Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
12 de Septiembre de 2016

1 Consideramos la ecuación

$$(\star) \quad t^2x'' - 2x = 0, \ t > 0.$$

a) [10] Encuentra una solución no trivial y polinómica de esta ecuación.

b) [10] Dada cualquier solución $x(t)$ de $(\star)$ que no se anule en un intervalo I contenido en $]0, \infty[$, se define

$$y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}, \quad t \in I.$$

Demuestra que $y(t)$ cumple una ecuación de primer orden que designaremos por $(\star\star)$.

c) [10] ¿Es la ecuación $(\star\star)$ de alguno de los tipos vistos en clase? En caso afirmativo explica el método a seguir para resolverla. No es necesario efectuar los cálculos pero sí se especificará el cambio de variable que se debe usar.

2. Se considera el sistema de ecuaciones integrales

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t x_2(s)ds, \quad x_2(t) = 2 + \int_0^t x_1(s)ds,$$

donde las incógnitas $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

a) [5] Reduce este sistema a un problema de valores iniciales equivalente.

b) [5] Justifica la existencia y unicidad de solución.

c) [15] Calcula dicha solución.

3 [30] Encuentra la curva en forma explícita $y = y(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$ y cumple la siguiente propiedad:

en cada punto de la curva la distancia al origen coincide con la ordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje vertical.

Indicación: $\int \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi = \text{arg sh } \xi$, argumento del seno hiperbólico, función inversa del seno hiperbólico.

4. Se consideran dos funciones $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ que son de clase C^1 y se define

$$U(x, y) = \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta.$$

a) [5] Demuestra que la función U también es de clase C^1.

b) [10] Se supone ahora que P y Q cumplen la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Demuestra que en este caso U es de clase C^2.