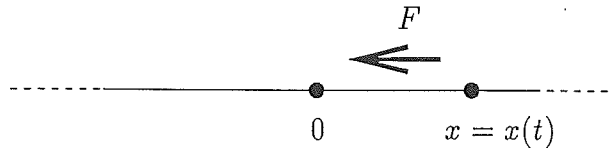


El Escorial, Julio de 1997
"Iniciación a los Sistemas Dinámicos"
Oscilaciones No Lineales, Rafael Ortega
(Notas por Gioia Vago)

1 Introducción.

Imaginemos una partícula que se mueve en una recta y está sometida a la acción de una fuerza $F = F(t, x)$.



Si tomamos su masa como unidad, la ecuación de Newton del movimiento es

$$\ddot{x} + V_x(t, x) = 0,$$

donde $V_x = -F$. Suponemos que la dependencia temporal es periódica con periodo 1, es decir

$$V(t + 1, x) = V(t, x).$$

A pesar de su aspecto sencillo estas ecuaciones pueden dar origen a dinámicas complicadas. Generalmente aparecen como modelos de sistemas mecánicos de un grado de libertad (péndulos, muelles,...) o como simplificaciones de sistemas de más dimensiones.

En esta lección trataremos dos aspectos de la teoría de estas ecuaciones:

1. Acotación de soluciones;
2. Estabilidad del equilibrio.

Los dos problemas están relacionados y son, en cierta forma, duales. En el primer caso se estudia la estabilidad en el infinito (Lagrange) mientras que en el segundo se estudia la estabilidad en el origen (Lyapunov). Las técnicas de estudio son casi las mismas: se buscan cilindros en el espacio (t, x, \dot{x}) que sean invariantes por la ecuación; estos cilindros rodean al infinito en el caso de Lagrange y al origen en el caso de Lyapunov. Debido a la periodicidad podemos identificar t y $t + 1$ y, después de esta operación encontramos los célebres toros invariantes de la teoría KAM.

1.1 Acotación de soluciones.

Nos centraremos en el llamado "problema de Littlewood". Consideramos la clase de osciladores no lineales sometidos a una fuerza externa:

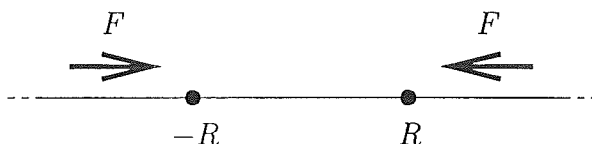
$$\ddot{x} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{muelle}}}{g(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fuerza externa}}}{p(t)}$$

y nos preguntamos bajo qué condiciones sobre g y p hay acotación. La acotación se entiende para todas las soluciones y en el siguiente sentido:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \text{ soluciones definidas en } (-\infty, +\infty) \\ \sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t)| + |\dot{x}(t)| < \infty. \end{array} \right.$$

Desde un punto de vista físico hay algunas hipótesis naturales para la fuerza recuperadora:

- * $-g$ debe ser atractiva en ∞
 $xg(x) > 0$ si $|x| \geq R$



Esta condición no es suficiente para la acotación, basta considerar una fuerza externa constante que cumpla $|p| > \sup |g|$.

Una condición más restrictiva es:

- * $g(x) \rightarrow \pm\infty$ si $x \rightarrow \pm\infty$.
 Ahora la fuerza externa no puede superar a la fuerza recuperadora cerca de infinito. Es una condición suficiente en el caso autónomo ($p = \text{cte}$); sin embargo, no basta en el caso general. Por ejemplo, la ecuación lineal

$$\ddot{x} + x = \sin t$$

es resonante y la amplitud de las oscilaciones crece indefinidamente en el tiempo.

Para evitar la resonancia lineal, Littlewood impuso:

- * g superlineal en ∞
 $\frac{g(x)}{x} \rightarrow \infty$ si $x \rightarrow \infty$.

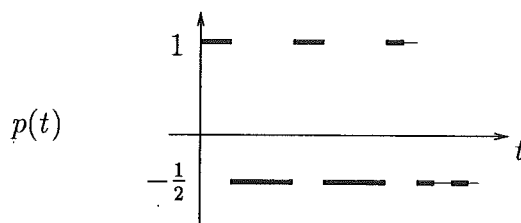
Pregunta: ¿hay acotación si la fuerza recuperadora es superlineal?

1.1.1 Primer ejemplo de Littlewood.

En [5], Littlewood consideró la ecuación

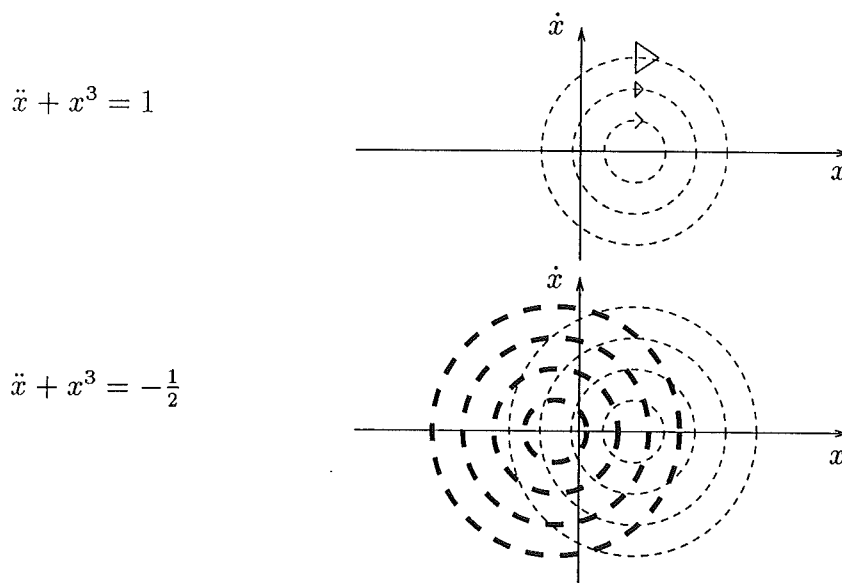
$$\ddot{x} + g(x) = p(t)$$

y no supuso que p fuese periódica. En ese primer artículo probó que si g es superlineal, entonces siempre es posible construir una función constante a trozos (como la indicada en la figura) de forma que exista una solución no acotada.



