Universidad de Granada. Modelos matemáticos
31 de enero de 2013. Examen Final.

NOMBRE:

1. Encuentra la solución de $x_{n+1} = ix_n + 1$, $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. El modelo macroeconómico de Samuelson se rige por las ecuaciones

$$Y_n = C_n + I_n, \quad C_n = bY_{n-1}, \quad I_n = I'_n + G, \quad I'_n = k(C_n - C_{n-1}).$$

Se supone $k = 2$, $G = 1$ mientras que $b \in]0, 1[$ es un parámetro. ¿Para qué valores de b se puede asegurar la convergencia de Y_n, C_n y I_n? Calcula $\lim_{n\to\infty} C_n$ para dichos valores.

3. Dado un polinomio de segundo grado $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, demuestra que las raíces quedan dentro del disco $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - 3| < 2\}$ si y solo si se cumplen las desigualdades

$$5 + 3a_1 + a_0 < 0, \ \ 25 + 5a_1 + a_0 > 0, \ \ 1 + a_1 + a_0 > 0.$$

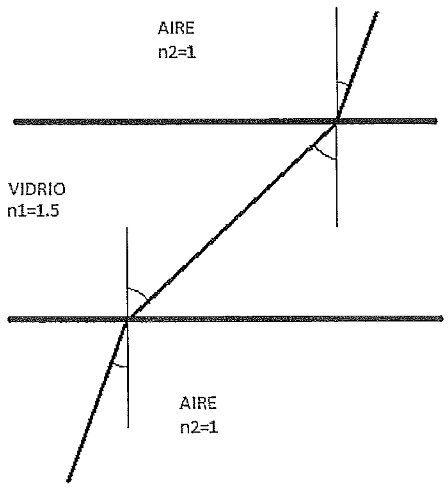
4. Un conjunto de partículas se distribuye entre las cuatro posiciones $1, i, -1, -i$ del plano complejo. Cada unidad de tiempo las partículas se pueden desplazar a una de las casillas contiguas o bien pueden permanecer en la misma casilla. Las probabilidades son: p avanza una casilla (en sentido anti-horario), q retrocede una casilla, r permanece en la misma casilla. Escribe un modelo que describa la evolución de la distribución de masas.

5. Dada la matriz de Leslie $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$, ¿qué grupo de edad será más numeroso a largo plazo?

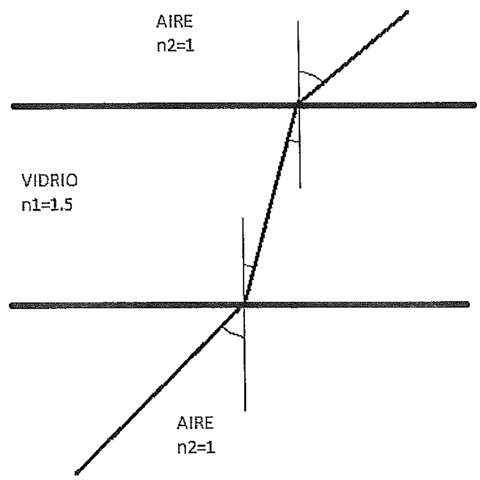
6. Sea $p(\lambda)$ un polinomio y A, B dos matrices de dimensión $d \times d$ que son semejantes. Prueba que también $p(A)$ y $p(B)$ son semejantes.

7. Demuestra que una matriz $A \in M_d(\mathbb{C})$ es nilpotente si y solo si $\sigma(A) = \{0\}$.

2. El vidrio tiene un índice de refracción de 1.5, frente al aire que tiene un índice de refracción aproximado de 1. Un rayo óptico pasa por una capa de vidrio rodeada de aire. Decide, justificando la respuesta, cuál de los dos dibujos de abajo se ajusta a la Ley de Snell.



