Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
17 de Marzo de 2016

NOMBRE:

1. Dadas las funciones $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x)$ se define $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = F(x, \varphi(x))$. Se supone que F y φ son de clase C^2. Expresa $\phi''(x)$ en términos de las derivadas sucesivas de F y φ.

2. Encuentra la solución de

$$x' = e^{t+x}, \ \ x(0) = 0$$

y precisa el intervalo I donde está definida.

3. Encuentra una ecuación diferencial para las funciones $y = y(x)$ cuyas gráficas tienen la siguiente propiedad: la distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ coincide con la primera coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de abscisas.

4. Se considera el cambio de variables $\varphi: \;\; s = e^t, \; y = e^{-t}x$. Demuestra que φ define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio Ω del plano. Determina Ω. Comprueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = tx^2$$

y encuentra la nueva ecuación en las variables (s, y).

5. Se considera la función *seno hiperbólico* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = f(t) = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Demuestra que f tiene una inversa[1] $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t = g(x)$ y calcula $g'(x)$.

[1]Es costumbre emplear la notación $g(x) = \operatorname{arg\,sh} x$, *argumento del seno hiperbólico*