - \infty, -\mu[, \quad] - \mu, 1 - \mu[, \quad] 1 - \mu, +\infty[.$$

A continuación veremos que en cada uno de estos intervalos hay una única solución:

I₋ Comenzamos estudiando el caso $\alpha \in] - \infty, -\mu[$:



Sobre este intervalo, $|\alpha + \mu| = -\alpha - \mu$ y $|\alpha + \mu - 1| = 1 - \alpha - \mu$, así que nuestra ecuación (****) se transforma en

$$\alpha + (1 - \mu) \frac{1}{(-\alpha - \mu)^2} + \mu \frac{1}{(1 - \alpha - \mu)^2} = 0, \quad \alpha \in] - \infty, -\mu[.$$

Veamos que hay una única solución $\alpha < -\mu$; con tal fin, definimos una función f por la expresión que aparece a la izquierda:

$$f :]-\infty, -\mu[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \alpha + (1 - \mu) \frac{1}{(-\alpha - \mu)^2} + \mu \frac{1}{(1 - \alpha - \mu)^2}.$$

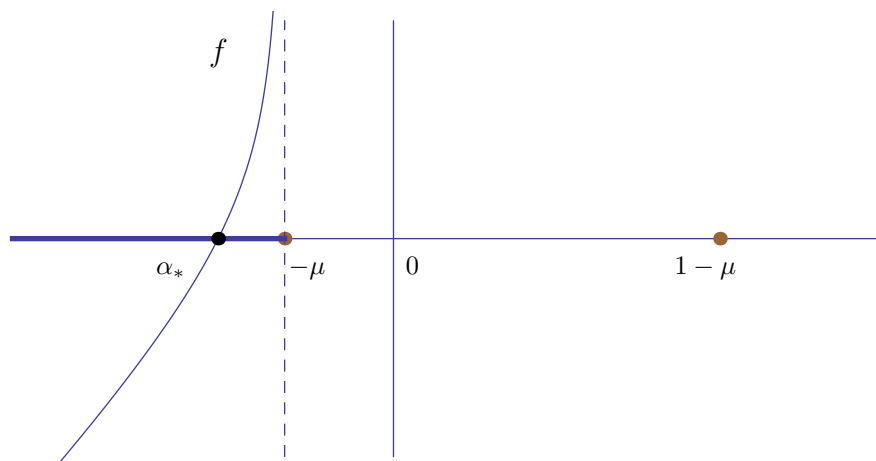
Se observa que f es estrictamente creciente y

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} f(\alpha) = -\infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\mu} f(\alpha) = +\infty,$$

