Ecuaciones Diferenciales I 15/16

Relación de Ejercicios 2

1 Estudie las soluciones de la ecuación
$$x' = \frac{t-5}{x^2}$$
dando en cada caso su intervalo maximal de definición.

2 En Dinámica de Poblaciones, dos modelos muy conocidos son la ecuación de Verhulst o logística
$$P'(t) = P(t)\left[\alpha - \beta P(t)\right]$$
y la ecuación de Gompertz
$$P'(t) = P(t)\left[\alpha - \beta \ln P(t)\right],$$
siendo $P(t)$ la población a tiempo t de una determinada especie y α, β parámetros positivos. Calcule en cada caso la solución con condición inicial $P(0) = 100$.

3 Nos planteamos resolver la ecuación
$$x' = \cos\left(t - x\right).$$
Compruebe que el cambio $y = t - x$ nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de $x(t)$. Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

4 Experimentalmente, se sabe que la resistencia al aire de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Por tanto, si $v(t)$ es la velocidad a tiempo t, la ecuación de Newton nos dice que
$$v' + \frac{k}{m}v^2 = g,$$
donde m es la masa del cuerpo, g es la constante de gravitación universal y $k > 0$ depende de la geometría (aerodinámica) del cuerpo. Si se supone que $v(0) = 0$, calcule la solución explícita y describa el comportamiento a largo plazo.

5 Calcule la solución de la ecuación
$$y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$
que verifica $y(0) = 1$.

6 Resuelva los siguientes problemas lineales

a) $x' + 3x = e^{-3t}, x(1) = 5$

b) $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}, x(2) = 0$

c) $x' = (\cosh t)x + \sinh t, x(0) = 1$

7 Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $a(t) \geq c > 0$ para todo t y
$$\lim_{t \to +\infty} b(t) = 0.$$
Demuestre que todas las soluciones de la ecuación $x' = -a(t)x + b(t)$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$. (Indicación: regla de L'Hôpital en la fórmula de variación de constantes)

8 La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$. Compruebe que el cambio de variable $y = x^\alpha$ lleva la ecuación de Bernoulli a una ecuación del mismo tipo, y ajuste el valor de α para que la ecuación obtenida sea lineal ($n = 0$). Usando el cambio anterior, resuelva los problema de valores iniciales

$$x' = x + t\sqrt{x}, \qquad x(0) = 1.$$

9 Se considera la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

Encuentre una solución particular de la forma $y(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando esta solución particular, calcule la solución que cumple $y(1) = 2$ y estudie su intervalo maximal de definición.

10 Encuentre una curva $y = y(x)$ que pase por el punto $(1, 2)$ y cumpla la siguiente propiedad: la distancia de cada punto de la curva al origen coincide con la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas. (C. Sturm, Cours d'Analyse 1859, Vol 2, pag 41).

11 Identifique la clase de ecuaciones invariantes por el grupo de transformaciones $s = \lambda t, y = \lambda^2 x$, con $\lambda > 0$.

12 Resuelva los problemas 42 y 45 (pag. 79) del libro de Nagle-Saff-Sneider.