Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Primera parte

1. Este ejercicio propone un método para la resolución de las ecuaciones diferenciales del tipo

$$(*) \quad x' = a(t)e^x + b(t)$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

a) Se definen las nuevas variables

$$s = t, \quad y = e^{-x}.$$

Encuentra dominios del plano D y $\hat{D}$ de manera que la transformación $(t, x) \in D \mapsto (s, y) \in \hat{D}$ sea un cambio admisible para la ecuación $(*)$.

b) Transforma la ecuación $(*)$ mediante el cambio del apartado anterior. ¿Qué tipo de ecuación se obtiene?

c) Se supone $a(t) = 1$, $b(t) = \frac{1}{t}$, $I =]-\infty, 0[$. Encuentra la solución de $(*)$ que cumple $x(-1) = 2$. ¿Está definida en todo el intervalo I?

2. Se considera la familia de curvas del plano con la siguiente propiedad: el área del triángulo de vértices O, A y B se mantiene constante a lo largo de la curva. Los puntos de corte de los ejes coordenados con la recta tangente a la curva se designan por A y B. Encuentra la ecuación diferencial asociada a esta familia ¿Es posible expresarla en forma normal?

3. Se considera el dominio del plano $D =]0, \infty[\times]0, \infty[$. Se pide:

a) Determina los valores de α, β para los cuales la transformación $\varphi : D \to D$, $\varphi(x, y) = (u, v)$ definida por

$$u = x, \quad y = v^\alpha x^\beta$$

es un difeomorfismo.

b) Determina los valores de α, β para los cuales la transformación anterior convierte en variables separadas la ecuación

$$yf(xy) + xg(xy)y' = 0,$$

donde $f, g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas arbitrarias.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Segunda parte.

1. Dada la ecuación

$$2y - 6x + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

se pide:

a) Comprueba que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(xy^2)$.

b) Resuelve implícitamente la ecuación.

c) Discute si existe una solución tal que $y(0) = 1$.

2. Dadas dos funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$ infinitamente derivables, se pide:

a) Demuestra que

$$\frac{d}{dt}W[f,g] = W[f',g] + W[f,g'], \quad t \in I.$$

b) Encuentra una fórmula que exprese la derivada segunda de $W[f,g]$ como suma de Wronskianos.

c) Encuentra una fórmula análoga a la del apartado anterior para la derivada de orden n con $n \geq 3$.

d) Se supone ahora que las funciones f y g solo admiten un número finito $k \geq 1$ de derivadas ¿Cuántas derivadas hacen falta en el apartado b)?

3. Identifica los cambios de variable $s = t$, $y = \Psi(x)$ que dejan invariante la ecuación

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x \in]0, \infty[.$$

En cada caso se precisarán las regiones de validez del cambio efectuado.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Tercera parte.

1. Por medio de la técnica de superposición y coeficientes indeterminados, calcula una solución particular de la ecuación

$$y'' - y' + y = (e^t + 2)^2.$$

Calcula la solución general.

2. En este ejercicio se pretende probar que la ecuación integral

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0,1]$$

admite al menos una solución continua $x : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Demuestra que la sucesión de funciones definida por la recurrencia

$$x_0(t) = 0, \quad x_{n+1}(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x_n(s)ds, \quad t \in [0,1], n \geq 0$$

converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$

b) Demuestra que la función límite $x(t) = \text{lím}_{n\to\infty} x_n(t)$ es solución de la ecuación integral.

3. Se designa por Z al espacio de soluciones del sistema $x' = Ax$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se define la aplicación lineal

$$\Psi : Z \to \mathbb{R}^2, \quad \Psi(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

¿Es Ψ un isomorfismo?

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final.

1. Este ejercicio propone un método para la resolución de las ecuaciones diferenciales del tipo

$$(*) \quad x' = a(t)e^x + b(t)$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

a) Se definen las nuevas variables

$$s = t, \quad y = e^{-x}.$$

Encuentra dominios del plano D y $\hat{D}$ de manera que la transformación $(t, x) \in D \mapsto (s, y) \in \hat{D}$ sea un cambio admisible para la ecuación $(*)$.

b) Transforma la ecuación $(*)$ mediante el cambio del apartado anterior. ¿Qué tipo de ecuación se obtiene?

c) Se supone $a(t) = 1$, $b(t) = \frac{1}{t}$, $I =]-\infty, 0[$. Encuentra la solución de $(*)$ que cumple $x(-1) = 2$. ¿Está definida en todo el intervalo I?

2. Se considera la familia de curvas del plano con la siguiente propiedad: el área del triángulo de vértices O, A y B se mantiene constante a lo largo de la curva. Los puntos de corte de los ejes coordenados con la recta tangente a la curva se designan por A y B. Encuentra la ecuación diferencial asociada a esta familia ¿Es posible expresarla en forma normal?

3. Dada la ecuación

$$2y - 6x + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

se pide:

a) Comprueba que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = m(xy^2)$.

b) Resuelve implícitamente la ecuación.

c) Discute si existe una solución tal que $y(0) = 1$.

4. Por medio de la técnica de superposición y coeficientes indeterminados, calcula una solución particular de la ecuación

$$y'' - y' + y = (e^t + 2)^2.$$

Calcula la solución general.

5. En este ejercicio se pretende probar que la ecuación integral

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0,1]$$

admite al menos una solución continua $x : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Demuestra que la sucesión de funciones definida por la recurrencia

$$x_0(t) = 0, \quad x_{n+1}(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x_n(s)ds, \quad t \in [0,1], n \geq 0$$

converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$

b) Demuestra que la función límite $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ es solución de la ecuación integral.

6. Identifica los cambios de variable $s = t$, $y = \Psi(x)$ que dejan invariante la ecuación

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x \in]0,\infty[.$$

En cada caso se precisarán las regiones de validez del cambio efectuado.