Ecuaciones Diferenciales I   15/16

Relación de Ejercicios 5

1 Calcula la solución general del sistema lineal homogéneo $x' = Ax$ para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Se considera el problema de valores iniciales para el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$x'' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0,$$

con $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$, I intervalo abierto, $t_0 \in I$, $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^N$. Demuestra que la sucesión de iterantes

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (t-s)\,[A(s)x_n(s) + b(s)]\,ds + x_0 + v_0(t - t_0)$$

con inicialización $x_0(t) = x_0$ converge uniformemente en compactos de I a una solución del problema. Demuestra que esta solución es única.

3 Construye un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo que tenga como soluciones linealmente independientes $x_1 = (1, \operatorname{sen} t)^T, x_2 = (\operatorname{sen} t, 1)^T$. Justifica razonadamente si los coeficientes de tal sistema pueden estar o no definidos en toda la recta real.

4 Consideremos el sistema

$$x' = Ax + b(t),$$

donde A es una matriz cuadrada de orden N y $b(t) = e^{\mu t}v$, con $v \in \mathbb{R}^N$. Si μ no es valor propio de A, prueba que existe una solución particular de la forma $x(t) = e^{\mu t}w$. Usa esta idea y el principio de superposición para encontrar una solución particular del sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - 3x_2 + 3e^{2t}, \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 - 8e^{-3t}. \end{aligned}$$

5 Se considera el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son continuas. Demuestra que este sistema se puede reformular como una ecuación escalar compleja del tipo $z' = \alpha(t)z$ donde la incógnita $z = z(t)$ puede tomar valores complejos y la función $\alpha : I \to \mathbb{C}$ se determina a partir de $a(t)$ y $b(t)$. Utiliza este hecho para resolver el sistema original.

6 Dadas las funciones

$$x(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \operatorname{sen}(t\sigma)d\sigma, \qquad y(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \cos(t\sigma)d\sigma,$$

demuestra que (x, y) es solución de un sistema lineal homogéneo. Resuelve el sistema con las condiciones iniciales adecuadas para calcular las integrales (*indicación:* $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

7 Dada una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema $x' = A(t)x$, con $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ continua y una función $\Psi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ de clase C^1, demuestra que

$\Psi(t)$ es matriz fundamental si y solo si existe una matriz constante $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ con $\det C \neq 0$ tal que $\Psi(t) = \Phi(t)C$.

8 Dos tanques del mismo volumen V contienen inicialmente agua salada con concentración C_1, C_2 respectivamente. Se produce un transvase de agua entre los dos tanques a una velocidad fija de k litros/min y en ambas direcciones, de manera que el volumen V de cada tanque se mantiene constante. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que rige la cantidad de sal Q_1, Q_2 en cada tanque. Explica el comportamiento a largo plazo.

9 Dada $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N\times N})$, demuestra que si $A(t)$ conmuta con $B(t) = \int_0^t A(s)ds$, entonces $\Phi(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}$ es matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$.

10 Por el método de variación de constantes, encuentra la solución general del sistema completo $x' = Ax + b(t)$ en los siguientes casos

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$