



EXAMEN FINAL (23-06-2008): CUESTIONES¹

ALUMNO:	D.N.I.:
----------------	----------------

Responda razonadamente a las cuestiones siguientes:

1. Se proponen los métodos de iteración funcional siguientes:

$$\boxed{i) x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{x_n} \quad ii) x_{n+1} = e^{-\frac{x_n}{2}} \quad iii) x_{n+1} = -2 \ln(x_n)}$$

¿converge alguno de ellos a la única raíz real de la ecuación $e^{-x} - x^2 = 0$ en el intervalo $]0, 1[$?

2. Determina los valores reales del parámetro α para los que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha \\ -2 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ es regular.

¿Para cuáles admite descomposición LU?

3. Completa la tabla de D.D. y escribe el polinomio de interpolación asociado a los puntos $\{(x_i, y_i)\}$:

x_i	y_i	DD1	DD2	DD3
-1	-3			
<input type="text"/>	0	1		
4	2	<input type="text"/>		
5	-1	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

4. Determine, según los valores de x_0 , si el problema de interpolación siguiente admite solución única o no:

Hallar $p(x) \in P_2$ verificando:

$$p(-1) = A, \quad p'(x_0) = B, \quad \int_{-1}^1 p(x) dx = C$$

donde A, B, C son valores reales fijos conocidos y x_0 es arbitrario.

5. Dada la partición

$$\Delta : x_0 = -2 < x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 3$$

se considera el espacio de funciones splines de grado 3 y clase 2, denotado por $S(3, 2, \{x_0, x_1, x_2, x_3\})$ o $M_2^3(\Delta)$. Describe una base de este espacio.

6. Encuentra una fórmula de derivación numérica del tipo

$$f'(1.7) \simeq \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$$

con $x_0 = 1.5$, $x_1 = 1.8$ y que sea exacta en \mathbb{P}_1 .

7. Calcula la integral $\int_0^1 x^3 dx$ de forma aproximada usando: (a) la fórmula del punto medio, (b) la fórmula de Simpson.

8. Encuentra la mejor aproximación en \mathbb{P}_1 de la función $f(x) = x^3$ con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_1^3 f(x)g(x)dx.$$

¹Los alumnos que sólo deban recuperar el segundo parcial responderán, únicamente, las cuestiones 5,6,7 y 8.



EXAMEN FINAL (23-06-2008): PRUEBA DE ORDENADOR

ALUMNO:

D.N.I.:

Realice uno de los ejercicios siguientes:

1. Se considera la ecuación no lineal $f(x) = 0$ donde $f(x) = x^2 + 3 - e^x$.
 - (a) Dibuje la curva $y = f(x)$ asociada a la ecuación para localizar un intervalo de longitud 1 que contiene la única raíz real.
 - (b) Resuelva la ecuación con los comandos directos de Mathematica.
 - (c) Transforme la ecuación en una del tipo $x = g(x)$ de modo que el método de iteración asociado cumpla la condición de convergencia en el intervalo dado en (a). Utilice para tal fin las herramientas adecuadas de Mathematica (gráficas, derivadas, etc..)
 - (d) Con la función de iteración conseguida en (c), programe el algoritmo para obtener una aproximación a la raíz con error menor que 0.0005 partiendo de $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (a y b son los extremos del intervalo encontrado en (a)). ¿Cuántas iteraciones se han necesitado?

2. En el intervalo $[0, 4]$ se considera la partición

$$\Delta : x_0 = 0 < x_1 = 2 < x_2 = 3 < x_3 = 4.$$

- (a) Encuentra una función f spline de grado 3 y clase 2 sobre esta partición, que cumpla

$$f(0) = 3, f(2) = 5, f(3) = 4, f(4) = -1, \quad f''(0) = 0 = f''(4).$$

¿Cuántas hay?

- (b) Usa el *Mathematica* para dibujar la gráfica de la función f del apartado anterior, así como la nube de puntos que interpola.