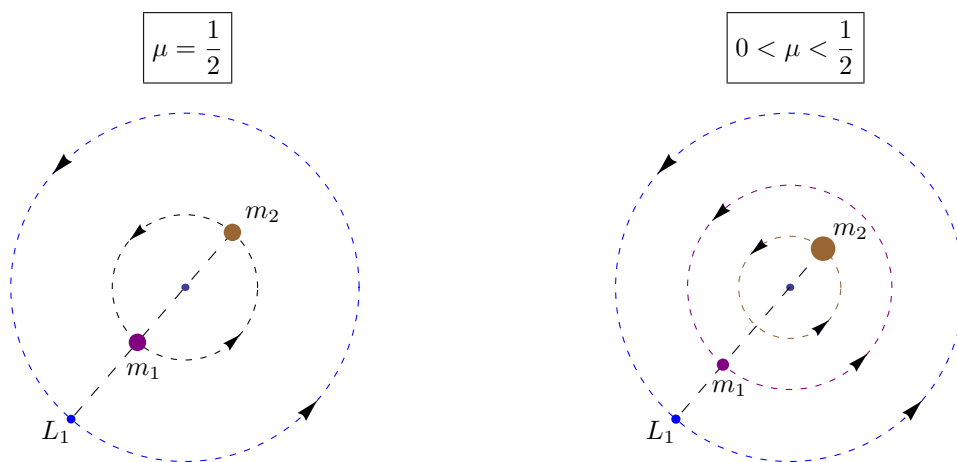
así que la ecuación

$$f(\alpha) = 0$$

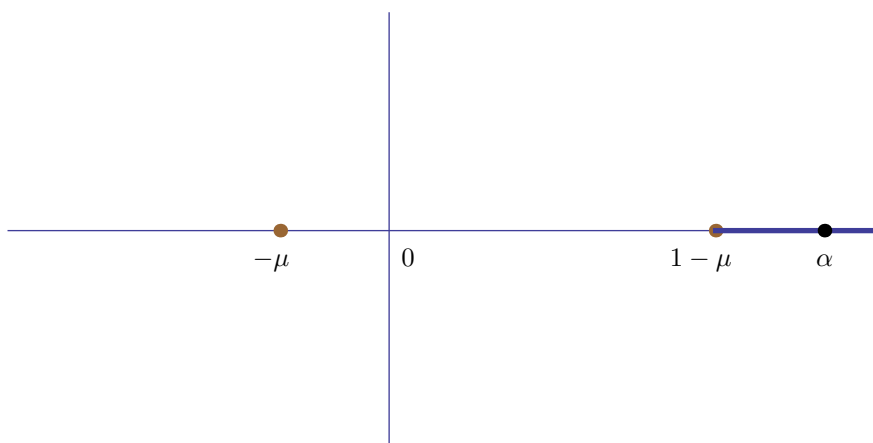
tiene una única solución α_* .



En el sistema de referencia original, el equilibrio $L_1 = (\alpha_*, 0)$ se transforma en una solución periódica:

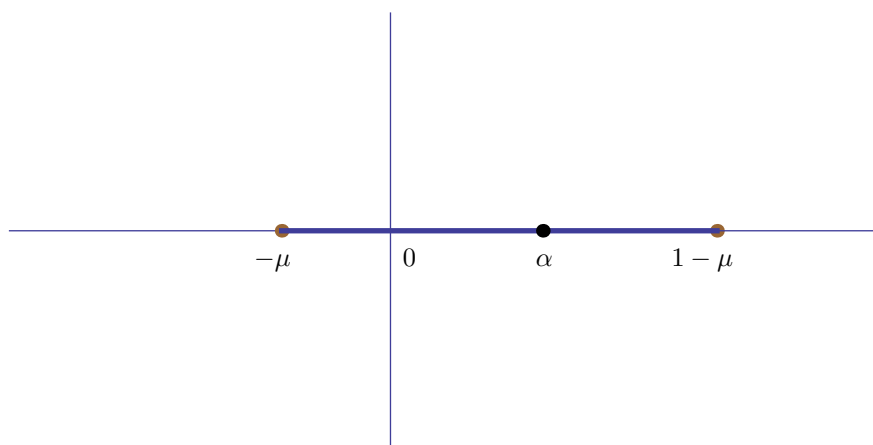


I_+ El caso $\alpha \in]1 - \mu, +\infty[$,



se trata de manera similar. Ahora $|\alpha + \mu| = \alpha + \mu$ y $|\alpha + \mu - 1| = \alpha + \mu - 1$. Volvemos a encontrar una única solución de la ecuación (***) , que se corresponde con un segundo punto de libración L_2 .

I_0 Veamos ahora qué sucede sobre el intervalo $] -\mu, 1 - \mu[$:

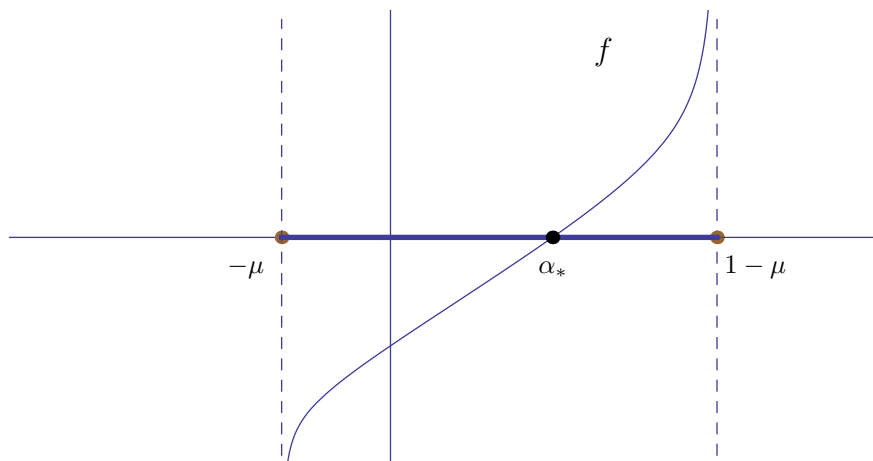


En este caso, $|\alpha + \mu| = \alpha + \mu$ y $|\alpha + \mu - 1| = 1 - \alpha - \mu$, y la ecuación (****) se reescribe como $f(\alpha) = 0$, donde

$$f :] -\mu, 1 - \mu[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \alpha - (1 - \mu) \frac{1}{(\alpha + \mu)^2} + \mu \frac{1}{(1 - \alpha - \mu)^2}.$$