Opción 1



Opción 2

9. Se considera la fracción continua $\alpha = [1; 2, 3, 4, 5, 6, ...]$. Contruye el mejor aproximante racional (de segundo tipo) con denominador menor o igual a 30.

10. Si una cuerda de longitud L da la nota Mi= g^4, calcula qué longitudes de cuerda dan la nota Fa= g^{-1}.

Universidad de Granada. Modelos matemáticos
31 de enero de 2013. Examen Final. Primera parte

NOMBRE:

1. Encuentra la solución de $x_{n+1} = ix_n + 1$, $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. En el espacio vectorial S de las sucesiones reales se considera el operador lineal $L : S \to S$, $L(X) = X^\star$ con $X = \{x_n\}_{n\geq 0}$, $X^\star = \{x_n^\star\}_{n\geq 0}$, $x_n^\star = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$. Calcula $L(Y)$ y $L(Z)$ si $Y = \{5^n\}_{n\geq 0}$, $Z = \{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0...\}$.

3. El modelo macroeconómico de Samuelson se rige por las ecuaciones

$$Y_n = C_n + I_n, \quad C_n = bY_{n-1}, \quad I_n = I'_n + G, \quad I'_n = k(C_n - C_{n-1}).$$

Se supone $k = 2$, $G = 1$ mientras que $b \in]0, 1[$ es un parámetro. ¿Para qué valores de b se puede asegurar la convergencia de Y_n, C_n y I_n? Calcula $\lim_{n\to\infty} C_n$ para dichos valores.

4. Calcula el término general de la sucesión de Fibonacci.

5. Dado un polinomio de segundo grado $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, demuestra que las raíces quedan dentro del disco $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - 3| < 2\}$ si y solo si se cumplen las desigualdades

$$5 + 3a_1 + a_0 < 0, \ \ 25 + 5a_1 + a_0 > 0, \ \ 1 + a_1 + a_0 > 0.$$

Universidad de Granada. Modelos matemáticos
31 de enero de 2013. Examen Final. Segunda parte

NOMBRE:

1. Un conjunto de partículas se distribuye entre las cuatro posiciones $1, i, -1, -i$ del plano complejo. Cada unidad de tiempo las partículas se pueden desplazar a una de las casillas contiguas o bien pueden permanecer en la misma casilla. Las probabilidades son: p avanza una casilla (en sentido anti-horario), q retrocede una casilla, r permanece en la misma casilla. Escribe un modelo que describa la evolución de la distribución de masas.

2. Dada la matriz de Leslie $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$, ¿qué grupo de edad será más numeroso a largo plazo?

3. Encuentra una matriz 2×2 que cumpla $r(A) \leq 1$ y para la que no exista el límite de las potencias A^n.

4. Sea $p(\lambda)$ un polinomio y A, B dos matrices de dimensión $d \times d$ que son semejantes. Prueba que también $p(A)$ y $p(B)$ son semejantes.

5. Demuestra que una matriz $A \in M_d(\mathbb{C})$ es nilpotente si y solo si $\sigma(A) = \{0\}$.

Universidad de Granada. Modelos matemáticos
31 de enero de 2013. Examen Final. Tercera parte

NOMBRE:

1.

a) Calcula los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

b) Si un rayo de luz parte del foco derecho en la dirección $(0, 1)$ (vertical), calcula el punto de incidencia en la elipse, y una vez reflejado el rayo, el siguiente punto de incidencia.

4. Si una cuerda de longitud L da la nota Mi= g^4, calcula qué longitudes de cuerda dan la nota Fa= g^{-1}.

5. Se consideran las sucesiones de números naturales $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$, con p_n, q_n primos relativos y $R_n = \frac{p_n}{q_n}$ la sucesión de reducidas del número $[2; 2, 2, 2, ...]$. Demuestra que las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ se pueden expresar como combinación lineal de dos progresiones geométricas del tipo π_{λ_1} y π_{λ_2}. ¿Cuánto valen λ_1 y λ_2?