UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos Numéricos
Grupo B. Examen parcial. Segunda parte. 19 de febrero de 2010

1. Se considera el intervalo $[0, 2\pi]$ y la partición

$$\Delta : \; x_0 = 0 < x_1 = \frac{\pi}{2} < x_2 = \pi < x_3 = \frac{3\pi}{2} < x_4 = 2\pi.$$

a) ¿Cuál es la dimensión del espacio $M_0^1(\Delta)$? Describe una base.

b) Sea $s(x)$ la solución del problema de interpolación

$$s \in M_0^1(\Delta), \quad s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

con $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcula las coordenadas de s cuando se expresa como combinación lineal de la base descrita en el apartado anterior.

c) Dibuja las gráficas de $f(x)$ y $s(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

d) Demuestra que se cumple la siguiente estimación para el error de interpolación:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{\pi^2}{32}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

2. Se considera el sistema triangular de $d = 1000$ ecuaciones e incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \cdots & + & u_{1d}x_d & = & b_1 \\
 & & u_{22}x_2 & + & \cdots & + & u_{2d}x_d & = & b_2 \\
 & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & & & & & & u_{dd}x_d & = & b_d
\end{array}$$

donde $u_{ii} \neq 0$ si $i = 1, \ldots, d$.

a) Describe el método de resolución por sustitución regresiva, escribiendo con precisión las fórmulas que se generan para la solución.

b) ¿Cuántas operaciones (multiplicación y división) hay que hacer?

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Primer Parcial. 19 de febrero de 2010

PRIMERA PARTE

1. Dada la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad\qquad f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x) + \cos(3x)\,,$$

se busca un polinomio $p = p(x)$ de grado menor o igual que 3 que interpole a esta función sobre los nodos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5\,.$$

a) Justifica que este problema tiene solución única.

b) Usa el ordenador para calcular el polinomio p de manera explícita.

c) Usa el ordenador para dibujar las gráficas de f y p en el intervalo $[0, 5]$.

d) Encuentra las coordenadas de p en la base de $\mathbb{P}_3$ formada por los polinomios

$$1, \ x, \ x(x-2), \ x(x-2)(x-5)\,.$$

Expresa estas coordenadas en función de diferencias divididas de f.

e) Se consideran los polinomios de Lagrange

$$l_0 = l_0(x), \ l_1 = l_1(x), \ l_2 = l_2(x), \ l_3 = l_3(x)$$

asociados a estos nodos. ¿Qué grado tiene l_2? Escribe l_3 de manera explícita.

f) Expresa p como combinación lineal de los polinomios l_i anteriores.

g) Divide ahora el intervalo $[0, 5]$ en 17 nodos uniformemente distribuidos y determina el polinomio q de grado más pequeño posible que interpola a f sobre estos nodos.