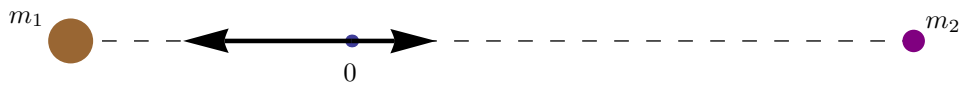
Es fácil comprobar que $f' > 0$ sobre $] -\mu, 1 - \mu[$ y que

$$f(\alpha) \rightarrow -\infty \text{ si } \alpha \rightarrow -\mu, \quad f(\alpha) \rightarrow +\infty \text{ si } \alpha \rightarrow 1 - \mu.$$

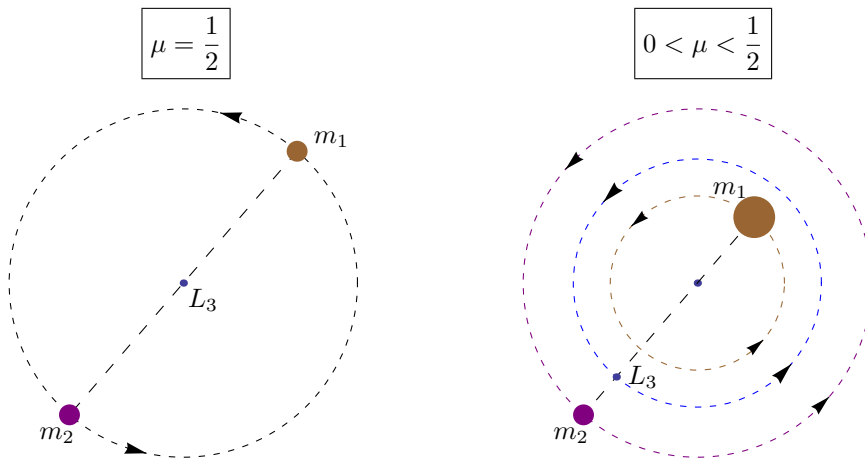


De nuevo hay una única raíz α_* , que da lugar a un tercer punto de libración $L_3 = (\alpha_*, 0)$.

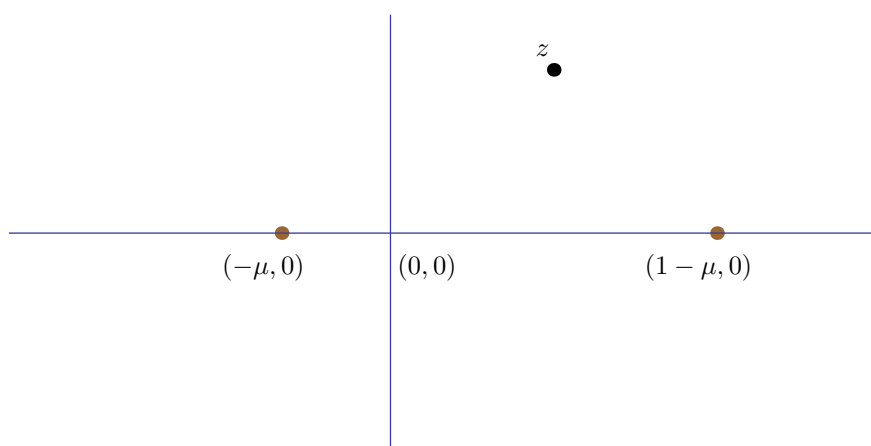
Conviene observar que para $\mu = 1/2, \alpha_* = 0$ y $L_3 = (0, 0)$ es el centro de masas. En cambio, si $\mu \in]0, 1/2[$, L_3 no coincide con el origen. Esto es lógico, pues si las masas de las primarias no son iguales y ubicamos una pequeña partícula en el origen, sobre ella aparecerá una fuerza gravitatoria de intensidad no nula.



Si $\mu < \frac{1}{2}$, $f(0) = -\frac{1-\mu}{\mu^2} + \frac{\mu}{(1-\mu)^2} < 0$ y por tanto $\alpha_* > 0$. Se puede comprobar que L_3 queda más cerca de P_2 que de P_1 .