Vamos a exponer la idea de la construcción en el caso $g(x) = 2x^3$. Nuestra ecuación se rige por una ley autónoma

en tanto que p toma un valor constante. Si superponemos los retratos de fase de $\ddot{x} + 2x^3 = 1$ y $\ddot{x} + 2x^3 = -\frac{1}{2}$, es claro que la órbita $(x(t), \dot{x}(t))$ alterna dichos diagramas según los saltos de p .



Si seleccionamos estos saltos con astucia, la órbita (x, \dot{x}) ganará energía en cada salto y será no acotada. Una buena estrategia es provocar el salto de p cuando la partícula alcanza la amplitud máxima dentro de cada nivel de energía de la ecuación autónoma. La función $p(t)$ que resulta no es periódica, pero podemos escoger los saltos de forma que $p(t)$ sea “periódica en el límite”. Es decir,

$$\forall \tau > 0 \exists \delta = \delta(\tau) > 0 \mid t \geq \tau \text{ dist}(t, \mathbf{Z}) > \delta \implies p(t) = P(t)$$

donde $P(t)$ es la función periódica:

$$P(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} < t < 1 \end{cases}$$

$$P(t+1) = P(t).$$

1.1.2 Segundo ejemplo de Littlewood.

En un trabajo posterior, Littlewood se ocupó del caso de una fuerza externa periódica. En concreto, en [6] consideró la ecuación

$$\ddot{x} + g(x) = P(t)$$

y probó que hay una función g , superlineal y de clase C^∞ , para la que la ecuación tiene al menos una solución no acotada.

~~La idea de la demostración es la misma, modificando g ??? construimos las orbitas.~~

La construcción sigue las líneas del primer ejemplo pero es más complicada. Para conseguir que los saltos sean periódicos la función g se define por un procedimiento recursivo que resulta bastante artificioso. (Aunque las ideas de [6] son correctas, hay algunos errores en los cálculos que fueron observados y corregidos por Long en [8]. También conviene leer [3].)

Después de [5] y [6] se sabía que la respuesta al problema de Littlewood no era siempre afirmativa. Sin embargo, se ignoraba qué pasaba en casos muy simples como, por ejemplo, $g(x) = x^{2n+1}$.

1.1.3 Desarrollos posteriores.

En el año 1976 apareció un trabajo de Morris [9] sobre la ecuación

$$\ddot{x} + 2x^3 = p(t)$$

donde p es periódica. Haciendo uso del teorema de la curva invariante de Moser, se prueba en [9] que todas las soluciones de esta ecuación están acotadas. Fue el primer resultado afirmativo para el problema de Littlewood y más adelante daremos una demostración completa.

En el 86, Dieckerhoff y Zehnder [1] emplearon técnicas similares y extendieron el resultado de Morris al caso

$$\begin{aligned} \ddot{x} + g(x) &= p(t) \\ g(x) &\text{ polinomio de grado impar.} \end{aligned}$$

Otras extensiones se pueden ver en el trabajo de Levi [2] y en la lista de referencias incluida en ese artículo. Aunque no se ha conseguido una respuesta completa al problema de Littlewood, de todos estos trabajos se desprende que su resolución está muy ligada a la teoría de curvas invariantes para aplicaciones "twist".

Resultados recientes relacionados se encuentran en [4], donde se trata el caso superlineal con fuerza externa cuasi-periódica, y en [12], donde se estudia un caso de crecimiento lineal para g . En los últimos dos años han circulado trabajos de varios autores (aún no publicados) sobre crecimiento lineal y sub-lineal, ecuación de Lienard y sistemas reversibles,... Una cuestión que no parece tratada es la extensión de estas técnicas a otros sistemas hamiltonianos que no provengan de ecuaciones de segundo orden.

1.2 Estabilidad del equilibrio.

De nuevo consideramos la ecuación

$$\ddot{x} + V_x(t, x) = 0$$

donde V es 1-periódica en t . Ahora suponemos que $x \equiv 0$ es solución, $V_x(t, 0) = 0$, y pretendemos estudiar su estabilidad.

La definición de estabilidad que emplearemos es

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \mid x_0 \mid + \mid v_0 \mid < \delta \implies \mid x(t) \mid + \mid \dot{x}(t) \mid < \varepsilon \forall t \in \mathbf{R}.$$

Conviene observar que se trata de estabilidad en el sentido de Lyapunov, tanto para el futuro como para el pasado.

Lyapunov ya se ocupó de este problema cuando V_x es lineal en x . Se obtiene entonces la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + a(t)x = 0,$$

con a 1-periódica. Incluso para este caso lineal, la respuesta al problema de estabilidad no es sencilla. A primera vista parecería que la condición $a(t) > 0$ debiera implicar estabilidad, pues en este caso el campo de fuerzas es atractivo. Sin embargo, es posible construir $a(t)$ positiva y variable de manera que la partícula alcance amplitudes de oscilación cada vez más grandes ("resonancia paramétrica").

En el caso general se requiere información sobre los términos no lineales. Así, si la función V tiene la regularidad adecuada, podemos desarrollar por Taylor respecto de x y obtenemos

$$\ddot{x} + a(t)x + b(t)x^2 + c(t)x^3 + \dots = 0.$$

En los trabajos [11], [10], y [7] se obtienen condiciones suficientes para la estabilidad usando información sobre a , b y c . Por ejemplo en [10] se prueba que si $\ddot{x} + a(t)x = 0$ es estable, $b \equiv 0$ y $c \geq 0$ o $c \leq 0$, entonces $x \equiv 0$ es estable para la ecuación no lineal. En [7] se obtiene un resultado relacionado pero independiente; en concreto, $a \equiv 0$, $b \equiv 0$, $\int_0^1 c > 0$ implican $x \equiv 0$ es estable.

