Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
16 de Marzo de 2017

NOMBRE:

1. Se considera la familia de curvas

$$xy = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Calcula la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias de curvas sobre el plano (x, y).

2. Demuestra que la ecuación

$$e^{x+t} + x = 0$$

define de forma implícita una función $x = x(t)$ que es derivable y está definida en todo $\mathbb{R}$. Encuentra una ecuación diferencial que admita a esta función como solución.

3. El sistema

$$x' = y, \;\; y' = x$$

admite la solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Dibuja la órbita asociada en el plano (x, y). Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema.

4. Se considera el cambio de variables

$$\varphi : \; s = x, \; y = t.$$

¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua?

Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$, ¿Qué relación hay entre f y $\hat{f}$?

5. Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ de clase C^1 y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x, y(x)) = 0, \quad y(x_0) = y_0.$$

Encuentra (si es que existen) una función F y un punto (x_0, y_0) en las condiciones anteriores y para los que el problema de funciones implícitas no admita solución.

Nota: se considera el problema local, la posible solución $y(x)$ está definida en algún entorno de x_0