Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
14 de Junio de 2017. Examen Final. Primera parte

1.1. Se considera la transformación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ \varphi(t,x) = (s,y), \ s = 3t, \ y = x + \frac{x^3}{3}.$$

a) [10] Demuestra que φ es un C^1 difeomorfismo del plano.

b) [15] Demuestra que φ define un cambio admisible para la ecuación $x' = \frac{3x+x^3}{1+x^2}$ y encuentra la ecuación transportada al plano (s,y).

c) [15] Resuelve el problema $x' = \frac{3x+x^3}{1+x^2}$, $x(0) = 1$. ¿En qué intervalo está definida la solución?

1.2. Se considera la familia de curvas $\{\mathcal{C}_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ definida por la ecuación

$$x^2 + ay^2 = 1$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) [10] Dibuja la curva $\mathcal{C}_a$ distinguiendo los casos a positivo, $a = 0$ y a negativo.

b) [15] Encuentra la ecuación diferencial de esta familia de curvas.

c) [15] Encuentra y resuelve la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales.

1.3 [20] Se considera el sistema autónomo $x' = f(x,y), y' = g(x,y)$ donde $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $g(x,y) \neq 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se supone que $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ es una solución. Demuestra que ψ admite una función inversa $t = \psi^{-1}(y)$, definida en algún intervalo abierto, y encuentra la ecuación diferencial que cumple la función $\varphi(\psi^{-1}(y))$.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
14 de Junio de 2017. Examen Final. Segunda parte

2.1. Se considera la ecuación

$$x'' + \frac{1}{t}x' = 0, \quad t \in]0, \infty[$$

y se denota por Z al espacio vectorial de sus soluciones. Para cada $\tau > 0$ se considera la aplicación lineal $\Psi_\tau : Z \to \mathbb{R}^2, \ \ x \mapsto \begin{pmatrix} x(\tau) \\ x'(\tau) \end{pmatrix}$.

a) [15] ¿Qué dimensión tiene Z? Encuentra una base.

b) [15] Calcula $\Psi_e^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) [10] Demuestra que $\Psi_{\tau_1} \neq \Psi_{\tau_2}$ si $\tau_1 \neq \tau_2$.

2.2. Se considera la función

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty).$$

a) [10] Encuentra una función continua $p : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de manera que $\varphi(t)$ sea solución de la ecuación diferencial

$$x' = x^2 + p(t).$$

b) [30] Encuentra la solución de esta ecuación que cumple $x(1) = 0$.

2.3. Se considera el campo de fuerzas

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

a) [10] ¿Admite F un potencial?

b) [10] Calcula el trabajo del campo F a lo largo de la curva $\gamma(t) = (\cos t, 2\text{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
14 de Junio de 2017. Examen Final. Tercera parte

3.1. Consideramos la ecuación lineal de tercer orden

$$x''' + ax'' + bx' + cx = 0$$

con a, b, c parámetros reales.

a) [10] Si $c > 0$, demuestra que la ecuación tiene al menos una solución no trivial $x(t)$ tal que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

b) [10] Determina el conjunto de parámetros a, b, c tal que e^{-t} es solución de la ecuación.

c) [20] Dada la ecuación completa

$$x''' + x'' + 4x' + 4x = \operatorname{sen} t,$$

encuentra una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados y calcula la solución general.

3.2. Consideramos el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} a(t) & -a(t) \\ -b(t) & b(t) \end{pmatrix} x$$

con $a, b \in C(\mathbb{R})$.

a) [10] Encuentra una solución constante.

b) [15] Si $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$ es la solución tal que $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, relaciona las componentes $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ por medio de la fórmula de Jacobi-Liouville para sistemas.

c) [15] Sustituye en el sistema la relación obtenida en b) para expresar $\varphi(t)$ en términos de a, b y sus primitivas.

3.3. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando la respuesta:

a) [10] Existe una función matricial $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ tal que $x = \begin{pmatrix} t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es solución del sistema $x' = A(t)x$.

b) [10] Si A es nilpotente, entonces e^A también lo es.