Lección 2. Cambios de variable

Ecuaciones Diferenciales I
Apuntes de Rafael Ortega Ríos
transcritos por Gian Nicola Rossodivita

1 Cambios de variable

Dada una ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

y un cambio de variable

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

del plano (t, x) al plano (s, y), queremos transportar la ecuación a las nuevas variables

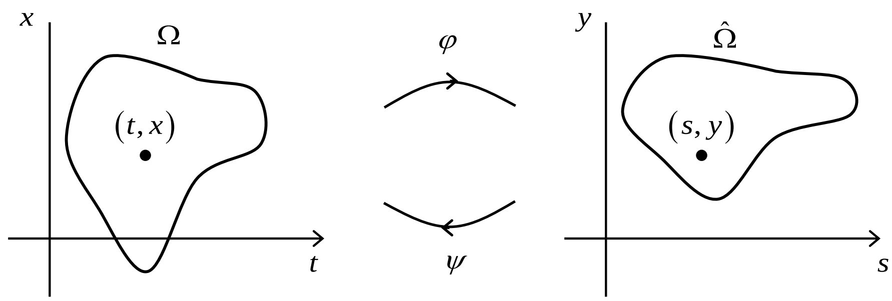
$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y).$$

Suponemos que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ transporta un dominio Ω de $\mathbb{R}^2$ a otro dominio $\widehat{\Omega}$ (dominio= abierto+conexo$\subset \mathbb{R}^2$) Llamaremos $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ al cambio inverso

$$\begin{cases} t = \psi_1(\cancel{t, x}) & (s,y) \\ x = \psi_2(\cancel{t, x}) & (s,y) \end{cases}$$

de manera que

$$\psi \circ \varphi = id_\Omega, \quad \varphi \circ \psi = id_{\widehat{\Omega}}.$$



Supongamos que la función $f = f(t,x)$ está definida en Ω y es conocida y queremos encontrar $\hat{f} = \hat{f}(s,y)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\hat{f} : \widehat{\Omega} \to \mathbb{R}$. Para ello hacemos algunos cálculos formales.

Suponemos que $x = x(t)$ es solución de $x' = f(t,x)$ y derivamos las funciones compuestas

$$
\begin{aligned}
s(t) = \varphi_1(t,x(t)) \Rightarrow \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, x' \overbrace{=}^{x(t)\,\text{solución}} \\
&= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, f(t,x) \qquad (1) \\
y(t) = \varphi_2(t,x(t)) \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)\, f(t,x) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Si las ecuaciones $s = \varphi_1(t,x(t))$, $y = \varphi_2(t,x(t))$ definen una función $y = y(s)$,

$$
\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)}, \qquad (3)
$$

donde se ha derivado la función inversa $t = t(s)$.

Estamos buscando una ecuación en las variables (s,y), así que usamos $(t,x) = \psi(s,y)$ para llegar a la nueva ecuación

$$
\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))\, f(\psi(s,y))}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))\, f(\psi(s,y))} = \hat{f}(s,y). \qquad (4)
$$

Hemos encontrado $\hat{f} = \hat{f}(s,y)$.

Veamos un **ejemplo.** Consideramos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\operatorname{sen}^4(2t+x+1)}{(2x-t+3)^2}$$

y el cambio de variable

$$\varphi : \begin{cases} s = 2t + x + 1 \\ y = 2x - t + 3 \end{cases} .$$

Podemos encontrar el cambio inverso sin más que despejar t y x

$$\psi : \begin{cases} t = \frac{1+2s-y}{5} \\ x = \frac{s+2y-7}{5}. \end{cases}$$

Tanto φ como ψ están definidas en todo el plano, pero no así la ecuación diferencial. La función

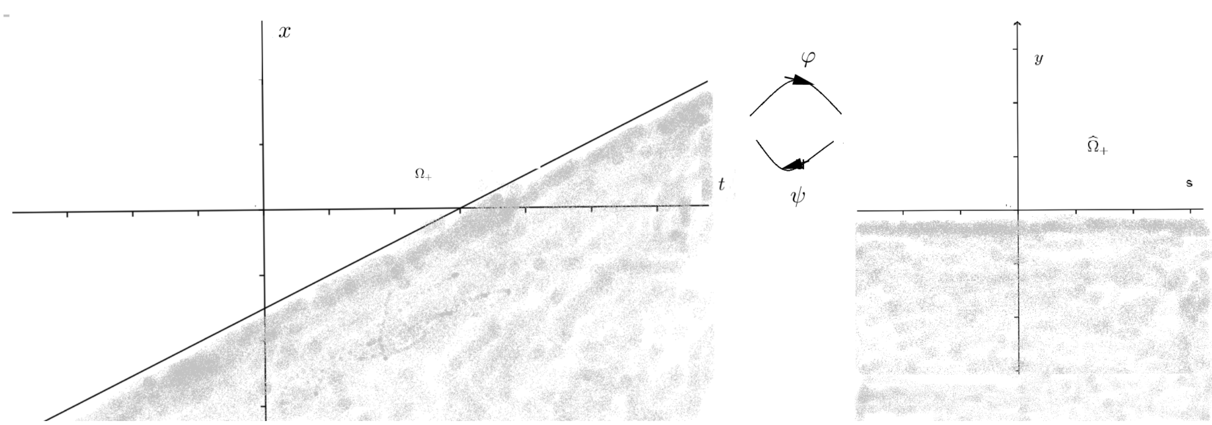
$$f(t,x) = \frac{\operatorname{sen}^4(2t+x+1)}{(2x-t+3)^2}$$

tiene una discontinuidad a lo largo de la recta $2x-t+3=0$. Por ello debemos escoger una componente conexa del plano menos la recta, por ejemplo

$$\Omega_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 2x - t + 3 > 0\}$$

que se transformará por φ en

$$\widehat{\Omega}_+ = \{(s,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$



Calculamos (1-2):

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= 2+\frac{dx}{dt}=2+\frac{\mathrm{sen}^4 s}{y^2}\\ \frac{dy}{dt} &= 2\,\frac{dx}{dt}-1=\frac{2\mathrm{sen}^4 s}{y^2}-1\end{aligned}$$

Sustituyendo estos cálculos en (3) se obtiene directamente (4)

$$\frac{dy}{ds}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\frac{2\mathrm{sen}^4 s}{y^2}-1}{2+\frac{\mathrm{sen}^4 s}{y^2}}=\frac{2\,\mathrm{sen}^4 s-y^2}{2y^2+\mathrm{sen}^4 s}=\hat{f}(s,y).$$

Hasta aquí solo hemos hecho cálculos formales. Ahora vamos a imponer hipótesis para garantizar que todo el proceso es correcto. Suponemos:

(H1) $f:\Omega\to\mathbb{R}$ es continua

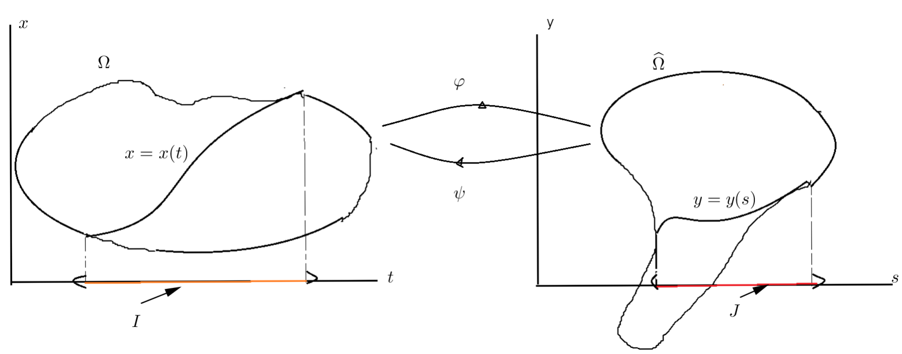
(H2) $\varphi:\Omega\to\widehat{\Omega}$ es un **difeomorfismo** de clase C^1; es decir, φ es de clase C^1 y tiene una inversa $\psi:\widehat{\Omega}\to\Omega$ que también es de clase C^1

(H3) $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(t,x)\,f(t,x)\neq 0$ para todo $(t,x)\in\Omega$.

