ECUACIONES DIFERENCIALES Y MECÁNICA

LEANDRO DEL PEZZO, ANALÍA SILVA, MARÍA LAURA NONI

1. Sistemas Hamiltonianos

Ejercicio 1. *(Se corresponde al ejercicio 2 de la unidad 1)*
Se considera el sistema $\dot{x} = -x$, $x \in \mathbb{R}^{2N}$. Demostrar que no existe ningún difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ que transforme el sistema en uno hamiltomiano.
Demo:

Como $\dot{x} = -x$ es un sistema autónomo, si existiera un cambio de variables (difeomorfismo) para el cual fuera hamiltoniano, el hamiltomiano sería una integral primera. Vamos a demostrar que cualquier integral primera es contante, con lo cual no existe un difeo que lo transforme en un sistema hamiltoniano.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$un difeomorfismo y sea F una integral primera del sistema obtenido al aplicar el difeomorfismo a $\dot{x} = -x$. Entonces $F(\varphi(x(t, \xi_0))) = C_{\xi_0}$ donde $x(t, \xi_0)$ es la solución que verifica $x(0) = \xi_0$ y C_{ξ_0} es una constante que depende de la condición inicial.

Tomando los siguientes límites:

$$\lim_{t\to\infty} F(\varphi(x(t, \xi_0))) = \lim_{t\to\infty} F(\varphi(\xi_0 exp^{-t})) = F(\varphi(0)) \quad \forall \xi_0 \tag{1}$$

$$\lim_{t\to\infty} C_{\xi_0} = C_{\xi_0} \tag{2}$$

Entonces igualando 1 y 2 obtenemos que $C_{\xi_0} = F(\varphi(0)) \quad \forall \xi_0$, entonces $C_{\xi_0} = C \quad \forall \xi_0$. Por lo tanto $F(\varphi(x(t, \xi_0))) = C \forall \xi_0 \forall t$, entonces $F \circ \varphi = C$, entonces F es constante.

Ejercicio 2. *(Se corresponde al ejercicio 3 de la unidad 1)*
En la corona $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 <| x |< 2\}$ encontrar un campo V con divergencia cero de manera que $\dot{x} = V(x)$ no tenga estructura hamiltoniana.
Proponemos el campo

$$V(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y)) = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}) \tag{3}$$

el cual tiene divergencia cero:

$$divV = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \tag{4}$$

y no tiene estructura hamiltoniana. Supongamos que si, entonces existe $H \in C^1$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{5}$$

Integrando obtenemos:

Date: 12 de Septiembre de 2008.

$$H(x,y) = \begin{cases} Arctg(\frac{y}{x}) + k_1, & \text{x} \neq 0; \\ -Arctg(\frac{x}{y}) + k_2, & \text{sino.} \end{cases} \tag{6}$$

Pero H no es continua, pues por ejemplo $\lim_{x\to 0^+} H(x,3/2) = \pi/2 + k_1$ y $\lim_{x\to 0^-} H(x,3/2) = -\pi/2 + k_1$ entonces $\pi/2 = -\pi/2$, entonces no es continua en Ω

Ejercicio 3. *(Se corresponde al ejercicio 5 de la unidad 1)*
Acerca del problema restringido de los tres cuerpos. Decir qué ocurriría si las primarias giraran en sentido horario. Se llegaría a las mismas ecuaciones?

Veamos que no se llega a las mismas ecuaciones. Efectuamos la rotación en sentido horario: $r_3 = R[t] \cdot z$, $z = z(t)$ y $R[t] = \begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}$. Entonces $\dot{R}[t] = \begin{pmatrix} -sen(t) & cos(t) \\ -cos(t) & -sen(t) \end{pmatrix} = R[t] \cdot \widetilde{J}$, donde $\widetilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $\ddot{R}[t] = \widetilde{J}^2 \cdot R[t] = -R[t]$. Por lo tanto:

$$\dot{r}_3 = \dot{R}[t] \cdot z + R[t] \cdot \dot{z} = R[t] \cdot \widetilde{J} \cdot z + R[t] \cdot \dot{z} \tag{7}$$

De lo que obtenemos:
(8)

$$\ddot{r}_3 = \ddot{R}[t]\cdot z + 2\dot{R}[t]\cdot\dot{z} + R[t]\cdot\ddot{z} = -R[t]\cdot z + 2R[t]\cdot\widetilde{J}\cdot\dot{z} + R[t]\cdot\ddot{z} = (1-\mu)\frac{R[t]P_1 - r_3}{\| R[t]P_1 - r_3 \|^3} + \mu\frac{R[t]P_2 - r_3}{\| R[t]P_2 - r_3 \|^3}$$

Como $R[t]$ es una isometría lineal obtenemos:

$$-z + 2\widetilde{J} \cdot \dot{z} + \ddot{z} = (1-\mu) + \mu\frac{P_2 - z}{\| P_2 - z \|^3} + (1-\mu)\frac{P_1 - z}{\| P_1 - z \|^3} \tag{9}$$

Rotando en sentido antihorario en la ecuación 9 hay que reemplazar $\widetilde{J}$ por $J = -\widetilde{J}$.
Con lo cual la ecuación queda distinta.

Podemos concluir que el sistema no es reversible, pues si tomamos $u(t) = z(-t)$, siendo $z(t)$ solución de 9 y suponemos que $u(t)$ es solución de 9 llegamos a que $\dot{z} = 0$, lo cual ocurre sólo en los cinco puntos de libración.

Ejercicio 4. *(Se corresponde al ejercicio 6 de la unidad 1)*
Acerca del problema restringido de los tres cuerpos. Consideramos una partícula que sigue la ley $\ddot{r_3} = 0$ y se efectúa el cambio de variables $r_3 = R[t] \cdot z$. Encontrar la ecuación diferencial para z y asociar a dicha ecuación una estructura hamiltoniana. Describir la trayectoria z(t).

Rotando en sentido antihorario obtenemos:

$$0 = \ddot{z} + 2J \cdot \dot{z} - z \tag{10}$$

Aplicamos el siguiente cambio de variables (el cual es un difeomorfismo):

$$\begin{cases} q = z \\ p = \dot{z} + J \cdot z \end{cases} \tag{11}$$

Operando obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{q} = p - J \cdot q \\ \dot{p} = -J \cdot p \end{cases} \tag{12}$$

El sistema 12 tiene estructura hamiltoniana, siendo el hamiltoniano asociado:

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + q_2 p_1 - q_1 p_2 \tag{13}$$

Con respecto a la trayectoria de z, tenemos que como $\ddot{r_3} = 0$, entonces $r_3(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $z[t] = R[t]r_3(t) = R[t](a + bt)$. En la figura 1 se puede observar la trayectoria de z[t] en un caso particular en el cual $b = 0$ y en la figura 2, en un caso en el que $a = 0$. En la figura 1 se puede ver que las proyecciones sobre el plano z son circunferencias y en la figura 2 que las proyecciones sobre el plano z son espirales.

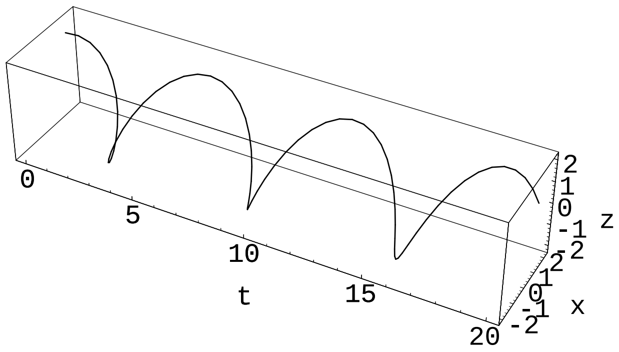

FIGURA 1. z(t), con a=(1,2) y b=(0,0)