La estabilidad del origen en el péndulo de longitud variable es un asunto muy tradicional (en los libros de Mecánica se suele dar el ejemplo de un niño balanceándose en un columpio). La ecuación es:

$$\ddot{x} + \alpha(t) \sin x = 0$$

con $\alpha > 0$. En este caso $a = \alpha$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{3!}\alpha$ y, por el primer resultado, podemos concluir que basta con estudiar la estabilidad de

$$\ddot{x} + \alpha(t)x = 0.$$

El interés principal de estos teoremas de la tercera aproximación radica en su aplicación al estudio de la estabilidad de soluciones periódicas en casos no locales. Para ello, hay que combinarlos con técnicas globales de Análisis No Lineal (grado topológico, métodos variacionales,...). En [11] hay un ejemplo en esta dirección.

Para ilustrar las técnicas que se emplean en estos dos campos dedicaremos el resto de estas notas a la demostración de dos resultados concretos:

1. Demostración del teorema de Morris;
2. Estudio de la estabilidad de $\ddot{x} + (2 + \varepsilon a(t))x^3 = 0$ en $x \equiv 0$.

2 Teorema de Morris.

Teorema 2.1 (Morris, 1976) *Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua y 1-periódica. Las soluciones de*

$$\ddot{x} + 2x^3 = f(t)$$

son acotadas.

Dividimos la demostración en varias etapas. En primer lugar repasamos el teorema "twist" pequeño, que será la herramienta clave.

2.1 Curvas invariantes.

Usaremos coordenadas polares en el plano. Un punto de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ se representa por (θ, r) donde $r > 0$ y $\theta \equiv \theta + 2\pi$; es decir, $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Sea A un anillo de anchura unidad y definido por

$$A = \{(\theta, r) \mid \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, a \leq r \leq b\}$$

donde $0 < a < b$, $b - a = 1$. Consideramos una aplicación

$$M : A \rightarrow \mathbf{R}^2, (\theta_1, r_1) = M(\theta, r)$$

Definición 2.2 *Sea $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función 2π -periódica y continua que cumple $a \leq \psi(\theta) \leq b$, $\forall \theta \in \mathbf{R}$. Se dice que la curva $\Gamma = \{(\theta, r) \mid r = \psi(\theta)\}$ es invariante si $M(\Gamma) = \Gamma$.*

Ejemplos:

1. Rotación: $\theta_1 = \theta + \omega$, $r_1 = r$.
Las circunferencias $r = cte$, $a \leq cte \leq b$, son curvas invariantes. El número de rotación es el mismo en cada una de ellas.

2. Twist: $\theta_1 = \theta + \omega + \gamma r$, $r_1 = r$, $\gamma > 0$.

De nuevo las circunferencias son curvas invariantes. Ahora el número de rotación se incrementa cuando el radio crece.

3. Contracción: $\theta_1 = \theta$, $r_1 = \frac{1}{2}r$.

No hay curvas invariantes.

Definición 2.3 La aplicación M tiene la propiedad de intersección si

$$\Gamma \cap M(\Gamma) \neq \emptyset$$

para cada curva del tipo $\Gamma : r = \psi(\theta)$, $a \leq \psi \leq b$.

Las rotaciones y la aplicación twist cumplen la propiedad de intersección; la contracción no la cumple.

El teorema del twist pequeño asegura que si M tiene la propiedad de intersección y es una perturbación de la aplicación twist, entonces hay curvas invariantes. Vamos a ser precisos:

Sean Δ_1 y Δ_2 constantes positivas fijas y

$$\Omega = \{(\theta, r) \in \mathbf{C}^2 \mid |\operatorname{Im} \theta| < \Delta_1, \operatorname{dist}(r, [a, b]) < \Delta_2\}.$$

El conjunto Ω es un entorno abierto de A en \mathbf{C}^2 . Supongamos que M tiene la propiedad de intersección y se expresa como

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \omega + \gamma r + F(\theta, r) \\ r_1 = r + G(\theta, r), \end{cases}$$

donde F y G son analíticas en el dominio Ω .

Teorema 2.4 (Moser) Existe $\varepsilon = \varepsilon(\Delta_1, \Delta_2) > 0$ tal que si F y G cumplen

$$|F| + |G| < \gamma\varepsilon \quad \text{en } \Omega$$

entonces M tiene curvas invariantes.

La demostración se puede ver en [13]

2.2 La aplicación de Poincaré.

Lema 2.5 Las soluciones están definidas en $(-\infty, +\infty)$.

Demostración: Se define

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^4.$$

$$\frac{dE}{dt} = f(t)\dot{x} \implies \left| \frac{dE}{dt} \right| \leq |f(t)| \sqrt{2E}.$$

Se resuelve esta inecuación diferencial (con un poco de cuidado, pues la ecuación diferencial asociada presenta no unicidad) y se obtiene:

$$\sqrt{E(t)} \leq \sqrt{E(t_0)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_{t_0}^t |f(s)| ds \right|.$$

Esta desigualdad implica que E está acotada en intervalos de tiempo finito y, por tanto, la solución puede ser prolongada a $(-\infty, +\infty)$. \triangle

Nota 2.6 Esta demostración no usa que f sea periódica. En otros casos puede proporcionar información útil. Por ejemplo,

- $f \in L^1(\mathbf{R}) \implies$ las soluciones son acotadas;
- $f \in L^\infty(\mathbf{R}) \implies \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|}{|t|^2} < \infty$