2. Supongamos finalmente que z no se encuentra sobre el eje horizontal,



y volvamos a la ecuación de partida:

$$\left(1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) z = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} P_1 - \frac{\mu}{\rho_2^3} P_2.$$

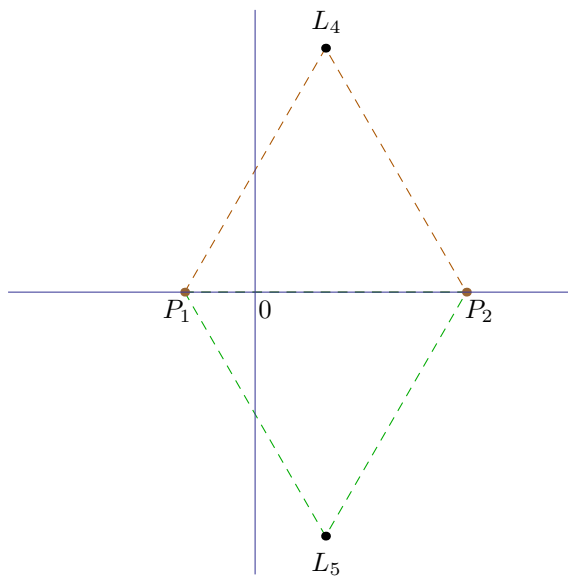
Observamos que la expresión a la derecha de la igualdad se encuentra sobre el eje de abscisas, mientras que el término de la izquierda está sobre la recta vectorial generada por z . Como los vectores z y $(1, 0)$ son linealmente independientes, deducimos que

$$\begin{cases} 1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} = 0 \\ -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}(-\mu) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(1-\mu) = 0 \end{cases}$$

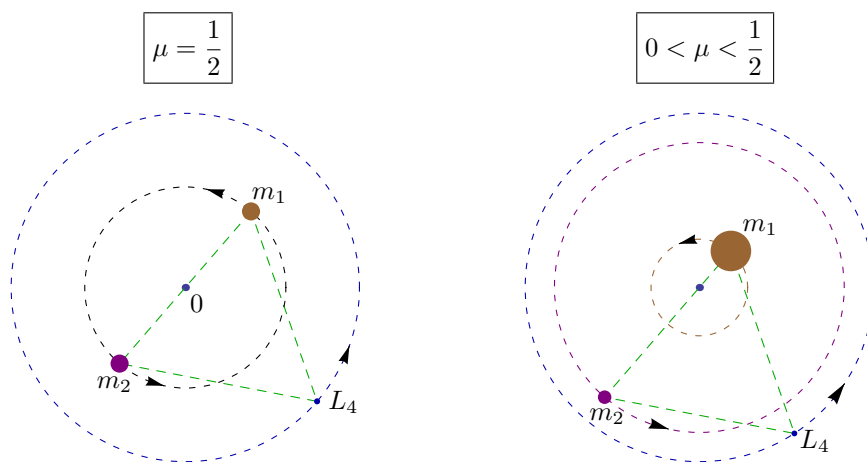
De la segunda ecuación se sigue que $\rho_1 = \rho_2 = \rho > 0$, y de la primera

$$1 - \frac{1-\mu}{\rho^3} - \frac{\mu}{\rho^3} = 0 \Rightarrow \rho = 1.$$

Encontramos que $|z - P_1| = |z - P_2| = |P_1 - P_2| = 1$, así que los tres puntos forman un triángulo equilátero. Hay dos posibilidades, L_4 y L_5 .



En el sistema de referencia original:



4.12. Ejercicios

4.1 Tres masas $m_1 = m_2 = 2m_3$ tienen el centro de gravedad en el origen. Se sabe que la posición de m_1 es $(1, 0)$ y la de m_2 es $(0, 1)$. ¿Cuál es la posición de m_3 ?

4.2 Describe geoméricamente la envolvente convexa del conjunto de puntos del plano

$$A = \{(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t) : t \in]0, +\infty[\}.$$

4.3 Demuestra que el sistema

$$\ddot{r}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^p}, \quad r_i \in \mathbb{R}^3, \quad r_i \neq r_j \text{ si } i \neq j,$$

no admite puntos de equilibrio si $p > 2$.

4.4 Decide si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: en el problema de 4 cuerpos existe una solución maximal

$$r = (r_1, r_2, r_3, r_4) :]\alpha, \omega[\rightarrow (\mathbb{R}^3)^4$$

que cumple

$$|r_i(t) - r_j(t)| \geq \frac{1}{2}, \quad t \in]\alpha, \omega[, \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$

y tal que $\omega < +\infty$.