En estas condiciones las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\ \text{ y }\ \frac{dy}{ds}=\hat{f}(s,y)$$

son equivalentes. Es decir, dada una solución $x=x(t)$ de la primera definida en I, existe un solución de la segunda $y=y(s)$ definida en otro intervalo J, de manera que φ y ψ transportan las gráficas correspondientes.



Precisamos más esta afirmación. Suponemos que nos han dado una solución $x(t)$ de la primera ecuación, como $x'(t) = f(t, x(t))$ por (H1) sabemos que $x(t)$ es de clase C^1 en I. Entonces la función compuesta $\mathcal{S}(t) = \varphi_1(t, x(t))$ también lo es y cumple

$$\mathcal{S}'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t)) f(t, x(t)).$$

Por (H3) sabemos que $\mathcal{S}'$ no se anula en I, así que S define un C^1 difeomorfismo entre I y $J = \mathcal{S}(I)$. Llamaremos $\mathcal{T} = \mathcal{T}(s)$ a la inversa de $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} : J \to I$. Definimos

$$y(s) = \varphi_2(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s))).$$

Se trata de una función de clase C^1 definida en J y vamos a comprobar que es solución de la nueva ecuación

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y).$$

Para ello recordamos que

$$\mathcal{T}'(s) = \frac{1}{\mathcal{S}'(\mathcal{T}(s))}.$$

Así,

$$\begin{aligned} y'(s) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s)))\mathcal{T}'(s) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s)))\, x'(\mathcal{T}(s))\, \mathcal{T}'(s) \\ &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s)))\, f(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s)))\right] \mathcal{T}'(s). \end{aligned}$$

De la definición de las funciones $\mathcal{T}(s)$, $y(s)$ se sigue que

$$(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s))) = \psi(s, y(s))$$

y se llega a la ecuación

$$y'(s) = \hat{f}(s, y(s)).$$

Ejercicio. Comprueba la identidad $(\mathcal{T}(s), x(\mathcal{T}(s))) = \psi(s, y(s))$.

Este proceso es reversible y podemos también afirmar que la imagen por ψ de la gráfica de y es la gráfica de x. Cambiamos los papeles y partimos de la ecuación definida por $\hat{f}$ y del cambio de variable ψ. Es claro que se cumplen

(H1) y (H2) y debemos comprobar que también se cumple la hipótesis (H3) para $\hat{f}$ y ψ. Esto se sigue de la identidad

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \hat{f} = \frac{1}{(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot f) \circ \psi}.$$

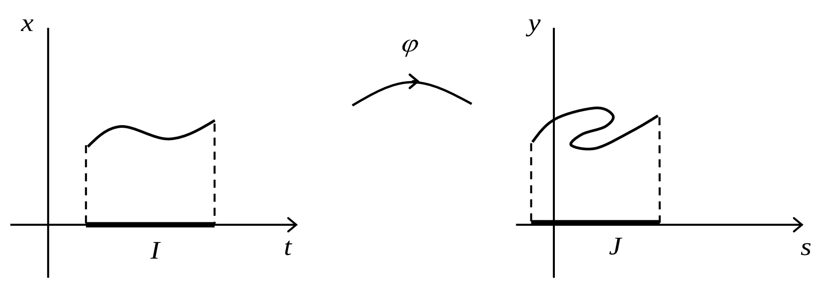
En resumen, si φ es un cambio admisible para $x' = f(t,x)$ entonces ψ será un cambio admisible para $y' = \hat{f}(s,y)$.

Ejercicio. Comprueba la fórmula anterior a partir de las identidades matriciales

$$\psi'(\varphi(t,x)) \cdot \varphi'(t,x) = I_{2\times 2}, \quad \varphi'(\psi(s,y)) \cdot \psi'(s,y) = I_{2\times 2},$$

donde φ' y ψ' representan matrices Jacobianas.

La condición (H3) es necesaria para la que la función $\hat{f}$ esté bien definida y sea continua, pero también tiene una interpretación geométrica interesante: un difeomorfismo lleva curvas en curvas, pero puede ocurrir que lleve una curva en explícitas en otra que no se pueda expresar de esa manera.



Para evitar situaciones de este tipo se impone (H3), que permite expresar en explícitas la curva imagen.

1.1 Cálculos de primitivas

Recordemos el **Teorema del Cálculo.**

Teorema 1. *Si $p : I \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces*

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds$$

es una función de clase C^1 que cumple $P'(t) = p(t)$.

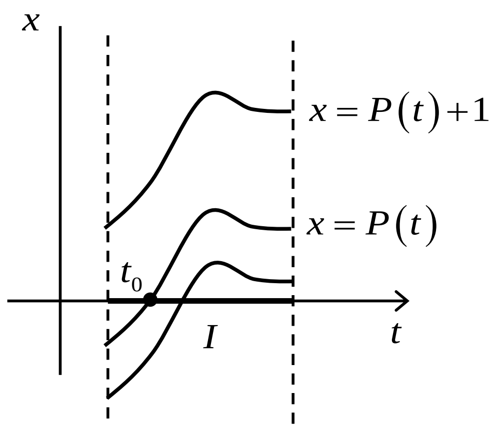
Aquí t_0 es cualquier punto de I que se ha fijado.

Este teorema nos asegura que cualquier función continua tiene primitiva, aunque en muchos casos no sea posible calcularla de manera explícita.

Es fácil ahora resolver la ecuación diferencial

$$x' = p(t),$$

definida en $D = I \times \mathbb{R}$. Las soluciones son de la forma $x(t) = P(t) + c, c \in \mathbb{R}$.



Ejercicio Demuestra que no hay más soluciones.

Por ejemplo, las soluciones de $x' = e^{-t^2}$ se expresan en la forma

$$x(t) = c + P(t), \quad P(t) = \int_0^t e^{-s^2}\, ds.$$

Ejercicio. Dibuja la gráfica de esta función.

2 Un método para resolver ecuaciones diferenciales

Partimos de una ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ y buscamos un cambio de variable $s = \varphi_1(t, x)$ y $y = \varphi_2(t, x)$ que la transforme en una del tipo $\frac{dy}{ds} = p(s)$. Resolvemos la ecuación en y y deshacemos el cambio.

2.1 Ecuaciones de variables separadas

Son de la forma

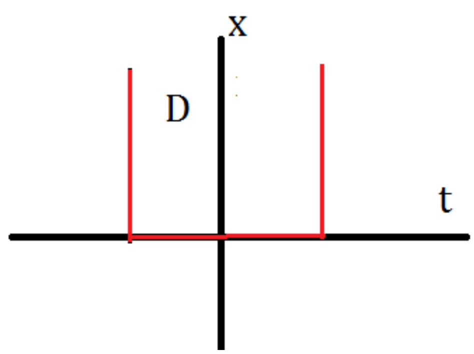
$$x' = p(t)\,q(x),$$

donde $p: I \to \mathbb{R}$, $q: J \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en intervalos abiertos. El dominio de la ecuación es $D = I \times J$.

