Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
29 de Mayo de 2018

NOMBRE:

1. Calcula la solución de $x'' - x = \operatorname{sen} t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

2. Encuentra la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ del sistema $x' = Ax$ donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Calcula el determinante de la matriz e^A si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\geq 0}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por la recurrencia

$$f_0(t) = 0, \quad f_n(t) = 7 + \frac{1}{3}[f_{n-1}(t-1)\cos t + f_{n-1}(t+1)\operatorname{sen} t] \text{ si } n \geq 1,$$

válida para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestra que esta sucesión converge uniformemente a una función $f(t)$ continua en todo $\mathbb{R}$.

5. Dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se define su conmutador como $[A, B] = AB - BA$. Dadas $A, X_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se considera el problema

$$X' = [X, A], \quad X(0) = X_0.$$

La incógnita $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ es una función derivable con valores matriciales. Demuestra que este problema admite una única solución. Encuentra dicha solución en el caso de que las matrices A y X_0 conmuten.