Dado un punto $p = (x_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$, $x(t, p)$ es la solución que cumple las condiciones iniciales

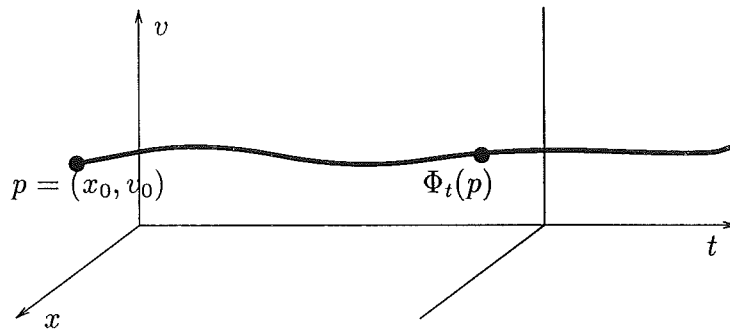
$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Para cada $t \in \mathbf{R}$ definimos la aplicación

$$\Phi_t : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \Phi_t(p) = (x(t, p), \dot{x}(t, p)).$$

Los teoremas de dependencia de condiciones iniciales implican que Φ_t es un difeomorfismo analítico (en sentido real). El teorema de Liouville nos dice que Φ_t conserva áreas; es decir,

$$\det \Phi'_t(p) = 1.$$



Si la función f no es constante, la familia $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ no define un flujo (no cumple $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$). Sin embargo, por ser f 1-periódica,

$$\Phi_{t+1} = \Phi_t \circ \Phi_1 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

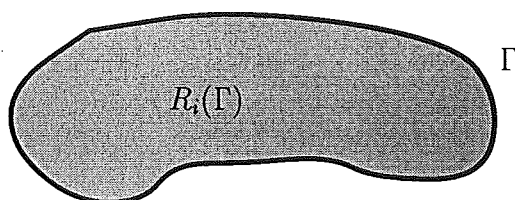
Llamamos aplicación de Poincaré a

$$P = \Phi_1.$$

Por lo anterior, $P^n = \Phi_n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Nota 2.7 Los puntos fijos de P se corresponden con las condiciones iniciales de soluciones 1-periódicas.

Sea $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ una curva de Jordan. Usaremos la notación $R_i(\Gamma)$ para designar a la componente conexa y acotada de $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$.



Lema 2.8 (*Propiedad de intersección*) Sea $p_0 \in \mathbf{R}^2$ un punto fijo de P y Γ una curva de Jordan tal que $p_0 \in R_i(\Gamma)$. Entonces $\Gamma \cap P(\Gamma) \neq \emptyset$.

Nota 2.9 Se sabe que P tiene puntos fijos, pues la ecuación tiene una infinidad de soluciones 1-periódicas. También conviene observar que esta propiedad de intersección afecta a todas las curvas de Jordan, y no sólo a aquellas que se expresan en la forma polar $r = \psi(\theta)$.

Demostración: Usaremos la notación $\Gamma_1 = P(\Gamma)$. Se cumple

$$P(R_i(\Gamma)) = R_i(\Gamma_1),$$

pues P es un homeomorfismo. De aquí,

- i) $p_0 \in R_i(\Gamma) \cap R_i(\Gamma_1)$,
- ii) $\mu[R_i(\Gamma)] = \mu[R_i(\Gamma_1)]$
(μ es la medida de Lebesgue en \mathbf{R}^2).

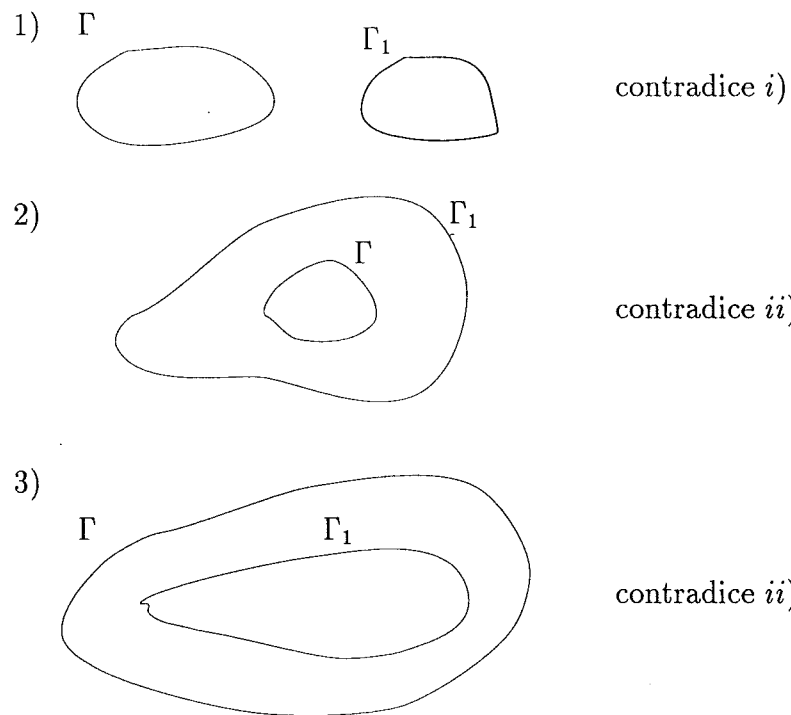
Supondremos $\Gamma \cap \Gamma_1 = \emptyset$ y llegaremos a una contradicción. Hay tres posibilidades (cfr. figura).

△

Lema 2.10 Sea $\Gamma \in \mathbf{R}^2$ una curva de Jordan que es invariante por P ; es decir,

$$P(\Gamma) = \Gamma.$$

Entonces la solución $x(t, p)$ está acotada si $p \in \overline{R_i(\Gamma)}$.