Por ejemplo, si tenemos

$$x' = \sqrt{1-t^2}\,\ln x$$

entonces el dominio es una banda semi-infinita $D =]-1,1[\times]0,\infty[$



El nombre de estas ecuaciones procede del método formal que se emplea para resolverlas

$$\frac{dx}{dt} = p(t)\,q(x) \Rightarrow \frac{dx}{q(x)} = p(t)\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)\,dt.$$

Si sabemos hacer estas integrales obtedremos una expresión del tipo:

$$R(x) = P(t) + c,$$

que define de manera implícita $x = x(t)$.

Pregunta: como hay dos integrales, aparecen dos constantes de integración $R(x) + c_2 = P(t) + c_2$, ¿por qué se ha escrito sólo una?

Es importante observar que con este método no se obtienen las soluciones constantes de la ecuación. Si $x_* \in J$ es un cero de $q(x)$, $q(x_*) = 0$, entonces

$x(t) = x_*$ es solución. Al separar variables perdemos esta solución porque dividimos por $q(x)$.

Ejemplo. $x' = t\,(x-1)$, $D = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= t\,(x-1) \Rightarrow \frac{dx}{x-1} = t\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x-1} = \int t\,dt \Rightarrow \\ \ln|x-1| &= \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow |x-1| = e^c\, e^{t^2/2} \end{aligned}$$

Haciendo $k = \pm e^c$ obtenemos las soluciones

$$x(t) = 1 + k\, e^{t^2/2}, \quad k \neq 0$$

Hemos perdido la solución $x(t) = 1$ al dividir por $x - 1$.

Ejercicio. Encuentra errores en el siguiente **cálculo**:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

Ejercicio. Resuelve $x' = \lambda\, x$ por el método de variables separadas.

Observación: en algunos casos hay soluciones que se cruzan con las soluciones constantes; por ejemplo, $x' = |x|^{1/2}$ tiene soluciones que cambian de signo.

Ahora vamos a ver el método de separación de variables desde una perspectiva más teórica. Partimos de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = q(x)\, p(t)$$

con p continua en I y q continua en J. Buscamos un cambio de variable del tipo

$$\left.\begin{array}{l} y = \phi(x) \\ s = t \end{array}\right\}$$

que lleve la ecuación a un cálculo de primitivas. Entonces

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} = \phi'(x)\, \frac{dx}{dt} = \phi'(x)\, p(t)\, q(x).$$

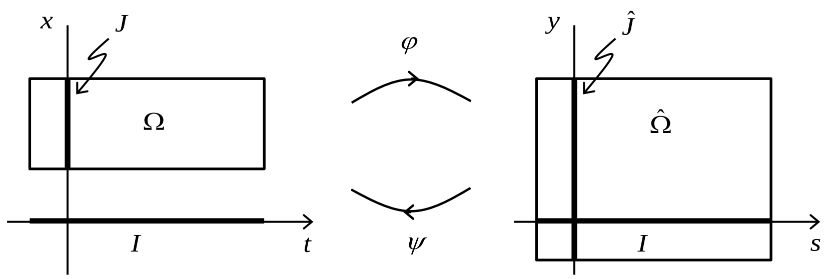
Si hacemos $\phi'(x)\,q(x) = 1$ llegamos a $\frac{dy}{ds} = p(s)$. Para ello hacemos la hipótesis $q(x) \neq 0\,\forall x \in J$, y definimos

$$\phi(x) = \int_{x_*}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)}$$

donde x_* es un punto fijado en J. Por el **Teorema del Cálculo** ϕ es C^1 con $\phi'(x) = \frac{1}{q(x)} \neq 0$. Así, ϕ define un difeomorfismo entre J y su imagen $\widehat{J} = \phi(J)$. Definimos el cambio de variable

$$\varphi(t,x) = (t, \phi(x))$$

que es una transformación de $\Omega = I \times J$ a $\widehat{\Omega} = I \times \widehat{J}$



con inversa $\psi(s,y) = (s, \phi^{-1}(y))$. Tanto φ como ψ son C^1 y por tanto se cumple $(H2)$. La función $f(t,x) = p(t)\,q(x)$ es continua en Ω porque tanto p como q lo eran en sus respectivos dominios, se cumple (H1). Finalmente, como $\varphi_1(t,x) = t$,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\, f = 1 > 0$$

y se cumple (H3).

Resolvemos la ecuación $y' = p(t)$ en $\widehat{\Omega}$ y **deshacemos** el cambio,

$$x(t) = \phi^{-1}\left(c + \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right)$$

donde c es una constante y t_0 es un punto fijo en I.

Habrá que escoger la constante c con algún cuidado para que la expresión entre paréntesis quede en $\widehat{J}$. Esto influirá a la hora de determinar el intervalo de definición de la solución $x(t)$.

2.2 Ecuaciones homogéneas

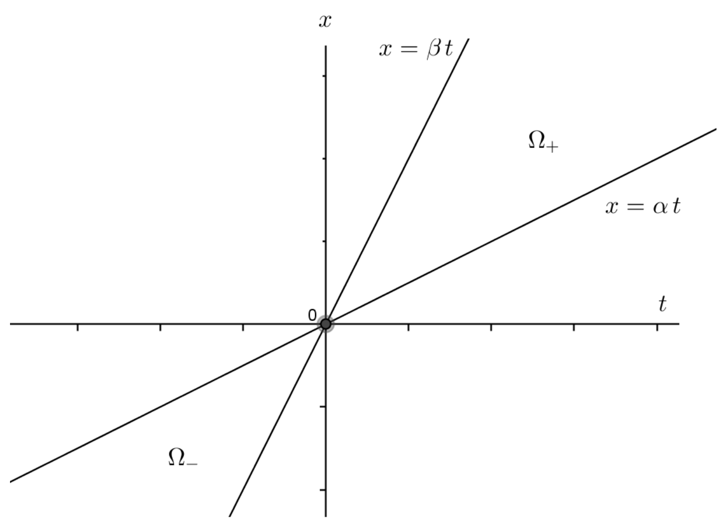
Son de la forma

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

donde $h : J \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en $J =]\alpha, \beta[$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. La función $f(t,x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$ será continua en $t \neq 0$, $\alpha < \frac{x}{t} < \beta$, el conjunto de puntos del plano con pendiente entre α y β. Obtenemos dos posibles dominios de definición

$$\Omega_+ = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \, t > 0, \, \alpha < \frac{x}{t} < \beta\right\}$$

$$\Omega_- = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \, t < 0, \, \alpha < \frac{x}{t} < \beta\right\}$$



