Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada.
Métodos Numéricos de L. Mátematicas. Curso 2008/09

EXAMEN FINAL: 29 de junio de 2009.

ALUMNO:	**D.N.I.:**

PARTE I: Prueba de Ordenador

1. (**ejercicio del primer parcial**) Con los comandos de Mathematica que estime oportunos:

   (a) para la ecuación polinómica $f(x) = x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 12x + 1 = 0$, separe sus raíces reales en intervalos de longitud 1;

   (b) programe el algoritmo de la secante (sin criterio de parada) para que muestre 7 iteraciones para la ecuación anterior en un intervalo que contenga la raíz positiva más pequeña;

   (c) modifique el programa anterior introduciendo el criterio de parada basado en: si $|f(x_n)| < tol = \epsilon$, entonces se muestre el valor de la aproximación, el número de aproximaciones calculadas y se pare el método;

   (d) ¿cuántas iteraciones son necesarias para una tolerancia $\epsilon = 0.001$?

2. (**ejercicio del segundo parcial**) Se desea calcular la integral

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx \,, \tag{1}$$

   de manera aproximada. Para ello se hará uso de la fórmula de Simpson compuesta.

   (a) Programa el ordenador para que aplique la formula de Simpson compuesta a esta integral tras dividir el intervalo $[-1, 1]$ en 20 partes iguales.

   Para controlar el error, recordamos el siguiente

   Teorema 1 *Se supone que $f \in C^4[a, b]$. Entonces el error cometido por la fórmula de Simpson compuesta al estimar $\int_a^b f(x)dx$ usando una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ puede acotarse como sigue:*

$$|\mathcal{E}^{SC}(f)| \leq \frac{h^4(b-a)}{2880} K_4 \,,$$

   donde $h := \max_{1 \leq i \leq N}(x_i - x_{i-1})$ es el di·metro de la partición y K_4 es una cota de $|f^{(iv)}|$ en $[a, b]$.

   (b) ¿Podrías determinar un número de subintervalos iguales en que se debería dividir el intervalo $[-1, 1]$ a fin de que la fórmula de Simpson compuesta nos dé el valor de la integral (1) con error inferior a 10^{-4}?

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada.
Métodos Numéricos de L. Mátematicas. Curso 2008/09

EXAMEN FINAL: 29-06-2009

ALUMNO:	**D.N.I.:**

PARTE II: primer parcial.

Responda a tres de las preguntas siguientes:

1. En la eliminación de un medicamento interviene la resolución de la ecuación $xe^{-x/4} - 1 = 0$.
   (a) Pruebe que admite exactamente 2 raíces reales y dé sendos intervalos de longitud 1 para tales raíces;
   (b) Compruebe si se satisfacen las condiciones de convergencia del método de Newton-Raphson;
   (c) Deduzca un método de iteración funcional (o de punto fijo) que converja a la raíz más pequeña y su convergencia sea lineal (orden=1).

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -\alpha & 0 \\ -2 & 3+\alpha & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) deduzca los valores de α para los que A admite descomposición LU y realice la descomposición para $\alpha = 1$;
   (b) resuelva el sistema $Ax = b$ a partir de la descomposición LU para $b = (4, -4, -1)^t$

3. (a) Con ayuda de la tabla de Diferencias Divididas, halle el polinomio de interpolación para la tabla de valores:

x_i	-2	-1	2	3
y_i	-19	-5	1	11

   (b) A continuación, el profesor dice que ha habido un error en uno de los valores y_i por lo que el polinomio para los datos correctos era de grado exactamente 2. Si los coeficientes de Newton (las diferencias divididas) son correctos salvo uno, ¿cuál sería el dato erróneo? ¿y el polinomio original?

4. Para el problema de hallar $p \in P_2$ tal que

$$p(0) = z_1, p'(1) = z_2, p''(1) = z_3$$

   (a) ¿es unisolvente el problema?
   (b) calcule, si procede, el interpolante para $z_1 = -2, z_2 = 0, z_3 = 2$.

PARTE II: segundo parcial.

Responda a tres de las preguntas siguientes:

1. En el espacio $C[-1,1]$ se considera el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

¿Es $p(x) = 2x$ la mejor aproximación de $f(x) = 2|x|$ en $H = \mathbb{P}_1$?

2. Dada una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se considera la fórmula del trapecio para la integración numérica

$$\int_a^b f(x)dx \simeq I^{Trap}(f).$$

Recordamos que para una función de clase $C^2[a,b]$ se verifica la siguiente estimación del error

$$|\epsilon^{Trap}(f)| \leq \frac{1}{12}K_2(b-a)^3$$

donde K_2 es una cota de $|f''|$ en $[a,b]$.

Dada la partición

$$\Delta : \quad x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

se considera la fórmula del trapecio compuesta $I^{CTrap}(f)$. Encuentra una estimación del error $\epsilon^{CTrap}(f)$ válida para funciones de clase 2.

3. Se considera el espacio $M_0^1(\Delta)$ para la partición

$$\Delta : \quad x_0 = -1 < x_1 = 0 < x_2 = 1.$$

Describe una base de este espacio y escribe $s(x) = |x|$ como combinación lineal de dicha base.

4. Se pretende calcular la longitud de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Expresa dicha cantidad como una integral. Aplica la fórmula del trapecio a la integral que has obtenido.