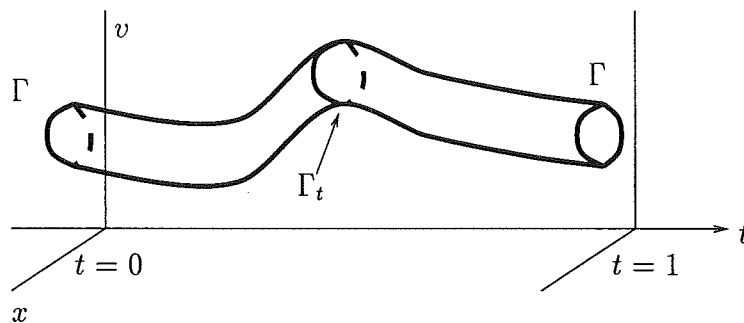
Demostración: Definimos $\Gamma_t = \Phi_t(\Gamma)$. Como Φ_t es homeomorfismo, Γ_t es curva de Jordan. Además

$$\Gamma_{t+1} = \Gamma_t \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

El conjunto $B = \cup_{t \in \mathbf{R}} \overline{R_i(\Gamma_t)}$ se expresa como

$$B = \Phi([0, 1] \times \overline{R_i(\Gamma)})$$

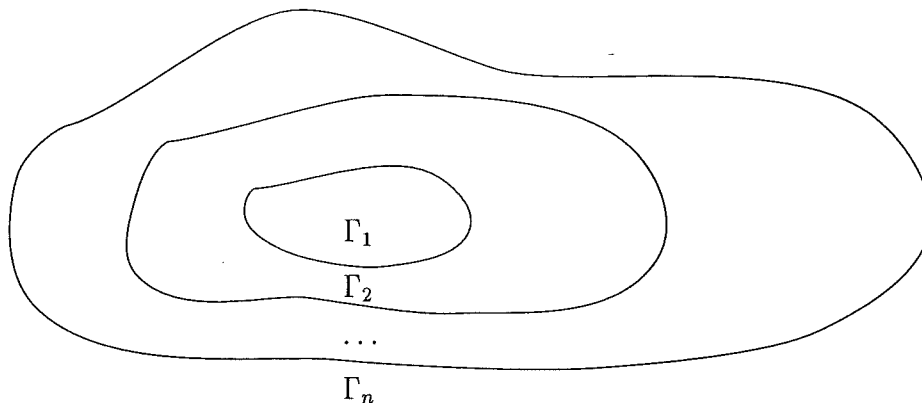
y es, por tanto, compacto (cfr. figura siguiente).



Si $p \in \overline{R_i(\Gamma)}$, entonces $\Phi_t(p) \in \overline{R_i(\Gamma_t)} \subset B \quad \forall t \in \mathbf{R}$. La solución nunca sale de B . \triangle

Nota 2.11 Estrategia para demostrar el teorema: búsqueda de una sucesión de curvas de Jordan $\{\Gamma_n\}_{n \geq 1}$ que son invariantes por P y cumplen

$$\cup_{n \geq 1} R_i(\Gamma_n) = \mathbf{R}^2.$$



2.3 Las coordenadas “polares” (variables de acción-ángulo).

Empezamos por analizar la ecuación autónoma

$$\ddot{x} + 2x^3 = 0.$$

Las órbitas en el espacio de fases (x, \dot{x}) son de la forma $y^2 + x^4 = \text{cte}$.

Dado $\lambda > 0$, sea $x_\lambda(t)$ la solución que cumple

$$x_\lambda(0) = \lambda, \quad \dot{x}_\lambda(0) = 0.$$

Por ser x^3 una función homogénea, se cumple

$$x_\lambda(t) = \lambda x_1(\lambda t).$$

Las funciones x_λ son periódicas con periodo

$$T(\lambda) = \frac{T(1)}{\lambda}.$$

En consecuencia, el periodo T es una función decreciente de la amplitud λ y tal que $T(0) = \infty$, $T(\infty) = 0$.

Sea $\lambda_0 > 0$ el único número tal que $T(\lambda_0) = 2\pi$.

Definimos

$$c(t) = x_{\lambda_0}(t), \quad s(t) = c'(t).$$

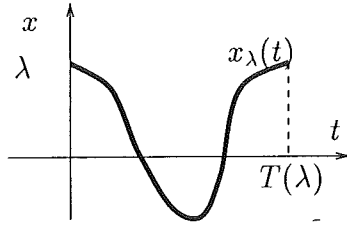
Se trata de funciones 2π -periódicas que cumplen

$$s'(t) = -2c(t)^3.$$

Identidad fundamental:

$$c(t)^4 + s(t)^2 = \lambda_0^4 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

(Las curvas $y^2 + x^4 = \text{cte}$ se parametrizan por $x = kc(t)$, $y = k^2s(t)$, $t \in \mathbf{R}$).



Nota 2.12 Hasta ahora hemos pensado que las funciones c y s tenían argumento t real. Sin embargo, y ya que son analíticas reales y periódicas, se pueden extender a una banda compleja. Aunque no lo usaremos, conviene saber que c es una función trascendente conocida y definida en la franja

$$|\operatorname{Im} t| < \frac{\pi}{2}.$$

El cambio de variable está definido por

$$x = \gamma \rho^\alpha c(\theta), \quad y = \gamma^2 \rho^{2\alpha} s(\theta),$$

donde $\theta \in \mathbf{R}/r2\pi\mathbf{Z}$, $\rho \in (0, \infty)$ y γ, α son parámetros.

Vamos a escoger γ y α para que se trate de un cambio de variables canónico. Con precisión, queremos que

$$\psi: S^1 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (\theta, \rho) \rightarrow (x, y)$$

sea un difeomorfismo analítico y simpléctico.