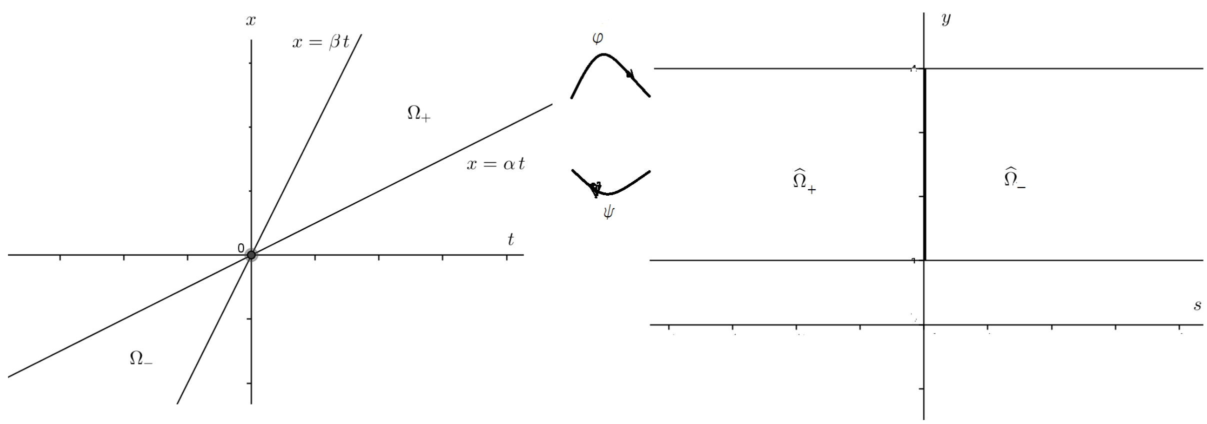
Para resolver estas ecuaciones emplearemos el cambio

$$s = t, \quad y = \frac{x}{t}$$

que las transformará en ecuaciones de variables separadas

dt $$\frac{dy}{d\cancel{x}} = \frac{t\,\frac{dx}{dt} - x}{t^2} = \frac{1}{t}[h(y) - y]$$

con $p(t) = \frac{1}{t}$, $q(y) = h(y) - y$. Observamos que el cambio $\varphi(t, x) = (t, \frac{x}{t})$ tiene inversa $\psi(s, y) = (s, sy)$ y transforma los sectores Ω_+ y Ω_- en los rectángulos $\widehat{\Omega}_+ =]0, \infty[\times J$ y $\widehat{\Omega}_=] - \infty, 0[\times J$.



Ejercicio. Comprueba que se cumplen las condiciones (H1), (H2) y (H3).

Para justificar un poco el nombre de estas ecuaciones destacamos la subfamilia de ecuaciones

$$x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$$

donde P y Q son polinomios **homogéneos** del mismo grado

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2t^3 + x\,t^2 + 7x^2\,t + 8x^3}{t^3 + 6x^2\,t} \\ &\underbrace{=}_{t \neq 0} \frac{2 + \frac{x}{t} + 7\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 8\left(\frac{x}{t}\right)^3}{1 + 6\left(\frac{x}{t}\right)^2}. \end{aligned}$$

Vamos a resolver con detalle una ecuación homogénea y, debido al significado geométrico de las soluciones, emplearemos la notación x variable independiente, $y = y(x)$ incógnita,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}, \;\; y(-1) = -1.$$

Buscamos una solución que pase por el punto $(-1,-1)$ [problema de Cauchy o problema de valores iniciales].

En primer lugar observamos que se trata de una ecuación homogénea porque está definida por el cociente de dos polinomios homogéneos de grado uno,

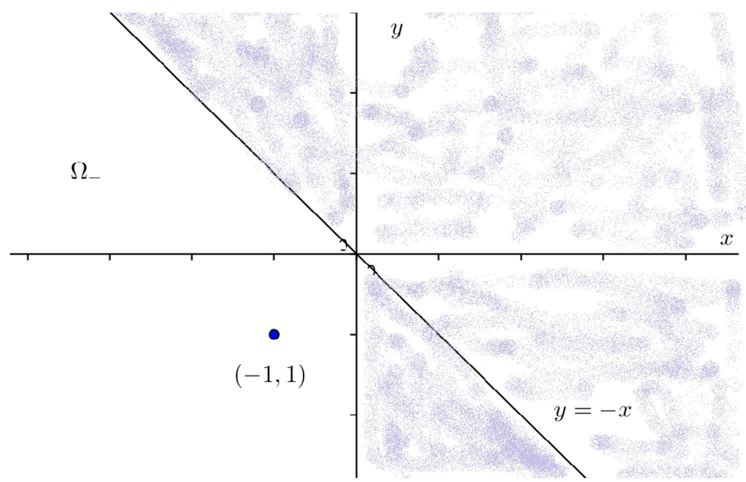
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}.$$

La función

$$h(u) = \frac{u-1}{u+1}$$

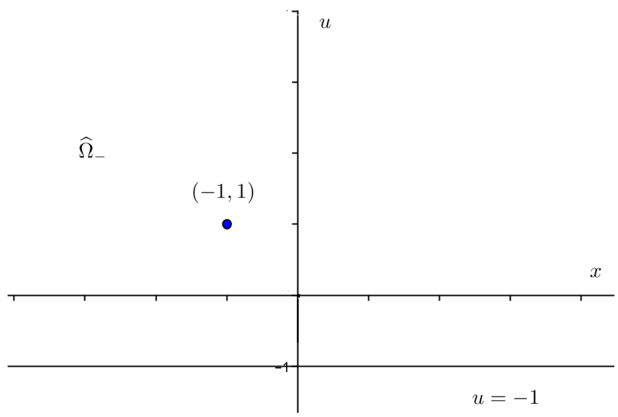
está definida en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]-1,+\infty[$. A la vista de la condición inicial ($x=-1$, $y=-1 \Rightarrow u=1$) escogeremos $J =]-1,+\infty[$. Como $x=-1$ ha de ser admisible trabajaremos en el dominio[1]

$$\Omega_- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x<0, \, \frac{y}{x} > -1\right\}$$



que se transforma por el cambio $u = \frac{y}{x}$ en $\widehat{\Omega}_- =]-\infty,0[\times]-1,+\infty[$

[1]Escogemos ese dominio para ajustarnos al marco teórico pero a la vista de la ecuación original sería natural considerar $\Omega = \{(x,y) : \, x+y<0\}$.



$u = \frac{y}{x}$, $y = x\,u$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \quad \frac{u-1}{u+1} = u + x\frac{du}{dx},$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}\,\frac{u^2+1}{u+1} \quad \text{Ecuación de variables separadas.}$$

Observamos que en este caso no hay soluciones constantes,

$$\begin{aligned}
\int \frac{u+1}{u^2+1}\,du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
\int \frac{u+1}{u^2+1}\,du &= \int \frac{u}{u^2+1}\,du + \int \frac{du}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan(u) \\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan(u) = -\ln|x| + c.
\end{aligned}$$

(En este caso es importante el valor absoluto pues $x < 0$). Deshaciendo el cambio $u = \frac{y}{x}$ y usando $\ln|x| = \frac{1}{2}\ln x^2$,

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c.$$

Para calcular c hacemos $x = -1$, $y = -1$ y llegamos a $c = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$.

Hemos encontrado la solución en forma implícita. Ahora es posible probar que la función $y = y(x)$ está definida en un entorno de $x = -1$.

Ejercicio. Utiliza el teorema de la función implícita para justificar esta afirmación.

Para completar el ejemplo vamos a entender geométricamente la fórmula hallada. En el plano pasamos de coordenadas Cartesianas a polares

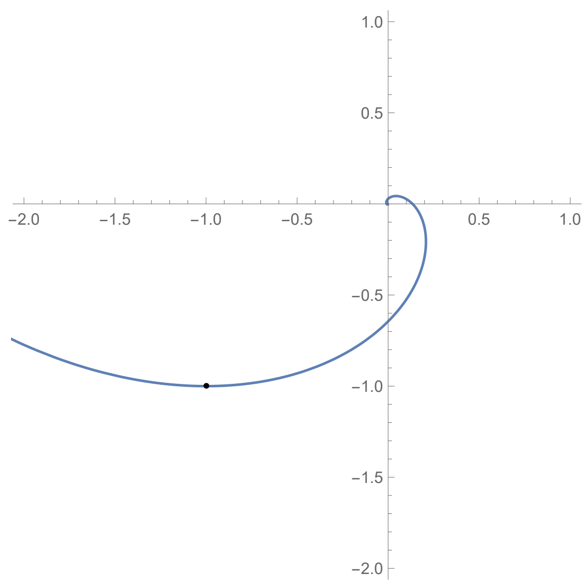
$$\left.\begin{array}{l} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}\right.$$

(La identidad $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ se entiende según el cuadrante en el que se halle el punto).

