Universidad de Granada. Modelos matemáticos I. Grupo B
23 de enero de 2014

NOMBRE:

1. Demuestra que la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 + (x+1)^2} + \sqrt{2 + (x+2)^2} + \sqrt{3 + (x+3)^2}$$

admite un mínimo absoluto.

2. Encuentra todos los rayos de luz que se emiten desde el punto $A = (\alpha, 0)$, $\alpha \in]0, 1[$, y regresan a dicho punto después de reflejarse una vez en un espejo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. ¿Qué ocurre si $\alpha = 0$?

3. Demuestra que el número $\log_2(5)$ es irracional.

4. Dados dos números $x, y \in \mathbb{R}^+$, diremos que están relacionados ($x \sim y$) si existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$x = y \cdot 2^n \cdot 3^m,$$

y se define

$$\mathcal{DT} = \{2^n \cdot 3^m : \ n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

¿Es $\mathcal{DT}$ un subgrupo de $(\mathbb{R}^+, \cdot)$? ¿Es la relación binaria $\sim$ de equivalencia?

5. Se construye un cable de fibra óptica con dos cilindros, el exterior tiene base circular y el interior base elíptica. Más precisamente

$$C_e = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 4\}$$

$$C_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x^2 + y^2 = 1\}.$$

El índice de refracción es n_i en la región encerrada por C_i; en la región comprendida entre C_e y C_i el índice es n_e. Encuentra un sistema de ecuaciones que describa los rayos ópticos que viajan de $A = (2, 0, 0)$ a $B = (0, 0, 3)$.