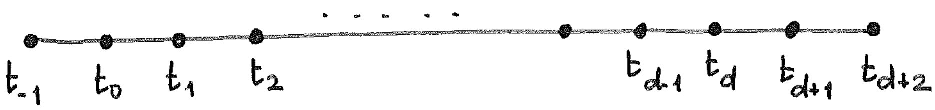
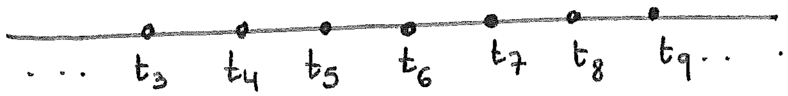
UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos Numéricos
Grupo B. Primer Parcial. Primera Parte. 12 de febrero de 2009

1. En una varilla discreta la temperatura en cada nodo se designa por t_i



Se sabe que $t_{-1} = t_0 = 7$, $t_{d+1} = t_{d+2} = 14$ y se formula la siguiente hipótesis: en los restantes nodos la temperatura es la media de los cuatro nodos contiguos



t_6 es la media de t_4, t_5, t_7, t_8

Se pide:

(a) Encuentra una matriz A y un vector b de manera que se cumpla $AT = b$ donde $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_d \end{pmatrix}$

(b) Escribe un programa que calcule el vector de temperaturas T dado el parámetro $d \geq 2$.

(c) Se supone $d = 100$. Comprueba que el sistema es compatible y determinado. ¿Cuánto vale t_{99}?

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Métodos Numéricos
Grupo B. Primer Parcial. Segunda Parte. 12 de febrero de 2009

2. Se pretende calcular la raíz cúbica de 5 por medio de un método iterativo del tipo

$$x_{n+1} = Ax_n + \frac{B}{x_n^2}$$

donde A y B son parámetros reales.

(a) Demuestra que $5^{1/3}$ es un punto fijo del método iterativo si y sólo si $B + 5(A-1) = 0$.

(b) Se supone que se cumple la condición del apartado anterior. Encuentra dos números B_- y B_+ de manera que haya convergencia local si $B_- < B < B_+$ y no la haya cuando $B > B_+$ o $B < B_-$.

(c) Demuestra que cuando se aplica el método de Newton a la ecuación $x^3 - 5 = 0$ se llega a un método de este tipo. ¿Para qué valores de A y B?

(d) ¿Para qué valores de A y B hay convergencia cuadrática hacia $5^{1/3}$?

3. Se busca un polinomio en $\mathbb{P}_3$ que interpole a la función $f(x) = \cos x$ en los nodos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = 2\pi.$$

(a) Buscamos el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ por el método de coeficientes indeterminados. Escribe el sistema que han de cumplir dichos coeficientes. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz de coeficientes?

(b) Escribe el polinomio de interpolación como combinación lineal de los polinomios de Lagrange $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$. Escribe ℓ_2 de manera explícita.

(c) Calcula $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$, $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ y expresa el polinomio $p(x)$ en términos de dichas diferencias divididas.