Nuestra curva se transforma en

$$\ln r + \theta = c \qquad \text{(espiral logarítmica)}$$

o bien $r = c\,e^{-\theta}$



El arco de espiral entre $\theta = \frac{3\pi}{4}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ será la gráfica de la solución del problema de Cauchy.

2.3 Ecuaciones reducibles a homogéneas

Son de la forma

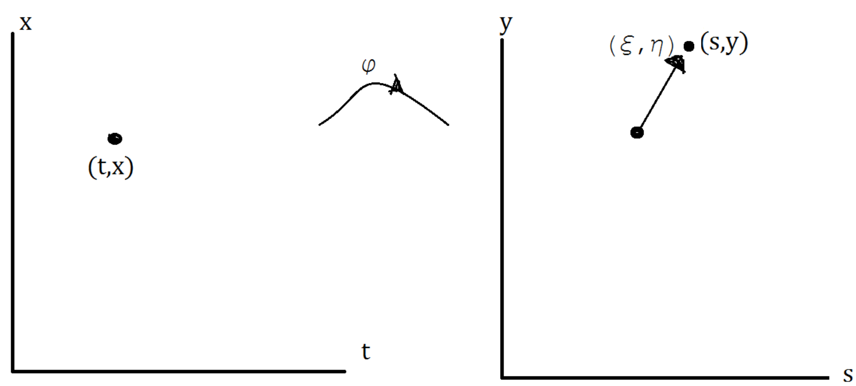
$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{ax+bt+c}{Ax+Bt+C}\right)$$

donde $h : J \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo abierto y los números a, b, c, A, B, C están dados en $\mathbb{R}$.

Ejercicio. Describe el dominio de esta ecuación.

Escogemos como cambio de variable una traslación en el plano de vector (ξ, η)

$$\varphi : \begin{cases} s = t + \xi \\ y = x + \eta \end{cases}$$



Ejercicio. Comprueba que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cumple las propiedades (H2) y (H3).

Hacemos el cambio y tratamos de determinar ξ y η de manera que se simplifique la ecuación

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = h\left(\frac{ay - a\eta + bs - b\xi + c}{Ay - A\eta + Bs - B\xi + C}\right)$$

Si hacemos $\begin{cases} a\eta + b\xi = c \\ A\eta + B\xi = C \end{cases}$ llegamos a

$$\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{ay + bs}{Ay + Bs}\right) \quad \text{Ecuación homogénea.}$$

Podemos encontrar ξ, η en las condiciones anteriores si el sistema es compatible y determinado; es decir, la discusión anterior vale si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0.$$

En caso contrario los vectores (a, b) y (A, B) son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$. Si se cumple por ejemplo $(A, B) = \lambda\,(a, b)$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{ax + bt + c}{\lambda\,(ax + bt) + C}\right)$$

y el cambio de variables[2] $s = t, y = ax + bt$ conduce a

$$\frac{dy}{ds} = a\,h\left(\frac{y + c}{\lambda\,y + C}\right) + b \text{ Ecuación de variables separadas.}$$

Ejercicio. ¿En qué casos es posible resolver la ecuación reducible a homogénea mediante el cambio $s = Ax + Bt + C$, $y = ax + bt + c$?

2.4 Ecuación lineal

Es de la forma

$$x' = a(t)x + b(t)$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas sobre un intervalo abierto I.

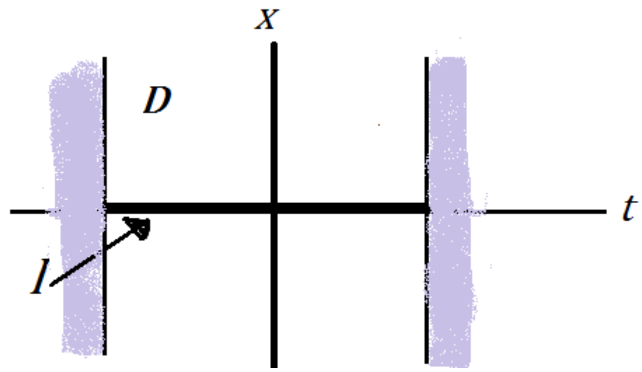
Son ecuaciones para las que la dependencia de la incógnita es lineal. Para comprender mejor esto consideramos tres ecuaciones

$$x' = t\,x^2 + \operatorname{sen} t,\; x' = t^2\,x + \operatorname{sen} t,\; x' = t^2\,x + \operatorname{sen} x$$

y observamos que solo la segunda es lineal.

La ecuación lineal está definida en una banda vertical $D = I \times \mathbb{R}$.

[2]Suponemos $a \neq 0$, pues en otro caso la ecuación se reduce a un cálculo de primitivas



En un caso especial la ecuación lineal puede ser resuelta por variables separadas

2.5 Ecuación lineal homogénea

Suponemos $b(t) = 0$ para todo $t \in I$. La ecuación $x' = a(t)\,x$ tiene la solución constante $x(t) = 0$, $t \in I$.

Buscamos soluciones no constantes por separación de variables,

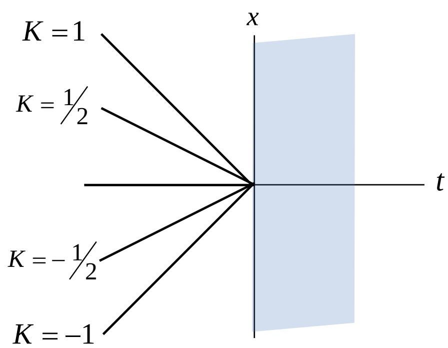
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)\,x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int a(t)\,dt \Rightarrow \\ \ln|x(t)| &= A(t) + k \qquad \text{donde } A \text{ es una primitiva de } a \text{ y } k \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ |x(t)| &= e^k\, e^{A(t)}. \end{aligned}$$

Las funciones $x(t) = \pm e^k\, e^{A(t)}$ son soluciones y, añadiendo la solución trivial, obtenemos la familia

$$x(t) = K\, e^{A(t)}, \quad K \in \mathbb{R}$$

donde $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$, $t_0 \in I$ (fijo).

Ejemplo. $x' = \frac{x}{t}$, $a(t) = \frac{1}{t}$, $t \in I =]-\infty, 0[$, $x(t) = K\, e^{\ln(-t)} = -Kt$, $K \in \mathbb{R}$.



