Universidad de Granada. Modelos matemáticos I
30 de Enero de 2014. Examen Final. Primera parte.

NOMBRE:

1. Encuentra un número complejo que sea la razón de una progresión geométrica cíclica de orden 8.

2. Un productor fija el precio de su producto haciendo la media de los precios de los dos años anteriores. Si los precios de los dos primeros años son p_0, p_1, calcula el precio a largo plazo.

3. Consideramos el sistema de Samuelson modificado

$$\begin{aligned} Y_n &= \alpha C_n + \beta I_n \\ C_n &= Y_{n-1} \\ I_n &= k(C_n - C_{n-1}) + G, \end{aligned}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual respectivamente, G es el gasto público, que se supone constante. Los parámetros $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ están ligados a impuestos al consumo y la inversión que se destinan a ayuda exterior.[1] Calcula las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros para que haya convergencia a un único equilibrio.

[1]los números $1-\alpha$ y $1-\beta$ representan las partes proporcionales de consumo e inversión destinadas a dicha ayuda

4. En el espacio vectorial de las sucesiones reales S se consideran las sucesiones $\pi_\lambda + D\pi_\lambda + D^2\pi_\lambda$ y $\pi_\lambda + D\pi_\lambda + D^3\pi_\lambda$, donde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ¿Son linealmente independientes estas dos sucesiones?

5. Se considera el polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ y raíces λ_1, λ_2. Demuestra la equivalencia entre las dos condiciones

(i) $a_0 \leq 1,\ 1 + a_1 + a_0 \geq 0,\ 1 - a_1 + a_0 \geq 0$

(ii) $|\lambda_i| \leq 1$ para $i = 1, 2.$

Universidad de Granada. Modelos matemáticos I
30 de Enero de 2014. Examen Final. Segunda parte.

NOMBRE:

1. Un adorno navideño se compone de 3000 dispositivos eléctricos que pueden cambiar de color (verde y rojo). Cada segundo una fracción de los dispositivos cambia de color

$$\frac{1}{4}\,verde \implies rojo, \quad \frac{1}{3}\,rojo \implies verde.$$

Los restantes dispositivos mantienen su color. Describe la evolución de los dos colores a lo largo del tiempo.

2. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 \\ 1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$. Demuestra que la sucesión de potencias A^n converge a una matriz Q. Calcula ImQ.

3. Dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ y una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con coeficientes a_{ij} positivos, decide en cada caso si la afirmación es correcta[2]

$(i)\quad x \geq y \Longrightarrow Ax \geq Ay$

$(ii)\quad x \geq y \Longrightarrow ||x|| \geq ||y||.$

[2]se usa la norma $||x|| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$

4. Se considera matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$ con $p, q \geq 0$, $p + q = 1$, y una sucesión $X_n \in \mathbb{R}^4$ que cumple $X_{n+1} = AX_n$, $n \geq 0$. ¿Existe $\lim_{n\to\infty} X_n$?

5. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq I$, demuestra la equivalencia entre (i) y (ii),

(i) A^n converge a una matriz no nula

(ii) Los valores propios de A cumplen $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_2| < 1$.

Universidad de Granada. Modelos matemáticos I
30 de Enero de 2014. Examen Final.Tercera parte.

NOMBRE:

1. Encuentra la amplitud de la función trigonométrica $f(t) = \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(t + c)$ en términos de $c \in \mathbb{R}$.

2. Sea S^1 la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Tomamos $P \in \mathbb{R}^2 \setminus S^1$. Demuestra que si $0 < \|P\| < 1$, hay dos rayos ópticos que parten de P y vuelven a P después de reflejarse en S^1, mientras que si $\|P\| > 1$ sólo hay un rayo con esta propiedad.

3. Se considera una capa de material óptico con índice de refracción 2 delimitada por las rectas $y = 1, y = -1$. Fuera de esta capa tenemos aire, con índice de refracción aproximadamente 1. Demuestra que todo rayo óptico que une dos puntos $A = (-a, a)$, $B = (a, -a)$ con $a > 1$ debe pasar por $(0, 0)$.

4. Demuestra la identidad

$$\sqrt{n^2+1} = [n; 2n, 2n, 2n \ldots]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

5. Si una cuerda de longitud L da la nota La (g^3), calcula qué nota da esta misma cuerda si acortamos su longitud a $\frac{9}{16}L$.