Dados $\gamma > 0$ y $\alpha > 0$, ψ es siempre un difeomorfismo. La identidad fundamental es clave para probar que ψ es biyectiva. La diferenciabilidad de la inversa se sigue del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \gamma[\rho^\alpha s(\theta) d\theta + \alpha \rho^{\alpha-1} c(\theta) d\rho] \wedge \gamma^2[-\rho^{2\alpha} 2c(\theta)^3 d\theta + 2\alpha \rho^{2\alpha-1} s(\theta) d\rho] = \\ &= \alpha \gamma^3 \rho^{3\alpha-1} 2[s(\theta)^2 + c(\theta)^4] d\theta \wedge d\rho = \\ &= \alpha \gamma^3 \rho^{3\alpha-1} 2 \lambda_0^4 d\theta \wedge d\rho. \end{aligned}$$

Hacemos $\alpha = \frac{1}{3}$, $2\gamma^3 \lambda_0^4 \frac{1}{3} = 1$ y obtenemos el cambio canónico:

$$x = \gamma \rho^{\frac{1}{3}} c(\theta), \quad y = \gamma^2 \rho^{\frac{2}{3}} s(\theta).$$

2.4 El nuevo sistema.

La ecuación $\ddot{x} + 2x^3 = f(t)$ tiene estructura hamiltoniana:

$$\dot{x} = y = H_y \quad \dot{y} = -2x^3 + f(t) = -H_x \quad H(t; x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4 - f(t)x.$$

En las nuevas coordenadas el hamiltoniano es

$$h(\theta, \rho) = H \circ \psi(\theta, \rho) = \frac{\gamma^4}{2} \lambda_0^4 \rho^{\frac{4}{3}} - \gamma f(t) \rho^{\frac{1}{3}} c(\theta)$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = h_\rho = \frac{2}{3}\gamma^4\lambda_0^4\rho^{\frac{1}{3}} - \frac{\gamma}{3}f(t)c(\theta)\rho^{\frac{-2}{3}} = \gamma\rho^{\frac{1}{3}} - \frac{\gamma}{3}f(t)c(\theta)\rho^{\frac{-2}{3}} \\ \dot{\rho} = -h_\theta = \gamma f(t)\rho^{\frac{1}{3}}s(\theta) . \end{cases}$$

Para evitar la raíz cúbica hacemos el cambio

$$\rho = r^3$$

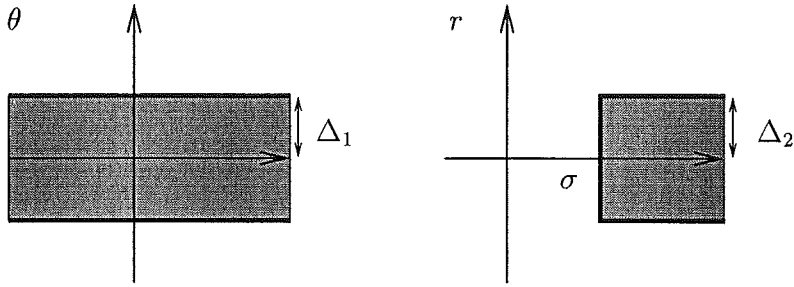
y llegamos finalmente a

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \gamma r - \frac{\gamma f(t)c(\theta)}{3r^2} \\ \dot{r} = \frac{\gamma f(t)s(\theta)}{3r} . \end{cases}$$

Este sistema está definido para $\theta \in \mathbf{R}/r2\pi\mathbf{Z}$, $r > 0$. Sabemos, por el primer lema, que las soluciones no pueden explotar en tiempo finito; pero esto no quiere decir que siempre estén definidas en $(-\infty, +\infty)$, pues el cambio de variable ha introducido una singularidad en el origen.

Ahora vamos a suponer que θ y r pueden tomar valores complejos (el tiempo sigue siendo real) y se mueven en un dominio de la forma

$$\Omega = \Omega(\sigma; \Delta_1, \Delta_2) = \{(\theta, r) \in \mathbf{C}^2 \mid \operatorname{Re} r > \sigma, \mid \operatorname{Im} \theta \mid < \Delta_1, \mid \operatorname{Im} r \mid < \Delta_2\}$$



Suponemos que Δ_1 no es muy grande para que c y s estén bien definidos en $\mid \operatorname{Im} \theta \mid < \Delta_1$ y se cumpla

$$\mid c(\theta) \mid, \mid s(\theta) \mid \leq M \quad \text{si} \quad \mid \operatorname{Im} \theta \mid < \Delta_1$$

(es suficiente $\Delta_1 \leq \frac{\pi}{2}$).

Las soluciones (complejas) $\theta(t)$ y $r(t)$, $(\theta_0, r_0) \in \Omega$, dependen analíticamente de (θ_0, r_0) .

Lema 2.13 (*Estimaciones*) *Existen constantes $\Sigma, \delta_1, \delta_2, K > 0$ tales que si $(\theta_0, r_0) \in \Omega(\Sigma; \delta_1, \delta_2)$ entonces*

$$(\theta(t), r(t)) \in \Omega(\sigma; \Delta_1, \Delta_2) \quad \forall t \in [0, 1]$$

y además se cumple la estimación

$$\mid \theta(t) - \theta_0 - \gamma r_0 t \mid + \mid r(t) - r_0 \mid \leq \frac{K}{\mid r_0 \mid} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Demostración: La hacemos en dos etapas. En primer lugar probamos que si Σ , δ_1 , δ_2 son constantes positivas que cumplen

$$\Sigma > \sigma, \quad \delta_1 < \Delta_1, \quad \delta_2 < \Delta_2, \quad \Sigma \text{ suficientemente grande,}$$

entonces se cumple la estimación en tanto que la solución no sale de $\Omega(\sigma; \Delta_1, \Delta_2)$. Más tarde seleccionaremos las constantes para que la solución no salga antes del tiempo $t = 1$.

