

Universidad de Granada. Modelos matemáticos. Grupo A
27 de enero de 2012

NOMBRE:

1. Disponemos de 10^7 partículas que se distribuyen entre los cuatro vértices del grafo

1

2 3 4

Cada segundo las partículas cambian de posición, desplazándose con igual probabilidad a uno de los vértices adyacentes. Desde el vértice 1 pueden viajar al 2, 3 o 4; del 2 al 1 o 3; del 3 al 1, 2 o 4 y del 4 al 1 o 3. Presenta un modelo que describa la evolución de la distribución de partículas en el grafo.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que cumple

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Demuestra que f alcanza el máximo pero no el mínimo.

3. Se considera un espejo parabólico de ecuación $y = x^2$ y se emiten rayos de luz desde el punto $P = (0, \alpha)$ en todas las direcciones. Determina, según los valores de $\alpha > 0$, el número de estos rayos que retornarán a P después de reflejarse en el espejo.

4. Se considera la fracción continua $x = [1; 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$. Demuestra que la sucesión de reducidas $\{R_n\}$ cumple

$$R_n = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{R_{n-2}}}, \quad n \geq 2.$$

Usa lo anterior para calcular x .

5. Se considera el grupo cociente $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+/\mathcal{D}$ donde (\mathbb{R}^+, \cdot) es el grupo multiplicativo de los reales positivos y $\mathcal{D} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es el subgrupo de las potencias de 2. Encuentra un generador $\hat{g} = [x]$ con $x \in \mathbb{R}^+$ de un subgrupo de \mathcal{P} que sea cíclico de orden 12. Se construye la escala $\hat{g}^0 = [1], \hat{g}^1 = [x], \dots, \hat{g}^{11} = [x^{11}]$. ¿Qué ventajas/desventajas presenta esta escala con respecto a la estudiada en clase?