4.5 En el espacio \mathbb{R}^3 se tienen cuatro masas $m_1 > m_2 > m_3 > m_4$. ¿Es posible encontrar un tetraedro regular de manera que, si se sitúan las masas en sus vértices el centro de masas esté sobre el punto $P = (1, 2, 3)$?

4.6 (a) Sea $C \subset \mathbb{R}^p$ un cono abierto y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^1 que cumple:

$$f(\lambda x) = \log \lambda + f(x), \quad \lambda > 0, \quad x \in C.$$

Prueba que

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = 1 \text{ para todo } x \in C.$$

(b) Aplica el resultado anterior para demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\ddot{r}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^2}, \quad r_i \in \mathbb{R}^3, \quad r_i \neq r_j \text{ si } i \neq j,$$

no tiene equilibrios.

4.7 Se parte del problema restringido de 3 cuerpos (circular) en el sistema inercial

$$\ddot{r}_3 = \frac{1-\mu}{|r_1(t)-r_3|^3}(r_1(t)-r_3) + \frac{\mu}{|r_2(t)-r_3|^3}(r_2(t)-r_3),$$

donde $r_i(t) = R[t]P_i$, $i = 1, 2$. Se efectúan los cambios de variable

$$(i) z = R[t]r_3, \quad (ii) w = R[-t]r_3.$$

¿Se llega en ambos casos a un sistema autónomo?

4.8 Calcula los puntos de libración L_4 y L_5 si $\mu = 1/10$. Haz un dibujo aproximado del movimiento correspondiente.

4.9 Calcula todos los puntos de libración cuando las masas de las primarias son iguales.

4.10 Se considera una solución al problema de 3 cuerpos con intervalo maximal de definición $]\alpha, \omega[$ y $\omega < +\infty$. Demuestra que existe el límite $\lim_{t \rightarrow \omega} I(t)$ (finito o infinito).

4.11 Se considera la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|z-P_1|} + \frac{\mu}{|z-P_2|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu).$$

donde $P_1 = (-\mu, 0)$, $P_2 = (1-\mu, 0)$ y $0 < \mu \leq 1/2$.

(a) Expresa Φ de la forma

$$2\Phi(z) = (1-\mu)\left(\rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1}\right) + \mu\left(\rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2}\right),$$

donde $\rho_1 = |z - P_1|$ y $\rho_2 = |z - P_2|$.

(b) Prueba que $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su mínimo absoluto en L_4 y L_5 .

4.12 En el plano se considera el conjunto

$$A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(2, 1)\}.$$

Encuentra un número finito de puntos $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2$ de manera que

$$\text{co}(A) = \text{co}(\{p_1, \dots, p_k\}).$$

4.13 Se considera el sistema

$$m_i \ddot{r}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^{p+2}}, \quad r_i \in \mathbb{R}^3, \quad r_i \neq r_j \text{ si } i \neq j.$$

Para cada $p = 1, 2, \dots$ encuentra una función $\mathcal{V} = \mathcal{V}(r_1, \dots, r_n)$ de clase \mathcal{C}^1 de manera que el sistema se exprese de la forma

$$m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}(r_1, \dots, r_n).$$

4.14 Se parte del problema con dos soles fijos (véase el ejercicio 1.2):

$$\ddot{x} = \frac{G m_1 (P_1 - x)}{|P_1 - x|^3} + \frac{G m_2 (P_2 - x)}{|P_2 - x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\},$$

donde P_1 y P_2 son constantes, $P_1 \neq P_2$. Se efectúa el cambio de variables

$$z = R[\omega t] x, \quad R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Escribe las ecuaciones en el nuevo sistema de coordenadas. ¿Son autónomas?

4.15 En \mathbb{R}^2 se colocan n masas puntuales m_1, m_2, \dots, m_n sobre n puntos p_1, p_2, \dots, p_n , y se hacen girar a velocidad angular constante:

$$r_i(t) := R[\omega t] p_i, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Demuestra que si $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ es solución al problema de n cuerpos, el centro de masas debe estar fijo en el origen.

4.16 En \mathbb{R}^2 se colocan tres masas iguales $m_1 = m_2 = m_3 > 0$ sobre tres puntos alineados p_1, p_2, p_3 , y se hace rotar el sistema en torno al origen a velocidad angular constante ω :

$$r_i(t) = R[\omega t] p_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Encuentra las condiciones bajo las cuales se obtiene una solución al problema de tres cuerpos.