Nota. **1.** *La ecuación lineal homogénea no tiene relación con la clase de ecuaciones homogéneas estudiadas antes.*

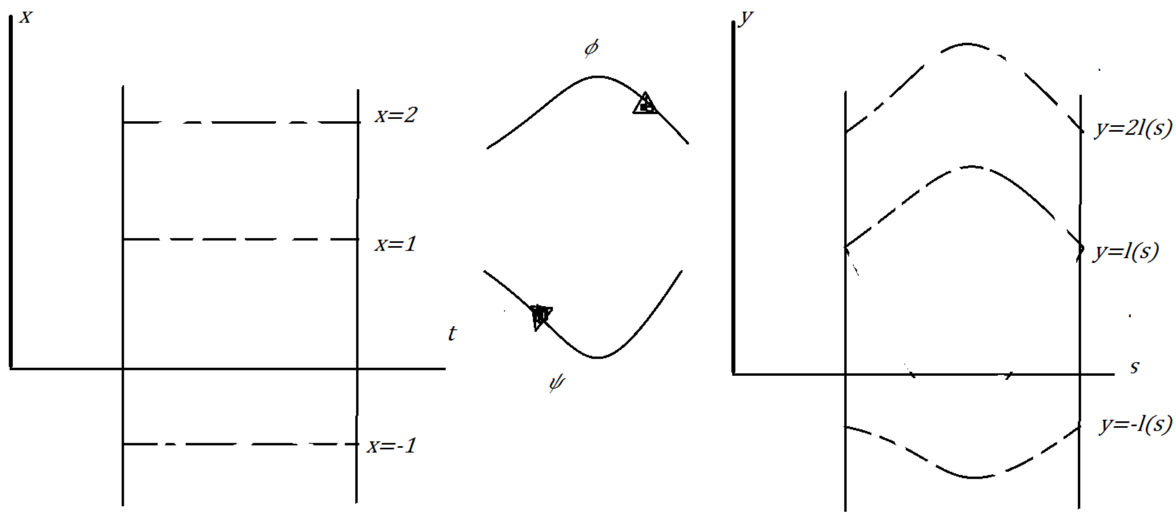
2.6 Ecuación lineal completa

Suponemos $b(t) \neq 0$ para algún $t \in I$. Para resolver el caso general efectuaremos un cambio de variable que sea lineal en la incógnita

$$\varphi : \quad \begin{cases} s = t \\ y = l(t)\, x \end{cases}$$

donde $l : I \to \mathbb{R}$ es una función que vamos a buscar. Supondremos que l es de clase C^1 y que no se anula en el intervalo I ($l(t) \neq 0$, $\forall t \in I$). De esta manera podemos asegurar que $\varphi : D \to D$ es un difeomorfismo con inversa $\psi : D \to D$,

$$\varphi : \quad \begin{cases} t = s \\ x = \frac{y}{l(s)}. \end{cases}$$



Ejercicio. Comprueba que también se cumple la condición (H3).

Derivando el cambio de variable

$$y' = l'(t)\,x + l(t)\,x' \underbrace{=}_{x(t)\,\text{solución}} l'(t)\,x + l(t)\,(a(t)x + b(t)) \Rightarrow$$

$$y' = (l'(t) + a(t)l(t))\,x + l(t)\,b(t).$$

Impondremos $l'(t) + a(t)l(t) = 0$, de esta manera $y(t)$ se calcula como una primitiva

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} l(s)\,b(s)\,ds + k, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Ahora podemos pensar en la condición $l'(t) + a(t)l(t) = 0$ como en una ecuación lineal homogénea con incógnita $l(t)$. Escogemos una solución no nula, por ejemplo

$$l(t) = e^{-A(t)}, \quad A(t)\,\text{es una primitiva de}\; a(t).$$

Deshaciendo el cambio

$$x(t) = \frac{1}{l(t)}\,y(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\,b(s)\,ds.$$

Ejemplo. $x' = \frac{x}{t} + 1$, $a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = 1$, $t \in]-\infty, 0[$.
Hacemos el cambio $y = l(t)\,x$

$$y' = l'(t)\,x + l(t)\,x' \underbrace{=}_{x(t)\,\text{solución}} l'(t)\,x + \frac{l(t)}{t}\,x + l(t) \Rightarrow$$

Imponemos $l'(t) + \frac{l(t)}{t} = 0$ de donde

$$y'(t) = l(t) \Rightarrow y(t) = \int_{t_0}^{t} l(s)\,ds + k.$$

Como $A(t) = \ln(-t)$ es una primitiva de $a(t)$ tenemos que $l(t) = e^{-\ln(-t)} = -\frac{1}{t}$.

Así $y(t) = -\ln(-t) + K$ y la solución es

$$x(t) = \frac{1}{l(t)}\,y(t) = t\,\ln(-t) - t\,K$$

2.7 Ecuación de Riccati

Es de la forma

$$x' = a(t)\,x^2 + b(t)\,x + c(t)$$

donde $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas sobre un intervalo abierto I. Liouville construyó ejemplos en los que los coeficientes $a(t), b(t), c(t)$ son bastante sencillos (funciones racionales) mientras que las soluciones no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

Vamos a ver que es posible resolver la ecuación si se conoce una solución particular. Imaginemos conocida una solución $f(t)$, definida en $\widetilde{I} \subset I$. En principio el dominio de la ecuación es $D = I \times \mathbb{R}$ pero nos restringimos a $\widetilde{D} = \widetilde{I} \times \mathbb{R}$ y efectuamos el cambio

$$y = \frac{1}{x - f(t)}.$$

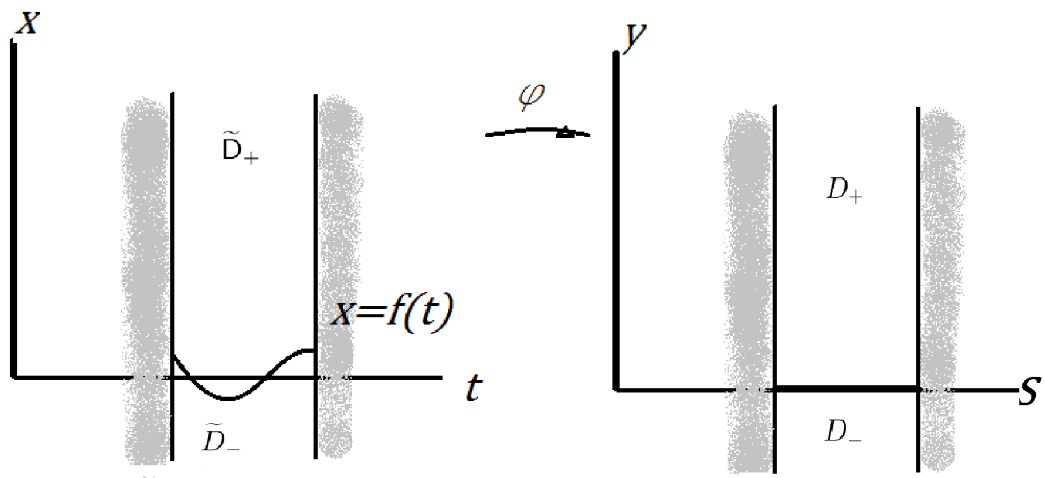
Las fórmulas

$$\varphi : \begin{cases} s = t \\ y = \dfrac{1}{x - f(t)} \end{cases}$$

definen un difeomorfismo entre

$$\widetilde{D}_+ = \{(t,x) : t \in \widetilde{I},\, x > f(t)\}, \quad D_+ = \{(s,y) : s \in \widetilde{I},\, y > 0\}$$

$$\widetilde{D}_- = \{(t,x) : t \in \widetilde{I},\, x < f(t)\}, \quad D_- = \{(s,y) : s \in \widetilde{I},\, y < 0\}.$$



Ejercicio. Comprueba que se cumplen (H2) y (H3).