Sea $\tau \in (0, 1]$ tal que

$$(\theta(t), r(t)) \in \Omega(\sigma; \Delta_1, \Delta_2) \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Sea $C_1 := \frac{\gamma \|f\|_\infty M}{3\sigma} \geq |\dot{r}(t)|$ (se observa que $|r(t)| > \sigma$).

Esta estimación lleva a

$$|r(t) - r_0| \leq \int_0^t |\dot{r}(s)| ds \leq C_1 \quad \implies \quad |r(t)| \geq |r_0| - C_1$$

Volviendo a la ecuación con esta nueva información,

$$|\dot{r}(t)| \leq \frac{\gamma \|f\|_\infty M}{3(|r_0| - C_1)} \leq \frac{C_2}{|r_0|}$$

(se supone $\Sigma > C_1 \implies |r_0| - C_1 > 0$).

Obtenemos la estimación para r :

$$|r(t) - r_0| \leq \frac{C_2}{|r_0|},$$

donde C_2 es una constante fija. Reescribimos la ecuación en θ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} - \gamma r_0 &= \gamma(r - r_0) - \frac{\gamma f(t)c(\theta)}{3r^2} \\ \implies |\dot{\theta} - \gamma r_0| &\leq \frac{\gamma C_2}{|r_0|} + \frac{\gamma \|f\|_\infty M}{3(|r_0| - C_1)^2} \leq \frac{C_3}{|r_0|} \\ \implies |\theta(t) - \theta_0 - \gamma r_0 t| &\leq \frac{C_3}{|r_0|} \end{aligned}$$

Una vez que sabemos que se cumple la estimación, vamos a seleccionar Σ , δ_1 y δ_2 .

Exigimos

$$\begin{aligned} \Sigma - \frac{K}{\Sigma} &> \sigma, & \delta_2 + \frac{K}{\Sigma} &< \Delta_2, \\ \delta_1 + \gamma \delta_2 + \frac{K}{\Sigma} &< \Delta_1, & \Sigma &> C_1, \end{aligned}$$

donde $K = \max\{C_2, C_3\}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} r(t) &\geq \operatorname{Re} r_0 - |r(t) - r_0| \geq \Sigma - \frac{K}{\Sigma} > \sigma, \\ |\operatorname{Im} \theta(t)| &\leq |\operatorname{Im} \theta_0| + \gamma |\operatorname{Im} r_0| + \frac{K}{|r_0|} \leq \delta_1 + \gamma \delta_2 + \frac{K}{\Sigma} < \Delta_1, \\ |\operatorname{Im} r(t)| &\leq |\operatorname{Im} r_0| + \frac{K}{|r_0|} \leq \delta_2 + \frac{K}{\Sigma} < \Delta_2. \end{aligned}$$

Podemos hacer $\tau = 1$.

△

2.5 Demostración del Teorema.

Sea $(\theta_1, r_1) = M(\theta_0, r_0) = (\theta(1; \theta_0, r_0), r(1; \theta_0, r_0))$. De acuerdo al lema anterior,

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_0 + \gamma r_0 + F(\theta_0, r_0) \\ r_1 &= r_0 + G(\theta_0, r_0),\end{aligned}$$

con $\gamma > 0$, $(\theta_0, r_0) \in \Omega(\Sigma; \delta_1, \delta_2)$, $|F(\theta_0, r_0)| + |G(\theta_0, r_0)| \leq \frac{K}{|r_0|}$.

Hacemos en el teorema twist $a = n$ y $b = n + 1$ con n muy grande. Es claro que M tiene la propiedad de intersección (pues procede de P después de algunos cambios de variable) y entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, M tiene una curva invariante en $n \leq r \leq n + 1$. Ahora es bastante deshacer los cambios y encontrar curvas invariantes para P .

3 Estabilidad del equilibrio: un ejemplo.

Sea $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua y 1-periódica y $\lambda \in (0, 1)$ un parámetro. Se considera la ecuación

$$\ddot{x} + (2 + \lambda a(t))x^3 = 0$$

y se pretende probar que existe $\lambda_0 = \lambda_0(\|a\|_\infty) > 0$ tal que si $0 < \lambda < \lambda_0$ entonces $x \equiv 0$ es estable.

3.1 La aplicación de Poincaré.

Sea $D = \{(x_0, v_0) \in \mathbf{R}^2 \mid x_0^2 + v_0^2 \leq 1\}$ el disco unidad de \mathbf{R}^2 . Existe $\lambda_1 > 0$ tal que si $0 < \lambda < \lambda_1$ entonces la solución $x(t; x_0, v_0)$ está definida en $t \in [0, 1]$.

Consideramos la aplicación de Poincaré

$$P : D \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad P(x_0, v_0) = (x(1; x_0, v_0), \dot{x}(1; x_0, v_0)),$$

que es un C^ω -difeomorfismo de D sobre $P(D)$. Además, P conserva áreas y el origen es un punto fijo.

3.2 Propiedad de intersección.

Sea $\Gamma \subset D$ una curva de Jordan con $0 \in R_i(\Gamma)$. Entonces

$$\Gamma \cap P(\Gamma) \neq \emptyset.$$

3.3 Estabilidad y curvas invariantes.

Sea $\{\Gamma_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de curvas de Jordan en D que cumplen

- i) $P(\Gamma_n) = \Gamma_n$,
- ii) $0 \in R_i(\Gamma_n)$,
- iii) $\text{diam}(\Gamma_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Entonces $x \equiv 0$ es estable.