4.17 Sea $r = (r_1, r_2, r_3) :]\alpha, +\infty[\rightarrow (\mathbb{R}^3)^3$ una solución al problema de 3 cuerpos. Se supone que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} r_2(t).$$

(las dos primeras partículas colisionan sobre el origen en tiempo infinito). Se pide:

- (a) Demuestra que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{I}(t) = +\infty$.
- (b) Demuestra que $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)/t^2 = +\infty$.
- (c) Demuestra que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r_3(t)| = +\infty$ pero que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r_3(t)|/t$ existe y es finito.
- (d) Encuentra una contradicción y concluye que la situación descrita en este problema no es posible.

Bibliografía

Libros:

Un buen lugar para ampliar:

- *V.I. Arnold; V.V. Kozlov; A.I. Neishtadt, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. [Dynamical systems, III]. Third edition. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 3. Springer-Verlag, Berlin, 2006.*

Y un libro de referencia que contiene casi todo el material de este curso, si bien de forma más escueta:

- *H. Pollard, Mathematical Introduction to Celestial Mechanics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1966.*

Páginas web:

Una introducción al problema de tres cuerpos escrita por un destacado investigador de ahora:

- *A. Chenciner, Three body problem (2007), Scholarpedia.*
http://www.scholarpedia.org/article/Three_body_problem

Para saber más sobre los orígenes de la Mecánica Celeste:

- *School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland, History Topics: Mathematical Astronomy Index (2008)*
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/Astronomy.html>

Y para conocer las biografías de los matemáticos que aparecen en este libro:

- *School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland, Indexes of Biographies (2005)*
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html>

Índice

1. Campos de fuerzas centrales. La segunda ley de Kepler	3
1.1. Introducción	3
1.2. La ley de la gravitación universal	5
1.3. Fuerzas centrales	7
1.4. Movimientos en un campo de fuerzas centrales	8
1.5. Trasladando el instante inicial	12
1.6. El tiempo es reversible	12
1.7. Invariancia por isometrías	12
1.8. Midiendo lo lejos que está el movimiento de ser rectilíneo: el momento angular	13
1.9. Expresión en polares de un movimiento plano	16
1.10. Fórmula del área en polares	19
1.11. La segunda ley de Kepler	22
1.12. Momento angular cero y colisiones	24
1.13. Potencial y conservación de la energía	29
1.14. Ejercicios	34
2. Trayectorias Newtonianas no rectilíneas. Las otras dos leyes de Kepler.	39
2.1. Introducción	39
2.2. La ecuación de una cónica con un foco en el origen	39
2.3. La primera ley de Kepler	46
2.4. Clasificación de las órbitas a partir de la energía	48
2.5. Soluciones globales del problema de Kepler	50
2.6. La ecuación de una elipse en polares. Excentricidad	52
2.7. Los movimientos recorren toda su órbita	55
2.8. Los elementos geométricos de una elipse	56
2.9. Periodo mínimo	60
2.10. Soluciones periódicas y tercera ley de Kepler	61
2.11. Órbitas no Newtonianas	65
2.12. La solución del problema de Kepler: anomalías	71
2.13. El método de Newton y la ecuación de Kepler	77
2.14. Las funciones de Bessel y las soluciones elípticas	82

2.15. Elementos de una solución elíptica: las coordenadas astronómicas . . .	85
2.16. Ejercicios	93
3. El problema de los dos cuerpos	97
3.1. Introducción	97
3.2. Mirando el sistema desde el centro de masas	99
3.3. Ejercicios	103
4. El problema de los n cuerpos	105
4.1. Introducción	105
4.2. Las ecuaciones en el problema de los n cuerpos. Potencial y energía .	106
4.3. El teorema de Euler para las funciones homogéneas y el porqué de la no existencia de equilibrios	108
4.4. Soluciones no prolongables y partículas que se aproximan	109
4.5. El momento de inercia y la fórmula de Lagrange-Jacobi	113
4.6. Centro de masas y conservación del momento lineal	114
4.7. Conservación del momento angular	117
4.8. Colapso total	118
4.9. Las soluciones circulares de Lagrange: una danza para la música celeste	124
4.10. El problema restringido de tres cuerpos	130
4.11. La constante de Jacobi y los cinco puntos de libración	133
4.12. Ejercicios	142
Bibliografía	147