La inversa es $\psi : \begin{cases} t = s \\ x = f(t) + \frac{1}{y} \end{cases}$ y derivando en la última expresión

$$\begin{array}{ccc} x' & = & f'(t) - \dfrac{y'}{y^2} \\ || & & \\ a(t)\, x^2 + \;\; b(t)\, x & +c(t) = & a(t)\left(f(t) + \dfrac{1}{y}\right)^2 + b(t)\left(f(t) + \dfrac{1}{y}\right) + c(t) \\ \Rightarrow & & f'(t) - \dfrac{y'}{y^2} = a\, f^2 + \dfrac{2a\, f}{y} + \dfrac{a}{y^2} + b\, f + \dfrac{b}{y} + c. \end{array}$$

Como $f(t)$ es solución, $f' = a\, f^2 + b\, f + c$ y llegamos a la ecuación lineal

$$y' = -(2\, a(t)\, f(t) + b(t))y - a(t).$$

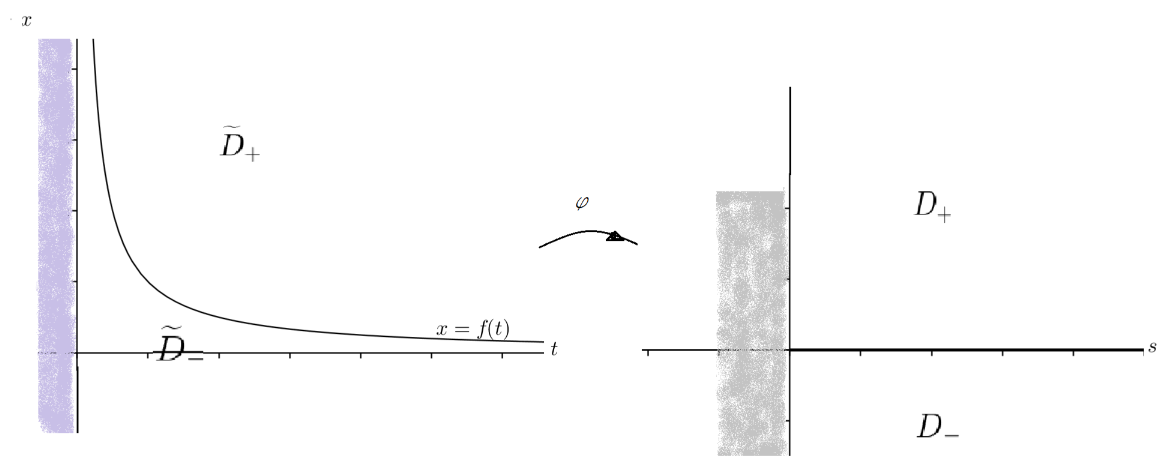
Conviene observar que para este cambio la solución $x = f(t)$ con la que se inicio el proceso no se corresponde con una solución $y(t)$, pues $x = f(t) \to y = \infty$.

Ejemplo. $x' = -x^2$

Esta ecuación se resuelvemente fácilmente por variables separadas, pero ahora la vamos a pensar como una ecuación de Riccati ($a(t) = -1$, $b(t) = c(t) = 0$) con solución conocida $f(t) = \frac{1}{t}$.

En principio la ecuación está definida en $D = \mathbb{R}^2$, pues $I = \mathbb{R}$. Por tanto la fórmula que define a $f(t)$ proporciona dos soluciones, una definida en $]-\infty, 0[$ y otra en $]0, +\infty[$. Para fijar idea escogemos $\widetilde{I} =]0, \infty[$ y efectuamos el cambio

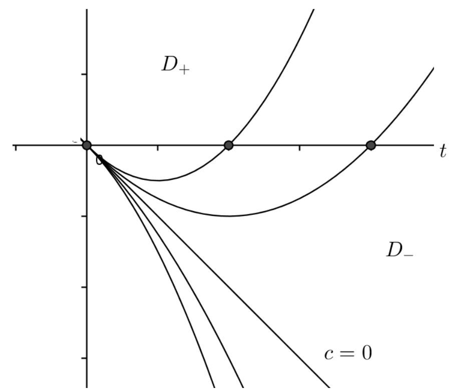
$$y = \frac{1}{x - \frac{1}{t}}$$



$$\begin{array}{rcl} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{y} \Rightarrow \quad x' & = & -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y'}{y^2} \\ \| & & \\ -x^2 & = & -\left(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{y}\right)^2 = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t\,y} - \dfrac{1}{y^2} \end{array}$$

$$y' = \frac{2}{t}\,y + 1 \quad \text{Ecuación lineal con soluciones}$$

$$y(t) = -t + c\,t^2, \;\; c \in \mathbb{R}.$$



Deshaciendo el cambio obtenemos la familia de soluciones

$$x(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{-t + c\,t^2}, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

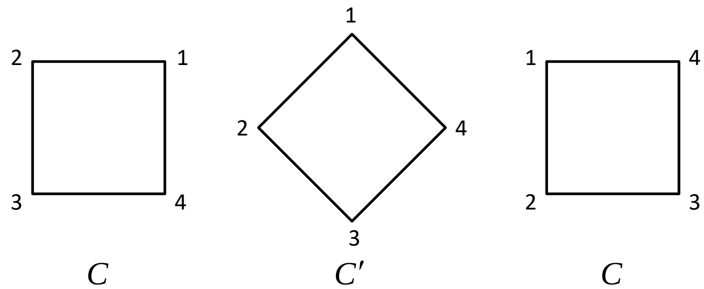
A esta familia le añadimos la solución

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

que también se recupera haciendo $c \to \infty$ en la fórmula anterior.

3 Cambios de variables y ecuaciones invariantes

Imaginemos un cuadrado C dentro del plano y pensemos en una rotación alrededor del centro del cuadrado. Si la rotación es de 45 grados en sentido anti-horario observamos que el cuadrado se transforma en un cuadrado diferente C'. Por el contrario, si rotamos 90 grados, el cuadrado C permanece invariante (aunque sus vértices se han permutado). Algunas rotaciones dejan invariante el cuadrado C.



Pasando de la Geometría al Análisis vamos a reemplazar el cuadrado C por una ecuación diferencial y las rotaciones por cambios de variable. Hay ocasiones en las que se hace un cambio de variable y la nueva ecuación coincide con la antigua. Veamos un **Ejemplo:**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{3x^2+1}, \quad D = \mathbb{R}^2,\ f(t,x) = \frac{t}{3x^2+1}$$

Efectuamos el cambio

$$\varphi : \quad \begin{cases} s = -t \\ y^3 + y = x^3 + x + 7. \end{cases}$$

Por derivación implícita, $(3\,y^2+1)\ \frac{dy}{dt} = (3\,x^2+1)\ \frac{dx}{dt}$, de donde

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{ds} = -\frac{dy}{dt} = -\frac{3\,x^2+1}{3\,y^2+1}\,\frac{dx}{dt} = \frac{-t}{3\,y^2+1},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{3\,y^2+1}, \quad D = \mathbb{R}^2,\ \hat{f}(s,y) = \frac{s}{3y^2+1}.$$

Observamos que las funciones f y $\hat{f}$ coinciden,

$$f(s,y) = \hat{f}(s,y) \quad \forall (s,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pueden quedar dudas sobre la validez de este cambio de variable, que se ha definido de forma implícita. Para disiparlas vamos a probar que φ es un difeomorfismo. Para ello consideramos la función polinómica

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sigma(x) = x + x^3$$

y observamos que se trata de un difeomorfismo de $\mathbb{R}$ [$\sigma'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ en todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sigma(x) = \pm\infty$]. Expresamos de forma explícita la segunda ecuación que define a φ,

$$\sigma(y) = \sigma(x) + 7 \Leftrightarrow y = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 7)$$

$$\varphi : \begin{cases} s = -t \\ y = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 7) \end{cases} \qquad \psi : \begin{cases} t = -s \\ x = \sigma^{-1}(\sigma(y) - 7). \end{cases}$$

Conviene observar que este cambio de variable deja invariante la ecuación pero no las soluciones, que pueden ser permutadas. Si resolvemos por variables separadas

$$x^3 + x = \frac{t^2}{2} + c, \;\; x = \sigma^{-1}(\frac{t^2}{2} + c), c \in \mathbb{R}.$$

Entonces la solución $x(t)$ que cumple $x(0) = 0$ (equivalente a $c = 0$) se transforma por el cambio en la solución que cumple $y(0) = 7$ (equivalente a $c = \sigma^{-1}(7) = 1.7\ldots$)

Ejercicio. Considera la familia de cambios de variable

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s = -t \\ y^3 + y = x^3 + x + \lambda \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Demuestra que todos ellos dejan la ecuación anterior invariante

Ejercicio. Encuentra la clase de ecuaciones $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ que son invariantes por el cambio de variable $s = 2t$, $y = -x$.

