DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Grupos A y B. Examen final. 1 de julio de 2010

PRIMERA PARTE. (Primer Cuatrimestre)

Dada la función

$$f(x) := e^{\operatorname{sen} x}, \qquad x \in [0, 4\pi],$$

se busca un polinomio de grado menor o igual que cuatro $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$ que cumpla

$$p(k\pi) = f(k\pi), \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \tag{1}$$

(a*) Encuentra un sistema en $\mathbb{R}^5$, del tipo

$$A \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = b,$$

que sea equivalente a (1).

(b*) Justifica que el sistema anterior tiene una única solución. ¿Cuál es?

(c) Supongamos ahora que escribimos $p(x)$ como combinación lineal de la base de $\mathbb{P}_4$ siguiente:

$$\Big\{1,\ x-\pi,\ x(x-\pi),\ x(x-\pi)(x-2\pi),\ x(x-\pi)(x-2\pi)(x-3\pi)\Big\},$$

¿cuál sería la tercera coordenada?

(d) Dibuja la función $\mathcal{E}(x) = f(x) - p(x)$. A partir de esta gráfica encuentra una estimación del error válida para todo $x \in [0, 4\pi]$.

(*) Los alumnos que se examinen de toda la asignatura sólo han de responder a las preguntas marcadas con el asterisco.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Grupos A y B. Examen final. 1 de julio de 2010

PRIMERA PARTE (Segundo Cuatrimestre)

En este ejercicio buscamos una formula de integración numérica del tipo

$$\int_0^1 f(x)dx \approx J(f) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f\left(\frac{1}{3}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha_3 f\left(\frac{2}{3}\right) + \alpha_4 f(1)\,.$$

(a*) Determina los pesos α_i para que la fórmula tenga el mayor grado posible de exactitud.

(b*) Exactamente, ¿cuál es el grado de exactitud de la fórmula obtenida en el apartado anterior?

(c) Programa la fórmula anterior en el ordenador y úsala para estimar el valor de las integrales $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ y $\int_{-3}^8 e^{\sin x}dx$.

(d) Programa la fórmula del punto medio compuesta con el ordenador y úsala para estimar las dos integrales anteriores tras dividir los intervalos respectivos en 20, 40 y 60 subintervalos distintos.

(*) Los alumnos que se examinen de toda la asignatura sólo han de responder a las preguntas marcadas con el asterisco.

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada.
Métodos Numéricos de L. Mátematicas. Curso 2009/10

EXAMEN FINAL: 1 de julio de 2010.

ALUMNO D.N.I.:

Marque la parte que realiza:

Primer parcial ☒ Segundo parcial ☐ Todo ☐

PARTE II: primer parcial.[1]

1. Responda, razonadamente, a las cuestiones siguientes:

   (a) Cierta matriz simétrica, A, admite la siguiente descomposición:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   ¿Admite descomposición de Choleski?

   (b) Si $p(x)$ es el interpolante de Lagrange para la función $f(x) = sen(x)$ en nodos $x_i := \{-\pi, -\pi/2, \pi/2, \pi\}$, escriba la fórmula del error de interpolación y dé una cota o estimación del mismo (en valor absoluto) en $x = 0$.

   (c) Para el problema de interpolación: $\boxed{\text{Hallar } p \in V \ / \ p(-1) = z_1,\ p'(0) = z_2,\ p''(1) = z_3}$ ¿en qué espacio, V, de los que siguen admite solución única?

   i. $V = \mathbb{P}_2$

   ii. $V = gen\{x, x^2 - 1, x^3 + 1\}$

   iii. $V = \{p \in \mathbb{P}_3 : p'(0) = 0\}$

2. Calcule el spline cúbico natural que interpola los datos de la tabla siguiente:

x_i	-2	0	2
y_i	0	2	0

   es decir, hallar $s(x) \in M_2^3(\Delta)(\equiv S(3,2;\{-2,0,2\})$ verificando:

$$s(x_i) = y_i \ i = 0,1,2 \ \ y \ \ s''(-2) = 0 = s''(2)$$

[1]Los alumnos que recuperan toda la asignatura deben contestar dos de los tres apartados de la primera pregunta

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada.
Métodos Numéricos de L. Mátematicas. Curso 2009-10

EXAMEN FINAL: 1 de julio de 2010.

ALUMNO: [redacted] **D.N.I.:**

Marque la parte que realiza:

Primer parcial [ ]   Segundo parcial [X]   Todo [ ]

PARTE II: segundo parcial.[2]

1. Se considera la fórmula de derivación numérica

$$f'(0) \approx D(f) = \frac{f(2h) - f(-h)}{3h}$$

Encuentre una cte $\delta > 0$ de manera que el error $E(f) = f'(0) - D(f)$ cumpla

$$|E(f)| \leq \delta K_2 h$$

donde, $f \in C^2[-1, 1]$ y K_2 es una cota superior de $|f''|$ en $[-1, 1]$.

2. Para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$ se emplean los métodos iterativos:

$$i) \;\; x_{n+1} = x_n - \frac{1}{10}(x_n^2 - 2) \qquad\qquad ii) \;\; x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Demuestra que en ambos casos hay convergencia local a $\sqrt{2}$. ¿Qué método converge más rápido?

3. Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(c)$$

donde $c \in]0, 1[$ actúa como parámetro. Sabiendo que esta fórmula es exacta en $\mathbb{P}_1$, encuentra un valor de c para el que el peso α_0 sea negativo.

4. En el espacio vectorial $E = C[0, 1]$ se considera el producto escalar

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Encuentra la mejor aproximación de $f(x) = (x^2 + 1)^2$ en el espacio $H = \mathbb{P}_7$. ¿Es única?

[2] **Los alumnos que recuperan toda la asignatura deben contestar tres de las cuatro preguntas**