Universidad de Granada. Modelos matemáticos
31 de enero de 2012. Examen Final.

NOMBRE:

1. 1. Las funciones de oferta y demanda de un producto son

$$D(p) = 3 - ap, \quad O(p) = 1 + bp,$$

donde a y b son parámetros positivos. Se cumple $D(p_{n+1}) = O(p_n^e)$ con $p_n^e = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{4}p_{n-1}$. Calcula el precio de equilibrio p_* y discute las condiciones sobre las marginales que garantizan la convergencia de p_n al equilibrio.

2. El modelo macroeconómico de Samuelson se rige por las ecuaciones

$$Y_n = C_n + I_n, \;\; C_n = bY_{n-1}, \;\; I_n = I'_n + G, \;\; I'_n = k(C_n - C_{n-1}).$$

Se supone $b = 0.1$, $k = 0.2$. Calcula $\lim_{n\to\infty} Y_n$ y explica el efecto multiplicador.

3. Calcula $\lim_{n\to\infty} A^n$ para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 100 & -100 \\ 100 & -100 \end{pmatrix}$.

4. Dada una matriz $A \in M_d(\mathbb{C})$ demuestra que existe una sucesión $\{A_n\}$ en $M_d(\mathbb{C})$ de manera que cada A_n es diagonalizable y $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

5. Se sabe que $La = g^3$ y $Si = g^5$ con $g = [\frac{3}{2}]$, además la frecuencia de La en una octava es $440Hz$. Calcula la frecuencia de Si en la siguiente octava (más aguda).

6. Calcula $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, 2, ...]$.

PRIMERA PARTE 1. Las funciones de oferta y demanda de un producto son

$$D(p) = 3 - ap, \quad O(p) = 1 + bp,$$

donde a y b son parámetros positivos. Se cumple $D(p_{n+1}) = O(p_n^e)$ con $p_n^e = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{4}p_{n-1}$. Calcula el precio de equilibrio p_* y discute las condiciones sobre las marginales que garantizan la convergencia de p_n al equilibrio.

2. En el espacio vectorial S de las sucesiones reales se considera el operador lineal $L : S \rightarrow S$, $L(X) = X^{\star}$ con $X = \{x_n\}_{n \geq 0}$, $X^{\star} = \{x^{\star}_n\}_{n \geq 0}$, $x^{\star}_n = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$. Encuentra todas las sucesiones X que cumplen $L(X) = \{1, 1, 1, 1, ...\}$.

3. El modelo macroeconómico de Samuelson se rige por las ecuaciones

$$Y_n = C_n + I_n, \;\; C_n = bY_{n-1}, \;\; I_n = I'_n + G, \;\; I'_n = k(C_n - C_{n-1}).$$

Se supone $b = 0.1$, $k = 0.2$. Calcula $\lim_{n\to\infty} Y_n$ y explica el efecto multiplicador.

4. Se considera la clase de ecuaciones

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.
(i) Encuentra una ecuación que admita la solución $\{17, 0, 17, 0, 17, 0, 17, 0, ...\}$.
(ii) ¿Puede ser la sucesión $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, ...\}$ solución de una ecuación de esta clase?

5. Usando el determinante de Vandermonde, encuentra una fórmula para

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1 & z & 1 \\ x^2 & y^2 & 2y & z^2 & 2z \\ x^3 & y^3 & 3y^2 & z^3 & 3z^2 \\ x^4 & y^4 & 4y^3 & z^4 & 4z^3 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE 1. Calcula $\lim_{n\to\infty} A^n$ para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 100 & -100 \\ 100 & -100 \end{pmatrix}$.

2. Calcula A^{400} si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Una población estructurada en 2 grupos de edad tiene la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula el límite de $\frac{X_n}{||X_n||}$ si $X_{n+1} = LX_n$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Una población estructurada en N grupos de edad tiene la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ 1/2 & & & & \\ & 1/3 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & 1/N & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué grupo de edad es más fértil? ¿Se extinguirá esta población?

5. Dada una matriz $A \in M_d(\mathbb{C})$ demuestra que existe una sucesión $\{A_n\}$ en $M_d(\mathbb{C})$ de manera que cada A_n es diagonalizable y $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

TERCERA PARTE 1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y su derivada segunda cumple $f''(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuántos puntos críticos puede tener f?

2. Se sabe que $La = g^3$ y $Si = g^5$ con $g = [\frac{3}{2}]$, además la frecuencia de La en una octava es $440Hz$. Calcula la frecuencia de Si en la siguiente octava (más aguda).

3. Calcula $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, 2, ...]$.

4. Se consideran los números $\alpha = [2; 1, 2, 2, 2, 2...]$ y $\beta = [2; 2, 2, 2, 2, 2, ...]$. ¿Cuál de ellos es mayor?

5. Establece un principio variacional para describir la trayectoria de los rayos de luz que viajan de un punto A a un punto B después de reflejarse cinco veces en un espejo parabólico. Esboza uno de estos rayos.