Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2019. Examen Final.

SELECCIONA TRES EJERCICIOS. LA PUNTUACIÓN MÁXIMA DEPENDE DE ESTA SELECCIÓN

1. (3.5 pts) Se considera una ecuación diferencial del tipo

$$(*) \quad x' = a(t)x^5 + b(t)x$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

a) **(1.25 pts)** Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se definen las nuevas variables

$$s = t, \quad y = x^\alpha.$$

Encuentra dominios del plano D y $\hat{D}$ de manera que la transformación $(t, x) \in D \mapsto (s, y) \in \hat{D}$ sea un cambio admisible para la ecuación $(*)$.

b) **(1.25 pts)** Transforma la ecuación $(*)$ mediante el cambio del apartado anterior. ¿Para qué valores de α se obtiene una ecuación lineal?

c) **(1 pt)** Se supone $a(t) = -\frac{1}{4}t$, $b(t) = \frac{1}{4}$, $I = \mathbb{R}$. Encuentra la solución de $(*)$ que cumple $x(2) = 1$. ¿En qué intervalo está definida?

2. (1 pt) Se considera la ecuación diferencial

$$e^y + \cos x + (xe^y + 2y)y' = 0.$$

a) **(0.5 pts)** Encuentra la ecuación que define en forma implícita a la solución que cumple la condición inicial $y(0) = 1$. (Se debe justificar que dicha ecuación define una función en un entorno de $x = 0$).

b) **(0.5 pts)** ¿Existe una solución de la ecuación diferencial que cumpla $y(0) = 0$?

3. (3.5 pts) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

donde f es una función continua en todo $\mathbb{R}$ y satisface la condición: existe $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) **(1 pt)** Demuestra que una función continua $x = x(t)$, definida sobre un intervalo abierto I que contenga a $t = 0$, es una solución de (1) si y solo si $x(t)$ es una solución de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\, ds \quad \forall t \in I.$$

b) **(0.5 pts)** Por analogía con el caso lineal define las iterantes de Picard $\{x_n(t)\}_{n\geq 0}$ del sistema.

c) **(0.75 pts)** Justifica que $|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \dfrac{|f(x_0)|\, L^n\, |t|^{n+1}}{(n+1)!}$ para todo $t \in I$ y $n \geq 0$.

d) **(0.5 pts)** Demuestra que la sucesión de iterantes de Picard $\{x_n(t)\}_n$ converge uniformemente en el intervalo I si este es acotado, y prueba que la función límite uniforme $x : I \to \mathbb{R}$ es una solución de (1).

e) **(0.5 pts)** Utiliza los apartados anteriores para probar que la sucesión de iterantes de Picard del problema

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = 2|x| + 1 \\ x(0) = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

converge uniformemente en cada intervalo acotado a una solución $x = x(t)$. Calcula dicha solución para $t \geq 0$.

4. (3 pts) Se considera la ecuación

$$t^2 x'' + t x' + x = \operatorname{sen}(\ln t)\,, \qquad t > 0\,,$$

y se pide:

a) **(1 pt)** Encuentra una constante $\alpha > 0$ de manera que las funciones

$$\varphi_1(t) := \operatorname{sen}(\alpha \ln t),\ \ \varphi_2(t) := \cos(\alpha \ln t),\ t > 0$$

formen un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada.

b) **(1 pt)** Usando la fórmula de variación de constantes, encuentra una solución particular de la ecuación completa.

c) **(1 pt)** Encuentra la solución de la ecuación completa que cumple $x(1) = 0,\ x'(1) = 0$.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2019. Examen Final. Primera parte.

1. (6 pts) Se considera una ecuación diferencial del tipo

$$(*) \quad x' = a(t)x^5 + b(t)x$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

a) **(2 pts)** Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se definen las nuevas variables

$$s = t, \quad y = x^\alpha.$$

Encuentra dominios del plano D y $\hat{D}$ de manera que la transformación $(t, x) \in D \mapsto (s, y) \in \hat{D}$ sea un cambio admisible para la ecuación $(*)$.

b) **(2 pts)** Transforma la ecuación $(*)$ mediante el cambio del apartado anterior. ¿Para qué valores de α se obtiene una ecuación lineal?

c) **(2 pts)** Se supone $a(t) = -\frac{1}{4}t$, $b(t) = \frac{1}{4}$, $I = \mathbb{R}$. Encuentra la solución de $(*)$ que cumple $x(2) = 1$. ¿En qué intervalo está definida?

2. (4 pts) Se considera el sistema autónomo definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$x' = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{3x}{x^2 + y^2}.$$

a) **(2 pts)** Determina la ecuación de las órbitas y encuentra todas sus soluciones.

b) **(2 pts)** Dibuja las órbitas del sistema.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Segunda parte.

1. (5 pts) Se considera la ecuación diferencial

$$e^y + \cos x + (xe^y + 2y)y' = 0.$$

a) **(2.5 pts)** Encuentra la ecuación que define en forma implícita a la solución que cumple la condición inicial $y(0) = 1$. (Se debe justificar que dicha ecuación define una función en un entorno de $x = 0$).

b) **(2.5 pts)** ¿Existe una solución de la ecuación diferencial que cumpla $y(0) = 0$?

2. (5 pts) Calcula en cada caso el trabajo para la fuerza F y el camino γ.

a) **(2.5 pts)** $F(x, y) = (-y, x)$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) **(2.5 pts)** $F(x, y) = (4x^3 + y, 2y + x)$, $\gamma(t) = (\ln t, t)$, $t \in [1, e]$.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Tercera Parte.

1. (6 pts) Se considera la ecuación

$$t^2x'' + tx' + x = \operatorname{sen}(\ln t)\,, \qquad t > 0\,,$$

y se pide:

a) **(2 pts)** Encuentra una constante $\alpha > 0$ de manera que las funciones

$$\varphi_1(t) := \operatorname{sen}(\alpha \ln t),\ \ \varphi_2(t) := \cos(\alpha \ln t),\ t > 0$$

formen un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada.

b) **2 pts)** Usando la fórmula de variación de constantes, encuentra una solución particular de la ecuación completa.

c) **(2 pts)** Encuentra la solución de la ecuación completa que cumple $x(1) = 0,\ x'(1) = 0$.

2. (4 pts) Encuentra la solución general de la ecuación

$$y''' + 2y'' + y' = 5e^t + \cos t.$$