DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Primera parte. 11 de febrero de 2008

Puntuación máxima: 60 puntos

1. La empresa *Calculating* $\mathcal{C}^{on}$ ha concentrado sus esfuerzos en obtener más y más cifras decimales del número e. Para ello, sus matemáticos han observado que e es un cero de la función $1 - \log x$ y proponen los siguientes métodos iterativos:

   (i) $x_{n+1} = 1 - \log x_n$,

   (ii) $x_{n+1} = x_n + 1 - \log x_n$,

   (iii) $x_{n+1} = x_n - (1 - \log x_n)$,

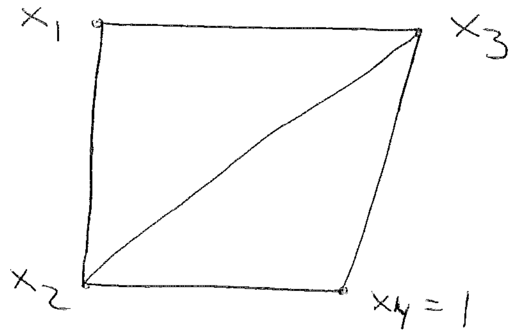
   (iv) $x_{n+1} = x_n + (1 - \log x_n)/2$,

   a) ¿Hay alguno de ellos cuyo uso no sea aconsejable? **[16 puntos]**

   b) Partiendo de una buena aproximación inicial, calcula $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n$, siendo $e_n = x_n - e$. ¿Cuál de los métodos convergerá más rápido? **[7 puntos]**

   c) Encuentra otro método iterativo que converja más rápido que los anteriores. **[7 puntos]**

2. Las precios por acción de cuatro valores x_1, x_2, x_3, x_4 que cotizan en bolsa se distribuyen según el siguiente grafo



   Se sabe que el precio de cada acción de x_4 es de 1EUR, mientras que los precios por acción de los restantes valores son las medias aritméticas de los correspondientes a los valores conectados. Se pide:

   a) Representa en notación vectorial del tipo

$$Ax = b\,, \qquad A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,,\ b \in \mathbb{R}^3\,, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\,,$$

   un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea el precio por acción de cada uno de los valores x_1, x_2, x_3. **[10 puntos]**

   b) Demuestra que la matriz de coeficientes A admite una descomposición LU. **[10 puntos]**

   c) ¿Es posible encontrar una descomposición de A del tipo $A = L'U'$, donde L' sea triangular inferior, U' sea triangular superior y además U' tenga sólo unos sobre la diagonal? Indicación: Considera la descomposición LU de A^T. **[5 puntos]**

   d) Demuestra que no es posible encontrar una descomposición de A del tipo LU de forma que tanto L como U tengan sólo unos sobre la diagonal, siendo L triangular inferior y U triangular superior. **[5 puntos]**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos. Segunda parte. 11 de febrero de 2008

Puntuación máxima: 40 puntos

1. En este ejercicio se considerarán polinomios de grado menor o igual que 5, representados de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \,, \qquad (1)$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ son constantes.

   a) Dados puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5) \in \mathbb{R}^2$, demuestra que el polinomio $p(x)$ dado en (1) interpola estos puntos si y sólo si la lista $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ es solución a un sistema de ecuaciones lineales del tipo

$$Ma = b\,.$$

   Encuentra la una fórmula para los coeficientes m_{ij} de la matriz M. La misma pregunta para el vector de términos independientes b. **[5 puntos]**

   b) Comprueba que si $x_j = \ln(1 + j)$, entonces es posible resolver el sistema anterior por medio del Método de Gauss sin necesidad de permutar las ecuaciones. **[10 puntos]**

   c) Encuentra el polinomio que interpola los datos

$$(x_j, y_j) = (\ln(1 + j), 3 + j), \qquad j = 0, \ldots, 5\,.$$ **[10 puntos]**

   d) Usa el ordenador para dibujar un diagrama con los puntos anteriores, así como el polinomio que los interpola. **[10 puntos]**

   e) ¿Cuáles son los polinomios de Lagrange $l_0, l_1, \ldots l_5$ en este problema? Escribe el polinomio obtenido en el apartado anterior como combinación lineal de los l_i. **[5 puntos]**