3.1 Grupos de transformaciones

Dados dos difeomorfismo del plano $\varphi, \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, los podemos componer y obtener un nuevo difeomorfismo $\varphi \circ \phi$ con inversa $\phi^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Sabemos que la composición de aplicaciones es asociativa y disponemos de un elemento neutro, la identidad $i(t, x) = (t, x)$. Por definición de difeomorfismo todo φ tiene un inverso respecto a la composición. En conclusióm, el conjunto de difeomorfismos del plano con la composición como operación tiene estructura de grupo.

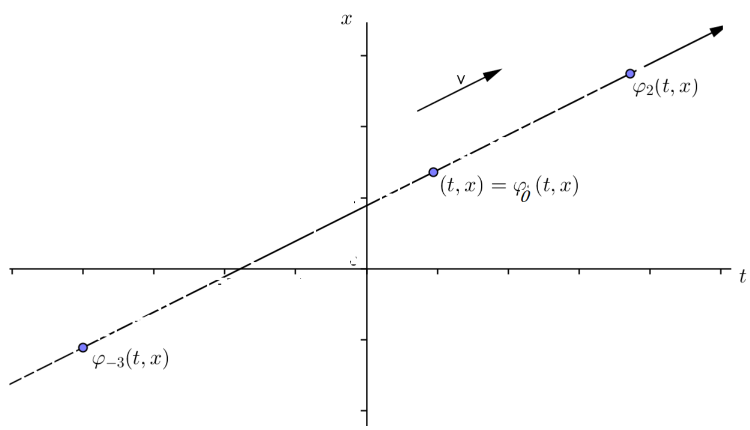
Ejercicio. Prueba que este grupo no es conmutativo.

Dentro de este grupo existen muchos subgrupos interesantes, estudiemos algunos ejemplos.

3.2 Grupo de traslaciones

Fijamos un vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y consideramos todas las traslaciones del plano que tienen la misma dirección de v,

$$\varphi_\lambda(t, x) = (t + \lambda\, v_1, x + \lambda\, v_2), \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

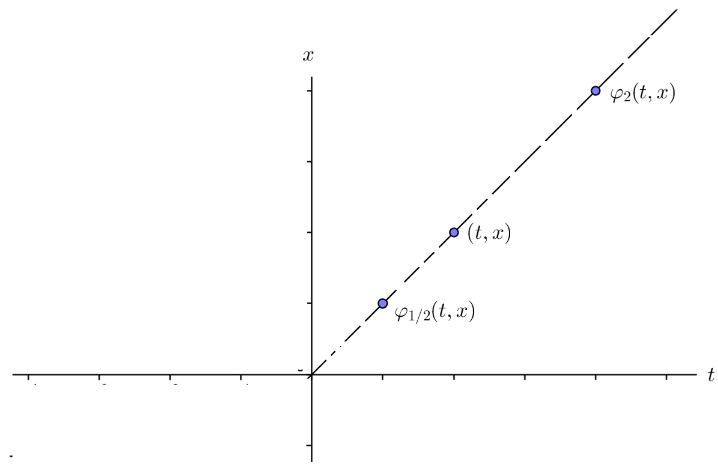


Es fácil comprobar que se cumple $\varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2} = \varphi_{\lambda_1+\lambda_2}$ y de aquí se sigue que la familia $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ forma un grupo uniparamétrico.

3.3 Grupo de dilataciones

$$\varphi_\lambda(t, x) = (\lambda\, t, \lambda\, x), \;\; \lambda > 0$$

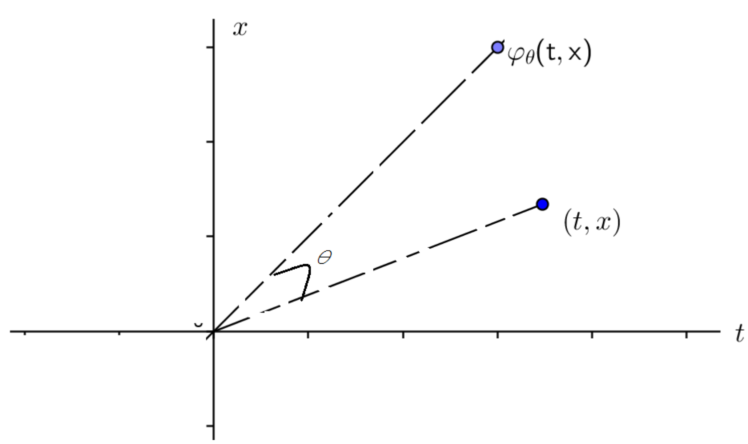
En este caso se cumple $\varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2} = \varphi_{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$ y de nuevo se comprueba que la familia $\{\varphi_\lambda : \lambda > 0\}$ es un grupo.



3.4 Grupo de rotaciones

Escribimos los puntos del plano como vectores colummna $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ y definimos, para cada $\theta \in \mathbb{R}$, la matriz de rotación anti-horaria de ángulo θ, $R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. La familia de difeomorfismos $\varphi_\theta(t,x) = R[\theta]\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ forma un grupo, como se sigue de la identidad

$$R[\theta_1 + \theta_2] = R[\theta_1] \cdot R[\theta_2].$$



En algunas teorías de la Física se buscan las ecuaciones maestras imponiendo la invariancia por ciertos grupos. Veamos algunos ejemplos muy simples de esta idea.

Ejemplo 1. Ecuaciones invariantes por el grupo de traslaciones horizontales

$$\text{Cambios de variable } \varphi_\lambda : \begin{cases} s = t + \lambda \\ y = x \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x) \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{dx}{dt} = f(t,x) = f(s-\lambda, y) \end{aligned}$$

Si imponemos $f = \hat{f}$, $f(t,x) = f(t-\lambda, x)\, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a que f no dependa de t,

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{Ecuaciones autónomas}$$

Ejercicio. Busca la clase de ecuaciones invariante por el grupo de traslaciones verticales.

Ejemplo 2. Ecuaciones invariantes por el grupo de dilataciones

$$\text{Cambios de variable } \varphi_\lambda : \begin{cases} s = \lambda\, t \\ y = \lambda\, x \end{cases}, \ \lambda > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \ \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \lambda\,\frac{dx}{dt}\,\frac{1}{\lambda} = f(t,x) \\ \frac{dy}{ds} &= \hat{f}(s,y) = f\left(\frac{1}{\lambda}\, s, \frac{1}{\lambda}\, y\right) \end{aligned}$$

Si imponemos $f = \hat{f}$, $f(t,x) = f\left(\frac{1}{\lambda}\, t, \frac{1}{\lambda}\, x\right), \forall \lambda > 0$, encontramos la clase de funciones homogéneas de grado 0. Recuperamos (más o menos) la clase de ecuaciones homogéneas.

Ejercicio. Demuestra que las ecuaciones del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x + t\, F(t^2 + x^2)}{t - x\, F(t^2 + x^2)}$$

son invariantes por el grupo de rotaciones. Aquí estamos ignorando la condición (H3).