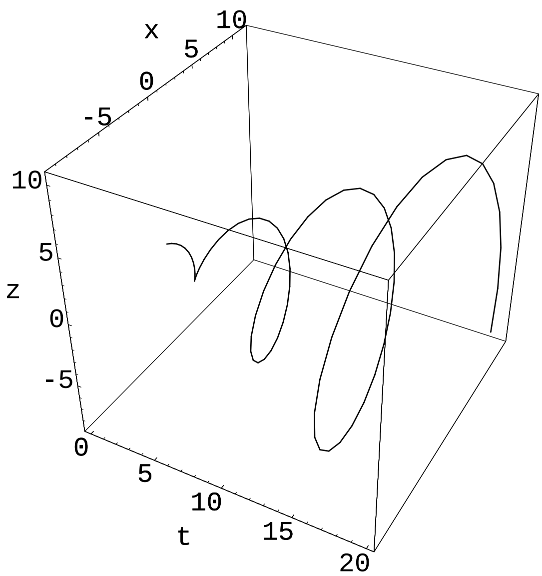

FIGURA 2. z(t), con a=(0,0) y b=(0.5,0.3)

2. Flujos que conservan la medida

Ejercicio 5. *(Se corresponde al ejercicio 1 de la unidad 2)*
Construir un ejemplo de manera que $\Omega_t = \emptyset$ para algún $t \in \mathbb{R}$
Demo:

Sea $\dot{x} = X(t,x)$ donde $X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ es un campo de clase $C^{0,1}$ y sea $x(t,\xi)$ la solución que pasa por ξ en $t = 0$ definida en el intervalo maximal $(\alpha(\xi), \beta(\xi))$ y sea $\Omega_t = \{\xi \in \Omega : t \in (\alpha(\xi), \beta(\xi))\}$

Definimos $X(t,x) = 1 + x^2$, por lo tanto la solución es $x(t) = tang(t) + \xi$ en el intervalo maximal $(-\pi/2, \pi/2)$

Con este campo observamos que $\Omega_{\pi/2} = \emptyset$, es más $\Omega_t = \emptyset \; \forall |t| \geq \pi/2$

Ejercicio 6. *(Se corresponde al ejercicio 2 de la unidad 2)*
Sea (X,d) un espacio métrico separable, con medida μ finita. Sea H la hipótesis de que la medida de todo abierto no vacío es positiva.

1. Demostrar que si $h : X \to X$ es un homeomorfismo que conserva medida entonces no hay atractores ni repulsores.
2. Demostrar que la hipótesis H es esencial para que se cumpla el item anterior.

Demo 1):
Supongo que existe $p \in X$ un atractor. Entonces existe V abierto tal que $p \in V$ y $\forall x \in V \; h^n(x) \to p$ si $n \to \infty$.
Como queremos aplicar el teorema de recurrencia de Poincare y necesitamos que V sea invariante y de medida finita, redefinimos V de la siguiente forma:
$V = \{q \in X : \lim_{n->\infty} h^n(q) = p\}$. Entonces, por dicho teorema casi todos los puntos de V son recurrentes, es decir que existe Z conjunto de medida nula, tal que todo punto en $V - Z$ es recurrente.
Sea $q \in V - Z$, $q \neq p$, como q es recurrente una parcial de $h^n(q)$ tiende a q y como p es atractor $\lim_{n\to\infty} h^n(q) = p$, entonces $p = q$. Lo cual es un absurdo, entonces X no tiene atractores.
Analogamente tomando h^{-1} se puede ver que X no tiene repulsores, pues el teorema de recurrencia de Poincare es para el pasado y para el futuro.

Demo 2):
La hipótesis de medida positiva para abiertos no vacíos es esencial, ya que si tomamos $X = \mathbb{R}^2$, $h(x) = x/2$ y como medida la delta de Dirac, no se cumple 1. A pesar de cumplir el resto de las hipótesis 0 es un atractor.