Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. 12 de Septiembre de 2017.

1 Consideramos la ecuación

$$(\star) \quad x'' + 4x = 1 + \cos 3t.$$

a) [15] Encuentra todas las soluciones de esta ecuación.

b) [10] Determina la solución que cumple $x(0) = x'(0) = 0$. ¿Es única?

c) [5] ¿Es cierto que todas las soluciones cumplen $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$? ¿Son periódicas?

2 Se considera el sistema autónomo

$$x' = 2xy, \quad y' = x^2 - y^2.$$

a) [20] Encuentra la órbita que pasa por el punto $P = (1, 2)$.

b) [5] Expresa dicha órbita en la forma explícita $y = y(x)$, $x \in I$, para un intervalo I apropiado.

c) [5] Determina el intervalo I y dibuja la órbita.

3. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando la respuesta:

a) [7] Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y dos funciones $P, Q \in C^1(\Omega)$, con $P(t,x) \neq 0$ para cada $(t,x) \in \Omega$, y tales que la ecuación diferencial $P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$ admite simultáneamente los factores integrantes $\mu_1(t,x) = 1$ y $\mu_2(t,x) = x$.

b) [7] La sucesión $f_n(t) = t^n$ es uniformemente convergente en el intervalo $]0,1[$.

c) [7] Si A es nilpotente de orden 2, entonces $e^{(I+A)t} = e^t(I + At)$.

4. Dada una función $a \in C(\mathbb{R})$ se supone que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a(t)x = 0$. Se define la función

$$\psi(t) = \int_0^t [\phi_1(t)\phi_2(s) - \phi_1(s)\phi_2(t)] \cos s ds.$$

a) [7] Demuestra que $\psi \in C^2(\mathbb{R})$

b) [7] Encuentra una ecuación diferencial que tenga a ψ como solución.

c) [7] Halla todas las soluciones de la ecuación del apartado anterior.