

**Universidad de Granada. Modelos matemáticos**  
**18 de septiembre de 2013. Convocatoria de Septiembre**

1. Un conjunto de partículas se sitúa sobre los nodos del grafo



Cada unidad de tiempo las partículas se desplazan a alguno de los nodos adyacentes con igual probabilidad. Por ejemplo, una partícula situada en el nodo 4 se desplaza al 3, mientras que una situada en 3 se puede desplazar a 1, 2 o 4.

Se describe la evolución de la distribución de partículas por el sistema

$$X_{n+1} = AX_n, \quad X_n \in \mathbb{R}_+^4.$$

a) Explica el significado de las coordenadas del vector  $X_n$

b) Determina la matriz  $A$  ¿Qué propiedades tiene?

c) Encuentra vectores propios de  $A$  de la forma  $v = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ a \end{pmatrix}$ . ¿Cuáles son los

valores propios asociados? ¿Cómo se interpretan estos vectores en términos del modelo?

d) Calcula la sucesión  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  para la condición inicial  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) ¿Es cierto que la sucesión  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  tiene límite para cualquier condición inicial?

2. Responde a las siguientes cuestiones:

1) Un rayo de luz pasa de un medio óptico a otro con un ángulo de incidencia de  $45^\circ$  con respecto a la normal. Explica las propiedades ópticas que deben cumplir los medios para que el ángulo de salida sea de  $30^\circ$ .

2) Según la Ley de Fermat ¿Cómo sería el rayo de luz que atraviesa de un medio a otro si el índice de refracción es negativo? (Nota informativa: nuevos avances en Física de Materiales permiten desde hace pocos años fabricar este tipo de materiales, puedes encontrar más información sobre el tema en Internet)

2. Se barajan dos posibles estrategias económicas para Keynelandia. En la primera los impuestos son más bajos, y esto estimula el consumo y la inversión pero disminuye el gasto público; los parámetros macroeconómicos son

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad k_1 = 1, \quad G_1 > 0.$$

En la segunda estrategia se suben los impuestos, lo que permite aumentar el gasto público pero disminuye consumo e inversión

$$b_2 = \frac{1}{3}, \quad k_2 = \frac{2}{3}, \quad G_2 = \frac{3}{2}G_1 > 0.$$

¿Qué estrategia produce a largo plazo una mayor renta? ¿y un mayor consumo?

$$Y_n = C_n + I_n, \quad C_n = bY_{n-1}, \quad I_n = k(C_n - C_{n-1}) + G.$$