Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
10 de Mayo de 2018

NOMBRE:

1. Se considera el campo de fuerzas

$$F : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^2, \;\; F(x,y) = (\frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2}).$$

¿Admite un potencial? Calcula el trabajo a lo largo de la curva

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, 1 + \operatorname{sen}\theta), \;\; \theta \in [0,\pi].$$

2. Demuestra que la ecuación diferencial

$$x' = (x - t)^2$$

admite una solución polinómica de grado uno. Encuentra un cambio de variable que transforme esta ecuación en una ecuación lineal.

3. Dadas dos funciones $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ que cumplen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, demuestra que la función

$$U(x,y) = \int_0^y Q(0,s)ds + \int_0^x P(s,y)ds$$

es solución de

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

4. Considera las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

¿Son linealmente independientes? Calcula su Wronskiano.

5. Dada una función continua $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto a(t)$, se denota por Z al conjunto de funciones $x \in C^1(\mathbb{R})$, $x = x(t)$, que satisfacen la ecuación integro-diferencial

$$x'(t) + x(t) = \int_0^t a(s)x(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demuestra que Z admite una estructura de espacio vectorial. ¿Qué dimensión tiene?