3.4 Cambios de variable.

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x, \quad H(t, x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{\lambda}{4}a(t)x^4.$$

$$x = \gamma\rho^{\frac{1}{3}}c(\theta), \quad y = \gamma^2\rho^{\frac{2}{3}}s(\theta) \rightarrow$$

$$h(t, \theta, \rho) = \frac{\gamma^4}{2}\lambda_0^4\rho^{\frac{4}{3}} + \frac{\lambda\gamma^4}{4}a(t)c(\theta)^4\rho^{\frac{4}{3}}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = h_\rho = \gamma\rho^{\frac{1}{3}} + \frac{\lambda\gamma^4}{3}a(t)c(\theta)^4\rho^{\frac{1}{3}} \\ \dot{\rho} = -h_\theta = -\lambda\gamma^4a(t)c(\theta)^3s(\theta)\rho^{\frac{4}{3}}. \end{cases}$$

$$\rho = r^3 \rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \gamma r + \frac{\lambda\gamma^4}{3}a(t)c(\theta)^4r \\ \dot{r} = -\frac{\lambda\gamma^4}{3}a(t)c(\theta)^3s(\theta)r^2. \end{cases}$$

Sea $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ un parámetro. Hacemos el cambio de escala

$$\varepsilon R = r, \quad R \in [1, 2].$$

Entonces

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \gamma\varepsilon R + \frac{\lambda\varepsilon\gamma^4}{3}a(t)c(\theta)^4R \\ \dot{R} = -\frac{\lambda\varepsilon\gamma^4}{3}a(t)c(\theta)^3s(\theta)R^2. \end{cases}$$

3.5 Estimaciones

Consideramos el dominio de \mathbf{C}^2

$$\Omega = \{(\theta, R) \in \mathbf{C}^2 \mid |\operatorname{Im}\theta| < \Delta, \operatorname{dist}(R, [1, 2]) < \frac{1}{2}\}.$$

(En particular, $(\theta, R) \in \Omega \implies \frac{1}{2} < |R| < \frac{5}{2}$).

Probamos que existen $\lambda_2 > 0$, $\delta_1 \in (0, \Delta)$ y $\delta_2 \in (0, \frac{1}{2})$ tales que $0 < \lambda < \lambda_2$, $|\operatorname{Im}\theta_0| < \delta_1$ y $\operatorname{dist}(R_0, [1, 2]) < \delta_2$

$$\implies \begin{aligned} &(\theta(t), R(t)) \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1] \\ &|\theta(t) - \theta_0 - \gamma\varepsilon R_0 t| + |R(t) - R_0| \leq K\varepsilon\lambda. \end{aligned}$$

3.6 Aplicación del Teorema del Twist.

$$\Omega' = \{(\theta, R) \in \mathbf{C}^2 \mid |\operatorname{Im}\theta| < \delta_1, \operatorname{dist}(R_0, [1, 2]) < \delta_2\}.$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 + \gamma\varepsilon R_0 + O(\lambda\varepsilon) \\ R_1 = R_0 + O(\lambda\varepsilon). \end{cases}$$

Si λ es pequeño tiene una curva invariante (para cada $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$).

4 Algunos problemas relacionados.

1. Estudio en profundidad del ejemplo de Littlewood: variantes, dinámica, relación con las aplicaciones “twist” que no tienen curvas invariantes...
2. Acotación en el modelo de presa-depredador de Volterra

$$\begin{aligned} u' &= u(a(t) - b(t)v) & u > 0 \\ v' &= v(c(t) - d(t)u) & v > 0 \end{aligned}$$

donde a, b, c, d son funciones 1-periódicas.

Se sabe

$$\text{existe solución 1-periódica} \iff \int_0^1 a > 0, \int_0^1 c > 0$$

Pregunta: ¿Es esta condición también suficiente para la acotación (y no extinción) de todas las soluciones?

3. Se considera la ecuación

$$x'' + 2x^3 = f_1(t) + f_2(t).$$

¿Es posible encontrar criterios de acotación si f_1 es periódica y f_2 es arbitraria pero “pequeña” en algún sentido ($f_2 \in L^1(\mathbf{R}), L^p(\mathbf{R})?$...).

References

- [1] R. DIECKERHOFF AND E. ZEHNDER, Boundedness of solutions via the twist-theorem, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV* **XIV** (1987) 79-95.
- [2] M. LEVI, Quasiperiodic motions in superquadratic time-periodic potentials, *Comm. Math. Phys.* **143** (1991) 43-83.
- [3] M. LEVI, On Littlewood’s counterexample on unbounded motion in superquadratic potentials, *Dynamics Reported: Expositions in Dynamical Systems* **1** (1992) 113-124.
- [4] M. LEVI AND E. ZEHNDER, Boundedness of solutions for quasiperiodic potentials, *SIAM J. Math. An.* **26** (1995) 1233-1256.
- [5] J.E. LITTLEWOOD, Unbounded solutions of $\ddot{y} + g(y) = p(t)$, *J. London Math. Soc.* **41** (1966) 491-496.
- [6] J.E. LITTLEWOOD, Unbounded solutions of an equation $\ddot{y} + g(y) = p(t)$, with $p(t)$ periodic and bounded and $g(y)/y \rightarrow \infty$ as $y \rightarrow \pm\infty$, *J. London Math. Soc.* **41** (1966) 497-507.

- [7] B. LIU, The stability of the equilibrium of a conservative system, *J. Math. Analysis and App.* **202** (1996) 133-149.
- [8] Y. LONG, An unbounded solution of a superlinear Duffing's equation, *Acta Math. Sinica* **7** (1991) 360-369.
- [9] G.R. MORRIS, A case of boundedness in Littlewood's problem on oscillatory differential equations, *Bull. Austral. Math. Soc.* **14** (1976) 71-93.
- [10] R. ORTEGA, The stability of the equilibrium of a nonlinear Hill's equation, *SIAM J. Math. An.* **25** (1994) 1393-1401.
- [11] R. ORTEGA, Periodic solutions of a newtonian equation: stability by the third approximation, *J. Diff. Eqs.* **128** (1996) 491-518.
- [12] R. ORTEGA, Asymmetric oscillators and twist mappings, *J. London Math. Soc.* **53** (1996) 325-342.
- [13] C.L. SIEGEL AND J. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin 1971).