Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
21 de Junio de 2016. Examen Final. Primera parte

NOMBRE:

1.1. Consideramos la familia de curvas

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2), \qquad a > 0.$$

a) [14] Encuentra una ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que admita como soluciones a las funciones $y = y(x)$ definidas por dicha familia.

b) [6] ¿Es esta ecuación de alguno de los tipos vistos en clase?

c) [6] Determina los posibles dominios de definición de la ecuación.

d) [14] Fijado el dominio y dada $a > 0$, calcula el intervalo maximal de definición de cada una de las soluciones que componen la curva.

1.2. En este ejercicio se propone un método para resolver la ecuación

$$x' = a(t)e^{rx} + b(t),$$

donde $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $r > 0$.

a) [15] Dado $m \neq 0$ demuestra que

$$\varphi : (t, x) \mapsto (s, y), \quad s = t, \quad y = e^{mx}$$

define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio $D = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Describe D.

b) [15] Encuentra un valor de m que haga que el cambio φ transforme la ecuación anterior en una ecuación lineal.

c) [10] Resuelve por este procedimiento el problema $x' = 2e^x + 1$, $x(0) = 0$. Se precisará el intervalo de definición de la solución.

1.3 [20] Encuentra la ecuación diferencial que verifica la familia de circunferencias que pasan por el origen y son tangentes al eje OY en ese punto.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
21 de Junio de 2016. Examen Final. Segunda parte

NOMBRE:

2.1. Se consideran los operadores diferenciales $L : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ y $\tilde{L} : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ definidos por $L[x] = x' + tx$ y $\tilde{L}[x] = x'' + tx'$. Se pide:

(a) [10] Calcula Ker$L$

(b) [10] Calcula Ker$\tilde{L}$

(c) [20] Encuentra todas las soluciones de $\tilde{L}[x] = t^2$.

2.2. Se considera el campo de fuerzas

$$F(x,y) = (\frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{-2x}{x^2+y^2}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

a) [10] ¿Se cumple la condición de exactitud $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$?

b) [30] Se calcula el trabajo a lo largo de dos caminos γ_1 y γ_2 que unen los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ y están definidos por

$$\gamma_1(t) = (\cos(2t), \mathrm{sen}(2t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(2t), -\mathrm{sen}(2t)), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

¿Se obtiene la misma cantidad?

2.3. [20] Se considera la transformación del primer cuadrante $x = u^3,\ t = s^3$. Identifica las funciones $f(t,x)$ tales que la ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ es invariante para dicha transformación.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
21 de Junio de 2016. Examen Final. Tercera parte

NOMBRE:

3.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, consideramos el sistema lineal de segundo orden

$$x'' = Ax$$

Se pide

a) [10] Justifica que el conjunto de soluciones forma un espacio vectorial y calcula su dimensión.

b) [10] Si $\mu \in \mathbb{R}$ es tal que μ^2 es valor propio de A con vector propio asociado v, demuestra que $x(t) = e^{\mu t}v$ es solución.

c) [10] Si $\mu \in \mathbb{R}$ es tal que $-\mu^2$ es valor propio de A con vector propio asociado v, demuestra que $x_1(t) = \mathrm{sen}(\mu t)v, x_2(t) = \cos(\mu t)v$ son soluciones.

d) [10] Dada $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la solución general del sistema.

3.2. Consideramos el sistema

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) [10] Demuestra que si (x, y) es solución del sistema, entonces la primera componente x es solución de la ecuación

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

b) [15] Se sabe que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ forman un sistema fundamental de la ecuación del apartado anterior y se supone que $b \neq 0$. Construye una matriz fundamental del sistema en términos de ϕ_1, ϕ_2 y los coeficientes a, b, c, d.

c) [15] Utiliza los apartados anteriores para calcular e^{tA} si $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.3. [20] Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = 3 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{sen}(ts)x(s)ds$$

tiene a lo sumo una solución $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua.