

**Superficies  
con  
curvatura media constante**

Manuel María Ritoré Cortés



Superficies  
con  
curvatura media constante

Manuel María Ritoré Cortés

Versión revisada de la memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Profesor Antonio Ros Mulero, Catedrático del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

Fue defendida el 27 de Junio de 1.994 ante un tribunal formado por D. Francisco Gómez Ruiz, D. Vicente Miquel Molina, D<sup>a</sup>. Olga Gil Medrano, D. Sebastián Montiel Gómez y D. Francisco José López Fernández.



*A mis padres.*

Agradezco sinceramente a Antonio Ros su ayuda y su apoyo constantes.

Quisiera también expresar mi reconocimiento a Francisco López, Francisco Urbano, Sebastián Montiel y Joaquín Pérez por su ayuda, así como al resto de los miembros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada por su buena acogida.



# Índice general

Introducción	I
Capítulo 1. Preliminares	1
1. Generalidades	1
2. Fórmulas de variación del área y del volumen	2
3. Aplicaciones de Gauss	5
4. La representación de Weierstrass	6
5. La ecuación senh–Gordon.	8
6. El problema isoperimétrico	9
Capítulo 2. Superficies estables	11
1. Preliminares	11
2. Superficies estables en variedades con curvatura de Ricci no negativa	13
3. Estabilidad en variedades con curvatura constante	18
4. Estabilidad en variedades elípticas	21
5. Estabilidad en variedades completas y llanas	24
6. Comentarios	26
Capítulo 3. Superficies minimales con índice uno	27
1. Preliminares	27
2. Resultados previos	28
3. Superficies minimales compactas	32
4. Superficies minimales no compactas	32
5. Comentarios	34
Capítulo 4. Compacidad de superficies estables y embebidas	37
1. Preliminares	37
2. Cotas locales del área y un resultado de convergencia	40
3. Superficies minimales con índice uno	46
4. Superficies estables	49
5. Comentarios	52
Capítulo 5. Superficies estables con aplicación de Gauss	53
1. Preliminares	53
2. Convergencia de inmersiones	55
3. Compacidad de las aplicaciones de Gauss	57
4. Comentarios	63
Capítulo 6. Ejemplos de superficies con curvatura media constante	65
1. Superficies de Riemann	66
2. Aplicaciones armónicas	70

3. Inmersiones asociadas	76
4. Límites de las familias $\Sigma_i$	80
5. Caracterización de los ejemplos	83
6. Comentarios	86
Bibliografía	87
Índice alfabético	91

## Introducción

El estudio de las superficies minimales y con curvatura media constante en el espacio Euclídeo tridimensional ha sido clásicamente uno de los problemas más importantes de la geometría diferencial.

Las superficies minimales son las superficies de menor área limitadas por un contorno dado. Su estudio se inicia desde el mismo momento del nacimiento del cálculo de variaciones. En 1760 fueron caracterizadas por Lagrange como las superficies en las que la curvatura media es siempre cero. Dichas superficies se corresponden intuitivamente, de acuerdo con el modelo físico descrito por Plateau, con las formas que adoptan las películas de jabón que se pueden construir con un borde de alambre de forma arbitraria.

Las superficies con curvatura media constante admiten una interpretación física. Podemos relacionar la diferencia  $p$  de las presiones entre las dos caras de una superficie con la curvatura media  $H$  por medio de la ecuación de Laplace:  $p = TH$ , donde  $T$  denota la tensión superficial. Si la tensión superficial es constante, afirmar que la curvatura media tiene que ser nula equivale a decir que por ambas caras de la superficie tenemos la misma presión. Si la diferencia de presiones  $p$  no es nula pero es constante obtenemos una superficie con curvatura media constante que no es minimal. De este modo las superficies con curvatura media constante aparecen en experimentos físicos como superficies de separación de dos fluidos no miscibles bajo ciertas condiciones óptimas [90]. Asimismo se ha observado que las superficies con curvatura media constante son modelos aceptables de esqueletos de ciertos microorganismos, y que existen seres unicelulares cuya forma se corresponde aproximadamente con las superficies de revolución con curvatura media constante.

Desde un punto de vista variacional las superficies con curvatura media constante se pueden caracterizar como los puntos críticos del área para aquellas variaciones de la superficie que dejan fijo el volumen *encerrado* por esta. No obstante, aquellas superficies que aparezcan de modo natural deben presentar algún tipo de estabilidad que debe manifestarse por medio de la segunda variación del área.

Desde el punto de vista analítico dichas superficies son localmente grafos de funciones  $u(x, y)$  de dos variables que satisfacen la ecuación semilineal y elíptica:

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 2H(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2},$$

donde  $H$  es la curvatura media de la superficie.

Las superficies minimales y con curvatura media constante constituyen un campo muy activo de investigación. Para abordar su estudio se emplean técnicas procedentes del análisis complejo, de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, de la teoría geométrica de la medida, así como métodos propios de geometría riemanniana. Las principales líneas de investigación en las que se trabaja actualmente

son el estudio de las propiedades topológicas de las superficies minimales y con curvatura media constante propiamente inmersas sin autointersecciones en el espacio Euclídeo tridimensional, el estudio de las propiedades variacionales que presentan dichas superficies y la construcción de ejemplos.

El carácter variacional de las superficies con curvatura media constante motiva la siguiente definición: si  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión isométrica con curvatura media constante de una superficie en una variedad Riemanniana tridimensional, diremos que es *estable* si es un mínimo del área, de segundo orden, para cualquier variación de la superficie que conserve el volumen “encerrado” por  $M$ . Analíticamente, esta condición se traduce en la desigualdad:

$$\int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA \geq 0,$$

para toda función diferenciable  $u$  en  $M$  con soporte compacto y media nula. En la anterior fórmula,  $\text{Ric}(\nu)$  es la curvatura de Ricci en la dirección de un vector  $\nu$  unitario y normal a la inmersión y  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de la inmersión.

Los mejores resultados obtenidos hasta ahora en la clasificación de superficies estables se han conseguido cuando la curvatura de Ricci de la variedad ambiente es no negativa, ya que en este caso la función  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es no negativa, y la desigualdad anterior ofrece mayor resistencia a la existencia de superficies estables. En este caso, si la superficie  $M$  es compacta y orientable, utilizando métodos de geometría algebraica obtenemos funciones cuya energía solo depende del género de la superficie. Por medio de estas funciones se puede probar [24, 97] que:

*Si  $M \subset N$  es una superficie orientable, compacta y estable inmersa en una variedad orientable tridimensional con curvatura de Ricci no negativa, entonces  $\text{género}(M) \leq 5$ . Además, si  $\text{género}(M) = 4, 5$ , entonces la inmersión es minimal.*

Cuando la superficie  $M$  es no compacta y tiene área infinita, Silveira [84] ha demostrado que la condición de estabilidad implica que  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es idénticamente cero y, en particular, que la superficie  $M$  es totalmente geodésica. Esta situación se da cuando  $M$  es una superficie completa no compacta en una variedad con curvatura de Ricci no negativa [24] y geometría acotada, ver el teorema 2.5.

Por otra parte, cuando la variedad ambiente tiene curvatura constante, las únicas inmersiones posibles de esferas con curvatura media constante son totalmente umbilicales, y estas inmersiones son siempre estables. En el capítulo 2 establecemos una relación entre la estabilidad y las regiones donde la curvatura de Gauss de la superficie  $M$  tiene signo, ver teorema 2.13, por medio del estudio de las soluciones de la ecuación senh–Gordon:

*Si  $M \subset N(c)$  es una superficie estable, compacta y orientable inmersa con curvatura media  $H$  en una variedad orientable con curvatura constante  $c$ , y  $c + H^2 > 0$ , entonces la región  $K < 0$  es conexa y en cada componente conexa de la región  $K > 0$  hay un punto umbílico al menos.*

En particular, cuando  $M$  es un toro, obtenemos como consecuencia que:

*Los toros estables en variedades con curvatura constante son llanos.*

Puesto que las superficies llanas con curvatura media constante en variedades con curvatura constante son totalmente geodésicas o tubos alrededor de geodésicas cerradas, el problema de clasificar toros estables queda cerrado.

Cuando podemos deducir que en una variedad riemanniana con curvatura constante no hay superficies estables compactas con género mayor que uno, el resultado anterior junto con la observación de que las esferas inmersas son estables proporciona una clasificación de las superficies estables. Por ejemplo, si la curvatura de la variedad ambiente es 1, utilizando métodos de geometría conforme, concretamente estimaciones de  $\int H^2$ , ver [50] o el teorema 2.16, obtenemos en el corolario 2.17 la clasificación de las superficies estables del espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^3$ :

*Las únicas superficies estables en  $\mathbb{RP}^3$  son esferas geodésicas, un revestimiento de dos hojas de un plano proyectivo totalmente geodésico, y tubos llenos de ciertos radios alrededor de geodésicas cerradas.*

Otras variedades donde no hay superficies compactas sin autointersecciones y género mayor que uno son los cocientes  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , donde  $S_\theta$  es el subgrupo generado por un movimiento helicoidal. En este caso, el principio de reflexión de Alexandrov [2, 46] permite concluir que las únicas superficies compactas sin autointersecciones con curvatura media constante son esferas o toros, y obtenemos que:

*Las únicas superficies compactas, estables y sin autointersecciones en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$  son esferas geodésicas y tubos alrededor de geodésicas cerradas.*

En este caso, los tubos estables son cocientes de cilindros circulares rectos de  $\mathbb{R}^3$  cuyo eje es el del movimiento helicoidal.

Los problemas isoperimétricos se plantean como un conjunto especialmente interesante de problemas globales en geometría Riemanniana. Uno de ellos consiste en encontrar, para una variedad Riemanniana  $N$ , y cualquier valor  $0 < V < \text{vol}(N)$  las superficies compactas sin autointersecciones de mínima área que encierran un volumen  $V$ . Si la variedad es compacta y de dimensión tres, dicho problema siempre admite una solución a causa del resultado de existencia de Almgren [4] y del teorema de regularidad de Taylor [89]. El resultado es también cierto en el caso de que  $N$  sea una variedad llana. Dicha solución tiene curvatura media constante y es estable.

Para superficies completas con curvatura constante y simplemente conexas, el problema isoperimétrico fue resuelto por Schmidt [84]. En el espacio producto  $\mathbb{S}^2(1) \times \mathbb{R}$  ha sido resuelto por Pedrosa [63]. Como aplicación de nuestros resultados de clasificación para superficies estables con curvatura media constante, resolvemos el problema isoperimétrico en el espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^3(1)$  y en variedades llanas con grupo fundamental cíclico, ver los teoremas 2.18 y 2.20. Como consecuencia, obtenemos que:

*Si  $M \subset \mathbb{RP}^3$  es una superficie que divide a  $\mathbb{RP}^3$  en dos regiones de igual volumen, entonces  $\text{área}(M) \geq \pi^2$  y la igualdad se da si y sólo si  $M$  es el toro de Clifford.*

Continuando con el estudio de las superficies estables en variedades llanas, debemos decir que cuando el género de la superficie estable compacta  $M$  es mayor que uno no se tiene aún ningún resultado de clasificación. No se conoce ningún ejemplo de superficie estable de género dos. M. Ross [74] ha probado que las clásicas superficies minimales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de Schwarz con género tres en toros llanos tridimensionales

son estables, y ha observado que superficies minimales próximas a estas deben ser también estables, lo que sugiere la existencia de un gran número de tales superficies. Tampoco se conocen ejemplos de superficies estables de géneros cuatro y cinco.

En el capítulo 4 probamos un resultado de compacidad para superficies estables con curvatura media constante y género mayor o igual que dos en variedades llanas. Concretamente, en el teorema 4.14 probamos que:

*Sea  $M_n \subset \mathbb{R}^3$  una sucesión de superficies conexas y sin autointersecciones invariantes por grupos  $G_n$  discretos de isometrías tales que  $M_n/G_n \subset \mathbb{R}^3/G_n$  es una superficie estable compacta de género mayor o igual que dos. Podemos entonces extraer entonces una subsucesión de las superficies convergente a una superficie  $M$  y de los grupos a un grupo  $G$  tales que  $M/G$  es estable en  $\mathbb{R}^3/G$ .*

En la demostración de este teorema utilizamos un resultado, teorema 4.11, de compacidad para sucesiones de superficies a partir de cotas locales de área y cotas uniformes de la norma de la segunda forma fundamental. La cota uniforme de la segunda forma fundamental se obtiene a partir de la hipótesis de estabilidad. La cota local del área se obtiene a partir de la existencia de semientornos tubulares análogo al clásico teorema de Blaschke para superficies convexas en  $\mathbb{R}^3$ , ver teorema 4.5.

Como corolario de nuestro resultado de compacidad para superficies estables obtenemos en particular:

*No existen superficies compactas de género mayor que uno en el producto  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{T}^2$  es un toro llano bidimensional de área uno y radio de inyectividad pequeño.*

En particular, se obtiene que para estas variedades no hay soluciones del problema isoperimétrico distintas de bolas geodésicas, entornos tubulares de geodésicas y bandas acotadas por toros totalmente geodésicos paralelos.

En el capítulo 5 se demuestra un resultado de compacidad similar al del capítulo 2 para inmersiones estables que poseen aplicación de Gauss. La herramienta básica es un resultado de compacidad [95] para aplicaciones armónicas con energía uniformemente acotada basado en métodos de Gromov [28]. Puesto que las aplicaciones de Gauss de superficies con curvatura media constante son aplicaciones armónicas, y su energía puede acotarse uniformemente por una constante que solo depende del género de la superficie nuestro resultado es consecuencia, aunque no inmediata, de los anteriores.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de superficies minimales orientables y completas sin autointersecciones con índice uno en variedades llanas, completas y orientables. Podemos decir que una superficie minimal tiene índice uno cuando la superficie no es un mínimo global del área, pero no existen más de dos variaciones linealmente independientes que disminuyen el área de la superficie. Las superficies minimales con índice uno pueden estudiarse con métodos similares a los empleados en el estudio de las superficies estables. Para superficies compactas conseguimos probar:

*Sea  $M \subset N$  es una superficie minimal compacta orientable sin autointersecciones con índice uno en un cociente orientable de  $\mathbb{R}^3$ . Si el género de  $M$  es cuatro o cinco, o  $M$  es una superficie hiperelíptica de género tres, entonces  $N$  es un toro llano tridimensional.*

La clasificación de superficies completas no compactas ofrece las siguientes posibilidades, ver teorema 3.10:

*Si  $M$  es una superficie minimal completa, no compacta y orientable inmersa propiamente sin autointersecciones con índice uno en una variedad llana, completa y orientable, entonces se tienen las siguientes posibilidades:*

- (I)  $M$  es una catenoide en  $\mathbb{R}^3$ ,
- (II)  $M$  es una superficie de Scherk simple o doblemente periódica en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos de traslaciones,
- (III)  $M$  es un helicoide con curvatura total mayor o igual que  $-4\pi$  en un cociente helicoidal de  $\mathbb{R}^3$ ,
- (IV)  $M$  es un toro con dos finales en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un grupo que contiene movimientos helicoidales.

En el capítulo 3 damos ejemplos de la última posibilidad.

Utilizando técnicas similares a las utilizadas en la demostración del teorema 4.14 demostramos en el capítulo 4 un teorema similar de compacidad para superficies minimales con índice uno sin autointersecciones en toros llanos tridimensionales, ver teorema 4.12:

*Sea  $M_n \subset \mathbb{R}^3$  una sucesión de superficies minimales sin autointersecciones invariantes por grupos  $\Gamma_n$  discretos de traslaciones tales que  $M_n/\Gamma_n \subset \mathbb{R}^3/\Gamma_n$  es una superficie compacta de índice uno. Podemos entonces extraer entonces una subsucesión de las superficies convergente a una superficie  $M$  y de los grupos a un grupo  $\Gamma$  tales que  $M/\Gamma$  es compacta y con índice uno en  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ .*

En el capítulo 5 se prueba un resultado similar utilizando técnicas distintas.

Los primeros ejemplos de superficies con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  fueron producidos experimentalmente por Plateau, quien encontró seis tipos distintos de superficies de revolución con curvatura media constante, incluyendo una superficie minimal. Posteriormente, Delaunay [14] demostró en 1841 que la lista de superficies de revolución dada por Plateau era completa. M. do Carmo y Dajczer [8] observaron que la familia asociada a las superficies de Delaunay proporciona ejemplos de superficies con curvatura media constante invariantes por un grupo uniparamétrico de movimientos helicoidales de  $\mathbb{R}^3$ . Las posibles superficies con curvatura media constante que admiten un grupo uniparamétrico de isometrías intrínsecas han sido clasificadas por B. Smyth [81] por medio del estudio de soluciones que dependen de un parámetro de la ecuación senh–Gordon. En 1970, H.B. Lawson [48] obtuvo ejemplos de superficies sin autointersecciones con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  resolviendo un problema de Plateau en la esfera  $\mathbb{S}^3$  y aplicando un principio de dualidad para superficies inmersas con curvatura media constante en variedades con curvatura constante, ver teorema 1.16. Asimismo, H. Karcher [42] y K. Große Brauckmann [29] han obtenido nuevos ejemplos de superficies con curvatura media constante por este método.

En 1984, H. Wente [92] demostró la existencia de toros inmersos con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  por medio del estudio de soluciones doblemente periódicas de la ecuación senh–Gordon en  $\mathbb{R}^2$ . Posteriormente, Abresch [2] simplificó la construcción de Wente, y Pinkall y Sterling [65] clasificaron todos los toros con curvatura media constante inmersos en  $\mathbb{R}^3$ . En 1990–91, Kapouleas [40, 41] construyó un

gran número de superficies con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  de género  $g \neq 1$  con  $n \geq 2$  finales, y de superficies compactas con género  $g \geq 3$ .

El capítulo 6 está dedicado a la construcción de ejemplos de superficies con curvatura media constante obtenidos por un método diferente a todos los anteriores. Sobre ciertas superficies de Riemann compactas con simetrías, construimos aplicaciones armónicas simétricas a la esfera  $\mathbb{S}^2$ , que posteriormente integramos para obtener inmersiones minimales y con curvatura media constante. Los ejemplos obtenidos forman familias diferenciables e incluyen, por ejemplo, la clásica superficie minimal  $\mathcal{P}$  de Schwarz de género tres y las piezas de género dos de una de las superficies de Lawson. Todas las superficies que obtenemos son compactas en cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones y no tienen autointersecciones. Además, podemos caracterizar geométricamente dichas superficies del siguiente modo:

*Toda superficie con curvatura media constante sin autointersecciones en un cociente  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto  $\Gamma$  de traslaciones generado por vectores ortogonales que sea simétrica con respecto a tres superficies totalmente geodésicas que se cortan ortogonalmente y tal que las coordenadas de su aplicación de Gauss tengan sólo dos regiones nodales, es una de las superficies construidas como ejemplos.*

En particular, todas las posibles las superficies estables simétricas y las posibles soluciones del problema isoperimétrico en  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  están en nuestra familia de ejemplos.

## CAPÍTULO 1

# Preliminares

### 1. Generalidades

En este apartado precisaremos la notación y algunas definiciones fundamentales.

Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana que, en general, supondremos conexa y completa. Denotaremos por  $K$ ,  $dA$  y  $\Delta$  la curvatura de Gauss, la medida y el Laplaciano asociados a la métrica Riemanniana  $ds^2$ .

Consideremos una inmersión isométrica  $\psi : (M, ds^2) \rightarrow N$ , donde  $N$  es una variedad Riemanniana de dimensión tres. Denotaremos indistintamente por  $g$  o  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a la métrica de  $N$ . Sean  $\nabla$  y  $\tilde{\nabla}$  las conexiones asociadas a las métricas de  $M$  y  $N$ , respectivamente. Si  $\nu$  es un campo vectorial unitario y normal a la inmersión, entonces, para todo par de campos  $X$  e  $Y$  tangentes a  $M$  se verifica la ecuación de Gauss:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \nu,$$

donde  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de  $\psi$ . El endomorfismo de Weingarten  $A$  de  $T_p M$  se define como  $A(x) = -\tilde{\nabla}_x \nu$  para todo  $x \in T_p M$ . Los valores propios  $k_1$  y  $k_2$  del endomorfismo de Weingarten son las *curvaturas principales* de la inmersión. El cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental  $\sigma$  es  $|\sigma|^2 = k_1^2 + k_2^2$ . La curvatura media  $H$  de la inmersión es  $(k_1 + k_2)/2$ .

**Definición.** Una inmersión  $\psi$  tiene *curvatura media constante* si la curvatura media es una función constante en  $M$ .

Una inmersión  $\psi$  es *minimal* si la curvatura media es idénticamente nula en  $M$ .

Denotaremos por  $\mathbb{R}^n$  al espacio euclídeo de dimensión  $n$ ; por  $\mathbb{S}^n(r)$  a la esfera de radio  $r > 0$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y por  $\mathbb{H}^n$  al espacio hiperbólico de dimensión  $n$  y curvatura constante  $-1$ . A veces escribiremos  $\mathbb{S}^n$  en lugar de  $\mathbb{S}^n(1)$ .

Sobre la variedad  $N$ ,  $\text{Ric}$  denotará la curvatura de Ricci y  $S$  su curvatura escalar, normalizadas de modo que sobre  $\mathbb{S}^3$  valgan, respectivamente, 2 y 4. Elegiremos sobre  $\mathbb{S}^n$  la orientación inducida por el normal exterior. De este modo la proyección estereográfica es una aplicación que invierte la orientación.

Diremos que una inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  es un *embebimiento* cuando la aplicación  $\psi$  sea un homeomorfismo de  $M$  con  $\psi(M)$ . En este caso, diremos que la superficie  $M$  está *embebida* en  $N$ .

El primer resultado básico que vamos a utilizar sobre superficies riemannianas orientadas es el hecho de que sobre cada una de ellas existe una única estructura de superficie de Riemann (variedad analítica compleja de dimensión uno) compatible con la estructura riemanniana. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

TEOREMA 1.1. *Sea  $(M, ds^2)$  una superficie riemanniana. Entonces, para todo  $p \in M$ , existe un abierto coordenado  $(U, (x, y))$  centrado en  $p$  tal que si  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  son los campos coordenados, se tiene:*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \right|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial y} \right|^2 = \lambda^2,$$

$$ds^2 \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0,$$

donde  $\lambda$  es una función diferenciable positiva en  $U$ .

A un entorno de este tipo lo llamaremos *carta isotérmica* o *entorno isotérmico* centrado en  $p$ .

Si  $M$  es una superficie orientada, entonces la colección de todas las cartas isotérmicas en  $M$  cuya orientación es compatible con la de la superficie induce una estructura de superficie de Riemann sobre  $M$ .

Es importante hacer notar que la estructura de superficie de Riemann inducida por una métrica riemanniana  $ds^2$  es la misma que la inducida por cualquier otra métrica  $ds_1^2$  en  $M$  *conforme* a  $ds^2$ , es decir, tal que existe una función  $u \in C^\infty(M)$  con  $ds_1^2 = e^{2u} ds^2$ . Recíprocamente, puede probarse que, dada una superficie de Riemann  $M$ , existe una métrica riemanniana  $ds^2$  en  $M$  que soporta tal estructura conforme. Dicha métrica puede elegirse completa y con curvatura constante como consecuencia del teorema de uniformización para superficies de Riemann [19, 22].

**Definición.** Sea  $M$  una superficie de Riemann. Diremos que una inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  en una variedad riemanniana  $N$  es *conforme* si la métrica inducida en  $M$  por  $\psi$  tiene asociada la estructura conforme de  $M$ .

**Definición.** Sea  $M$  una superficie de Riemann. Diremos que una aplicación  $\psi : M \rightarrow N$  en una variedad riemanniana  $N$  es una *inmersión conforme ramificada* si es una inmersión conforme salvo en un conjunto discreto de puntos donde se anula la diferencial  $d\psi$ .

El siguiente resultado relaciona el laplaciano de las funciones coordenadas de una inmersión de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con la curvatura media de la inmersión.

TEOREMA 1.2. *Sean  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión conforme, y  $\psi_k$ , con  $k = 1, 2, 3$ , las funciones coordenadas de la inmersión. Entonces, para toda carta isotérmica  $(U, (x, y))$  tal que  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ , se tiene:*

$$\Delta_0 \psi_k = 2\lambda^2 H \phi_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

donde  $\Delta_0$  es el Laplaciano asociado a la métrica  $|dz|^2$ ,  $H$  es la curvatura media de la inmersión, y  $\phi$  es el vector normal a la inmersión.

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos que la inmersión  $\psi$  es minimal si y sólo si las coordenadas  $\psi_k$ , con  $k = 1, 2, 3$ , son funciones armónicas.

## 2. Fórmulas de variación del área y del volumen

Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica de una superficie Riemanniana en una variedad Riemanniana de dimensión tres. Supongamos que existe un campo vectorial  $\nu$  unitario y normal a la inmersión. Una *variación* de  $\psi$  es una aplicación diferenciable  $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow N$  tal que, si  $\Psi_t(x) = \Psi(t, x)$ , entonces  $\Psi_0 = \psi$ . El *campo variacional* asociado a  $\Psi$  es el campo vectorial a lo largo de  $\psi$  dado por  $X(p) = d\Psi_{(0,p)}(\frac{\partial}{\partial t})$ . Diremos que una variación es *normal* si el campo variacional

$X$  es, en cada punto, normal a la inmersión. Si  $X$  tiene soporte compacto diremos que la variación  $\Psi$  tiene *soporte compacto*. Para una variación de este tipo y valores pequeños de  $t$ , se tiene que  $\Psi_t$  es una inmersión de  $M$  en  $N$ . En este caso, definimos:

$$(1.1) \quad A(t) = \int_M dA_t,$$

$$(1.2) \quad V(t) = - \int_M \Psi^*(dN),$$

donde  $dA_t$  es el elemento de área en  $M$  asociado a la métrica inducida por la inmersión  $\Psi_t$ , y  $dN$  es la forma de volumen de  $N$ . Llamaremos a  $A(t)$  el *funcional área*, que mide en cada instante  $t$  el área de  $M$  con la métrica inducida por la inmersión  $\Psi_t$ . La función  $V(t)$  es el *volumen orientado*, que mide el volumen encerrado entre las inmersiones  $\Psi_0$  y  $\Psi_t$ . Se tiene entonces:

**PROPOSICIÓN 1.3** (Primera fórmula de variación del área). *Sea  $\Psi$  una variación de  $\psi$  con campo variacional  $X$  con soporte compacto en  $M$ . Entonces  $A$  es una función diferenciable en 0 y:*

$$(1.3) \quad A'(0) = -2 \int_M H u \, dA,$$

donde  $u = \langle X, \nu \rangle$  y  $H$  es la curvatura media de  $\psi$ .

**PROPOSICIÓN 1.4** (Primera fórmula de variación del volumen). *Si  $\Psi$  es una variación de  $\psi$  con campo variacional  $X$  con soporte compacto en  $M$ , entonces  $V$  es una función diferenciable en 0 y:*

$$(1.4) \quad V'(0) = - \int_M u \, dA,$$

donde  $u = \langle X, \nu \rangle$ .

De ambos resultados, cuya demostración puede consultarse en [6] o en [85], se sigue inmediatamente que:

**TEOREMA 1.5.**

- (i) *Una inmersión  $\psi$  es minimal si y sólo si es un punto crítico del funcional área para cualquier variación  $\Psi$  de  $\psi$  con soporte compacto.*
- (ii) *Una inmersión  $\psi$  tiene curvatura media constante si y sólo si es un punto crítico del funcional área para cualquier variación  $\Psi$  de  $\psi$  con soporte compacto que sea punto crítico del volumen orientado.*

Si se desean estudiar propiedades de estabilidad de superficies minimales o con curvatura media constante es necesario calcular la segunda derivada del área de las posibles variaciones de la inmersión. Ver [6] o [85].

**PROPOSICIÓN 1.6** (Segunda fórmula de variación del área). *Sea  $\psi$  una inmersión con curvatura media constante y  $\Psi$  una variación normal con campo variacional  $X$  con soporte compacto en  $M$ . Entonces:*

$$(1.5) \quad A''(0) - 2H V''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} \, dA,$$

donde  $u = \langle X, \nu \rangle$ ,  $\text{Ric}(\nu)$  es la curvatura de Ricci del vector unitario y normal  $\nu$  a la inmersión, y  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental  $\sigma$  de la inmersión.

**Definición.** Diremos que una variación  $\Psi$  de  $\psi$  *conserva el volumen orientado* o simplemente que *conserva el volumen* si  $V(t)$  es constante para  $t$  suficientemente pequeño.

A partir de la segunda fórmula de variación del área, obtenemos:

**TEOREMA 1.7.** *Si  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión minimal y  $\Psi$  es una variación normal cualquiera de  $\psi$  con campo variacional  $X$  con soporte compacto, entonces:*

$$(1.6) \quad A''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA,$$

con  $u = \langle X, \nu \rangle$ .

**TEOREMA 1.8.** *Si  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión con curvatura media constante y  $\Psi$  es una variación normal de  $\psi$  que conserva el volumen con campo variacional  $X$  con soporte compacto, entonces:*

$$(1.7) \quad A''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA,$$

con  $u = \langle X, \nu \rangle$ .

Si consideramos sobre  $M$  el operador de Schrödinger  $L = \Delta + q$ , con  $q = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ , tenemos que  $I(u) = A''(0)$  es la forma cuadrática asociada a  $L$  en el espacio  $C_0^\infty(M)$ . Llamaremos a  $I$  la *forma índice* de la inmersión. Si  $\Omega$  es un abierto relativamente compacto contenido en  $M$ , la forma cuadrática  $I$  es continua con respecto a la norma de Sobolev:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_M u^2 + \int_M |\nabla u|^2,$$

y extiende por tanto al espacio  $H_0^1(\Omega)$  (completado de  $C_0^\infty(\Omega)$  con la norma de Sobolev).

La siguiente definición es básica a lo largo de este trabajo:

**Definición.** Diremos que una inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  de una superficie orientada en una variedad riemanniana orientada de dimensión tres es *estable* si tiene curvatura media constante y:

$$\int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA \geq 0,$$

para toda función  $u \in H^1(M)$  con soporte compacto tal que  $\int_M u dA = 0$ .

En la definición anterior,  $H^1(M)$  es el completado de  $C_0^\infty(M)$  con respecto a la norma de Sobolev. Si  $u$  es una función en la superficie  $M$  con soporte compacto y media nula, Barbosa, do Carmo y Eschenburg [6] han probado que es posible encontrar una variación normal  $\Psi$  que conserva el volumen y tal que el campo variacional  $X$  coincide con  $\langle u, \nu \rangle$ . Por tanto, si una inmersión es un mínimo del área para aquellas variaciones que conservan el volumen orientado, entonces es estable.

Si queremos medir el máximo número de direcciones independientes a lo largo de las cuales una inmersión minimal no es un mínimo del área, necesitaremos las dos siguientes definiciones:

**Definición.** Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica,  $\Omega \subset M$  un abierto relativamente compacto. El *índice de  $\Omega$* ,  $\text{Ind}(\Omega)$ , es el número de valores propios negativos del operador  $\Delta + \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  en  $H_0^1(\Omega)$ , es decir, el índice del operador  $\Delta + \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  en  $\Omega$ .

**Definición.** El *índice de  $M$* ,  $\text{Ind}(M)$ , es el supremo de los índices de  $\Omega$ , donde  $\Omega$  es un abierto relativamente compacto en  $M$ .

El índice de  $M$  puede no ser finito. Las inmersiones minimales con índice cero son mínimos del área para cualquier variación de la superficie con soporte compacto. Si una inmersión con curvatura media constante es estable, entonces su índice es necesariamente cero o uno. A lo largo de este trabajo veremos que una inmersión con curvatura media constante e índice uno no es necesariamente estable.

### 3. Aplicaciones de Gauss

Sea  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  es una aplicación diferenciable entre dos variedades Riemannianas. La *energía* de  $\phi$ ,  $E(\phi)$ , se define por:

$$(1.8) \quad E(\phi) = \int_M |\nabla \phi|^2 dA,$$

donde  $|\nabla \phi|^2(p) = \sum_{i=1}^n |d\phi(e_i)|^2$ , con  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base ortonormal de  $T_p M$ . El *campo de tensión* de la aplicación  $\phi$  viene dado por  $\tau(\phi)(p) = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} d\phi(E_i)$ , donde  $E_i$  es un campo ortonormal local paralelo en  $p$ .

**Definición.** Una aplicación entre dos variedades riemannianas  $\phi : M \rightarrow N$  es *armónica* si  $\tau(\phi) = 0$ .

La relación entre las aplicaciones armónicas y las inmersiones con curvatura media constante viene dada por el siguiente resultado:

**TEOREMA 1.9 ([76]).** *Sea  $\Gamma$  un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión isométrica de una superficie riemanniana  $M$  con aplicación de Gauss  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Entonces la curvatura media de  $\psi$  es constante si y sólo si  $\phi$  es una aplicación armónica.*

Para las aplicaciones armónicas  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ , la ecuación  $\tau(\phi) = 0$  se transforma en:

$$(1.9) \quad \Delta \phi_i + |\nabla \phi|^2 \phi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde  $\phi_i$  son las coordenadas de la aplicación  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

Es fácil ver que la energía de una aplicación definida sobre una superficie riemanniana  $M$  es invariante por cambios conformes de la métrica de la superficie, de modo que si la superficie es orientable, la energía solo depende de la estructura de superficie de Riemann de  $M$ . La ecuación de Euler es también invariante por cambios conformes de la métrica de la superficie.

Si  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación armónica y  $g$  es la proyección estereográfica de  $\phi$ , entonces la ecuación (1.9) se traduce en:

$$(1.10) \quad d'd''g - \frac{2\bar{g}}{1+|g|^2} d'g d''g = 0,$$

donde  $d'$  y  $d''$  son las proyecciones holomorfa y antiholomorfa de la diferencial  $d$  en la superficie de Riemann  $M$ . Si  $(U, z)$  es una carta isotérmica en  $M$ , entonces localmente  $d'f = f_z dz$  y  $d''f = f_{\bar{z}} d\bar{z}$ .

#### 4. La representación de Weierstrass

La clásica representación de Weierstrass para superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$  permite reconstruir una inmersión minimal a partir de su aplicación de Gauss y de una 1-forma holomorfa en la superficie de Riemann subyacente. En este apartado, extendemos dicha representación a las superficies con curvatura media constante no nula y a los cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones.

Sean  $M$  una superficie de Riemann,  $\Gamma$  un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión conforme con curvatura media constante  $H$ ,  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  la aplicación de Gauss, que es una aplicación armónica,  $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss, y  $\sigma$  la segunda forma fundamental de la inmersión.

En estas condiciones, definimos la *diferencial de Hopf* asociada a la inmersión  $\psi$  como la diferencial cuadrática compleja  $\alpha$  dada en coordenadas locales isotermas por:

$$\alpha = \sigma^{2,0} = 4\sigma(\partial_z, \partial_z) dz^2 = \{\sigma(\partial_x, \partial_x) - \sigma(\partial_y, \partial_y) - 2i\sigma(\partial_x, \partial_y)\} dz^2.$$

Si la variedad ambiente tiene curvatura constante, como es nuestro caso, y  $\psi$  tiene curvatura media constante, entonces la diferencial de Hopf es una diferencial cuadrática holomorfa. Los ceros de  $\alpha$  son los puntos umbílicos de la inmersión. Llamaremos *una forma de Weierstrass* asociada a  $\psi$  a la diferencial  $d'\psi$ . Para estas inmersiones, tenemos la siguiente representación:

**TEOREMA 1.10 ([36]).** *Sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión conforme ramificada con curvatura media constante de una superficie de Riemann en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto  $\Gamma$  de traslaciones. Entonces:*

$$d'\psi = (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega,$$

donde  $\omega$  es una 1-forma compleja diferenciable de tipo  $(1, 0)$  en  $M$  tal que la diferencial de Hopf  $\alpha$  es igual a  $-4\omega \otimes d'g$ . Además:

$$\psi = \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega = \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \frac{\alpha}{-4 d'g}.$$

La métrica inducida en  $M$  por la inmersión es:

$$ds^2 = \left( \frac{|\omega|(1 + |g|^2)}{2} \right)^2,$$

y la curvatura de Gauss de  $M$  viene dada por:

$$K = H^2 - \left( \frac{8|d'g|}{|\omega|(1 + |g|^2)^2} \right)^2.$$

En consecuencia, podemos recuperar la inmersión a partir de la aplicación de Gauss y de la diferencial de Hopf. Los dos siguientes resultados enuncian este hecho para superficies con curvatura media constante no nula y para superficies minimales. No obstante, existe una diferencia fundamental entre ambos tipos de inmersiones: en el caso de una inmersión con curvatura media constante no nula, la aplicación de Gauss determina la diferencial de Hopf y, por tanto, determina completamente la inmersión. En el caso minimal, sabemos que existen superficies minimales no

congruentes con la misma aplicación de Gauss [60]. En consecuencia, en este caso la aplicación de Gauss no determina la inmersión. En el artículo de Hoffman y Osserman [36] se estudia con detalle esta cuestión.

Para superficies con curvatura media constante no nula tenemos la siguiente representación de Weierstrass:

TEOREMA 1.11 ([11, 45, 25]). *Sea  $M$  una superficie de Riemann, y  $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una aplicación que verifica la ecuación:*

$$d'd''g - \frac{2\bar{g}}{1+|g|^2}d'g d''g = 0,$$

*y tal que  $d''g$  no es idénticamente 0. Para cada  $H \neq 0$ , consideremos la 1-forma  $\omega = -2\bar{d''g}/(H(1+|g|^2)^2)$ , la 1-forma vectorial:*

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega,$$

*y el morfismo de grupos:*

$$\begin{aligned} H^1(M, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{R}^3, \\ \gamma &\mapsto \text{Re} \int_{\gamma} \Phi. \end{aligned}$$

*Sea  $\Gamma = \text{Per}(H^1(M, \mathbb{Z}))$ . Fijado  $p \in M$ , sea  $\gamma$  una curva que une  $p$  y un punto arbitrario  $q$  en  $M$ .*

*Si  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$ , entonces la aplicación  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  dada por:*

$$\psi(q) = \text{Re} \int_{\gamma} \Phi = \text{Re} \int_{\gamma} (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega,$$

*es una inmersión conforme ramificada con curvatura media constante  $H$  de  $M$  en la variedad cociente  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  tal que  $g$  es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss.*

*Además, la inmersión  $\psi$  está libre de puntos de ramificación si y sólo si  $d''g$  nunca se anula.*

Para superficies minimales tenemos:

TEOREMA 1.12. *Sean  $M$  una superficie de Riemann,  $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una función meromorfa y  $\omega$  una 1-forma holomorfa en  $M$  tales que:*

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega,$$

*es una 1-forma vectorial holomorfa. Definimos el morfismo de grupos:*

$$\begin{aligned} H^1(M, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\text{Per}} \mathbb{R}^3, \\ \gamma &\mapsto \text{Re} \int_{\gamma} \Phi. \end{aligned}$$

*Sea  $\Gamma = \text{Per}(H^1(M, \mathbb{Z}))$ . Fijado  $p \in M$ , para cada  $q \in M$ , sea  $\gamma$  una curva que une  $p$  y  $q$ . Definimos la aplicación  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  por:*

$$\psi(q) = \text{Re} \int_{\gamma} \Phi = \text{Re} \int_{\gamma} (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega.$$

Entonces  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es una inmersión conforme, minimal y ramificada de  $M$  en la variedad cociente  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  tal que  $g$  es la proyección estereográfica de la aplicación de Gauss.

Además, la inmersión  $\psi$  está libre de puntos de ramificación si y solo si en cada cero de  $\omega$ , la aplicación  $g$  posee un polo de orden doble.

**Definición.** Diremos que una superficie riemanniana  $M$  tiene *curvatura total finita* si  $\int_M |K| dA < \infty$ .

Si  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es una inmersión minimal de una superficie completa y orientable, entonces la curvatura de Gauss de  $M$  es siempre no positiva, de modo que  $M$  tiene curvatura total finita si y sólo si  $\int_M K > -\infty$ .

Como consecuencia de un resultado de Huber [39] se tiene:

**TEOREMA 1.13 ([60, 54, 55]).** *Sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión minimal con curvatura total finita de una superficie completa y orientable  $M$  en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto de traslaciones  $\Gamma$ .*

*Entonces  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ .*

*Además, la aplicación de Gauss  $g$  y la 1-forma  $\omega$  extienden de forma meromorfa a  $\overline{M}$ .*

A los puntos de  $\overline{M} \setminus M$  se les denomina *finales* de la superficie.

## 5. La ecuación senh–Gordon.

Como hemos visto en el apartado anterior, la aplicación de Gauss permite reconstruir una inmersión con curvatura media constante no nula. En esta sección veremos que también es posible recuperar la inmersión a partir de la diferencial de Hopf  $\alpha$  y de una solución de un operador diferencial elíptico.

Sean  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana orientable,  $(N(c), g)$  una variedad Riemanniana de dimensión tres y curvatura constante  $c$ ,  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$ ,  $\sigma$  la segunda forma fundamental de  $\psi$  y  $P \subseteq M$  el conjunto de puntos umbílicos. Entonces la ecuación de Codazzi–Mainardi es equivalente a que  $\alpha = \sigma^{2,0}$ , que viene dada en coordenadas locales isotermas por  $4\sigma(\partial_z, \partial_z) dz^2$ , sea holomorfa en  $M$ . Se tiene además que  $p \in M$  es un punto umbílico de  $\psi$  si y solo si  $\alpha_p = 0$ . En particular,  $P$  es un conjunto discreto en  $M$ .

Asociados a una inmersión isométrica con curvatura media constante en una variedad con curvatura constante, podemos encontrar una diferencial cuadrática holomorfa (la diferencial de Hopf), y una función diferenciable salvo en un conjunto finito de puntos que es solución de un operador elíptico.

El siguiente resultado es una extensión de cálculos locales que pueden encontrarse en [17], [37] y [48]:

**TEOREMA 1.14.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N(c)$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$  no totalmente umbilical. Supongamos que  $c + H^2 > 0$  y que  $b^2 = 4(c + H^2)$ ,  $P$  el conjunto de puntos umbílicos de la inmersión, y  $ds_0^2$  la métrica llana ramificada  $b |\alpha|$ . Si:*

$$ds^2 = \exp(2w)/b^2 ds_0^2, \quad \text{en } M \setminus P,$$

entonces  $w$  verifica la ecuación:

$$(1.11) \quad \Delta_0 w + \operatorname{senh}(w) \operatorname{cosh}(w) = 0, \quad \text{en } M \setminus P.$$

Además:

$$\begin{aligned} k_1 &= H + b \exp(-2w)/2, \\ k_2 &= H - b \exp(-2w)/2, \\ K &= (1 - \exp(-4w)) b^2/4. \end{aligned}$$

El siguiente resultado demuestra que es posible construir una inmersión a partir de una diferencial cuadrática holomorfa y una solución de la ecuación senh–Gordon (1.11) cuyas singularidades están relacionadas con los ceros de  $\alpha$ .

**TEOREMA 1.15.** *Sea  $M$  una superficie de Riemann simplemente conexa,  $\alpha$  una diferencial cuadrática holomorfa en  $M$ ,  $P$  el conjunto aislado de ceros de  $\alpha$ ,  $b$  un número real positivo,  $ds_0^2$  la métrica llana  $b |\alpha|$  en  $M \setminus P$ . Sea  $w$  una solución de la ecuación:*

$$\Delta_0 w + \operatorname{senh}(w) \cosh(w) = 0, \quad \text{en } M \setminus P,$$

*tal que  $w$  es asintótica a  $-\frac{k}{2} \log|z|$  en un entorno de un cero de  $\alpha$  de orden  $k$ .*

*Entonces, para cada  $c, H \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , tales que  $b^2 = 4(c + H^2)$ , existe una inmersión conforme  $\psi_\theta : M \rightarrow N(c)$  con curvatura media constante  $H$  y diferencial de Hopf  $e^{i\theta} \alpha$  tal que la métrica inducida por la inmersión es  $ds^2 = b |\alpha|$ .*

A partir de ambos resultados es fácil demostrar el siguiente principio de dualidad para superficies con curvatura media constante en variedades con curvatura constante.

**TEOREMA 1.16.** *Sean  $M$  una superficie simplemente conexa,  $N(c_0)$  una variedad completa simplemente conexa con curvatura constante  $c_0$ , y  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H_0$  tal que  $c_0 + H_0^2 > 0$ .*

*Entonces existe una familia de inmersiones:*

$$\psi_{c,\theta} : M \rightarrow N^3(c), \quad \text{con } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

*con curvatura media constante  $H$  siempre que  $c_0 + H_0^2 = c + H^2$ .*

## 6. El problema isoperimétrico

Dada una variedad Riemanniana  $N$  de dimensión tres, nos planteamos el problema de encontrar, de entre todos los abiertos relativamente compactos  $\Omega \subset N$  que encierran un volumen dado, aquellos cuya frontera  $\partial\Omega$  es una superficie diferenciable con área mínima. A tales conjuntos los denominaremos *dominios isoperimétricos*. Las superficies  $\partial\Omega$  serán las soluciones del *problema isoperimétrico*.

De entre todas las superficies compactas que encierran un volumen dado en una variedad riemanniana  $N$  compacta o llana y completa, existe una de mínima área por los resultados de Almgren [4]. Dicha superficie es un conjunto  $(M, \varepsilon, \delta)$ –minimal. A este tipo de conjuntos se aplica el teorema de regularidad de Taylor, que establece que las únicas singularidades de la superficie son curvas donde tres hojas de la superficie se cortan formando ángulos iguales, o puntos donde cuatro de dichas curvas se encuentran. Puesto que nuestra superficie separa la variedad en dos regiones, deducimos que es diferenciable. Por tanto:

**TEOREMA 1.17 ([4, 89]).** *Sea  $N$  una variedad tridimensional compacta y orientable o llana, orientable y completa.*

*Entonces existen soluciones del problema isoperimétrico para todo valor  $V \in (0, \operatorname{vol}(N))$ , y cualquier solución del problema isoperimétrico es diferenciable.*

La información que nos ofrece la solución del problema isoperimétrico en una variedad Riemanniana  $N$  puede resumirse por medio de la función:

$$A(V) = \inf \{ \text{area}(\partial\Omega); \Omega \subset N \text{ es abierto regular y } \text{vol}(\Omega) = V \},$$

a la que llamaremos el *perfil isoperimétrico* de  $N$ . Las propiedades del perfil isoperimétrico son las siguientes:

TEOREMA 1.18. *Sea  $(N, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión tres, entonces:*

- (I) *El perfil isoperimétrico  $A$  es continuo.*
- (II) *Si  $A$  es diferenciable en  $V$ , y  $\Omega$  es una región isoperimétrica que encierra un volumen  $V$ , entonces  $A'(V) = 2H(\partial\Omega)$ .*
- (III) *Las derivadas laterales existen en cada punto.*
- (IV) *La derivada segunda existe en el sentido de las distribuciones y es mayor o igual que cero.*
- (V) *Si  $N$  es una variedad compacta, el perfil isoperimétrico es simétrico respecto de  $\text{vol}(N)/2$ .*
- (VI) *Si  $N$  es no compacta, el perfil isoperimétrico es no decreciente.*

**Nota.** La curvatura media  $H$  del apartado (ii) se calcula con respecto al normal interior, que apunta hacia la región de volumen  $V$ .

La solución del problema isoperimétrico en  $\mathbb{R}^3$  fue obtenida por medio de la observación (principio de simetrización de Steiner) de que todo dominio isoperimétrico es simétrico respecto de un plano paralelo a cualquier plano dado. Esto implica que los únicos dominios isoperimétricos son bolas euclídeas. Una extensión del principio de simetrización de Steiner debida a Hsiang [38] prueba el siguiente resultado:

TEOREMA 1.19. *Sean  $\Gamma$  un subgrupo discreto de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$  generado por vectores ortogonales, y  $\Omega \subset \mathbb{R}^3/\Gamma$  un dominio isoperimétrico. Entonces:*

- (I) *Si  $\text{rango}(\Gamma) = 1$ , entonces  $\Omega$  es invariante por un grupo uniparamétrico de giros.*
- (II) *Si  $\text{rango}(\Gamma) = 2$  o  $3$ , entonces  $\Omega$  es simétrica respecto de tres superficies totalmente geodésicas que se cortan ortogonalmente.*

En particular, la frontera  $\partial\Omega$  del dominio isoperimétrico, que es una solución del problema isoperimétrico, es también invariante por las mismas simetrías que  $\Omega$ .

## CAPÍTULO 2

# Superficies estables

En este capítulo estudiamos superficies estables en variedades de dimensión tres. La primera parte del capítulo esta dedicada a la recopilación de los resultados ya conocidos. En la segunda sección estudiamos las superficies estables en variedades con curvatura de Ricci no negativa y obtenemos restricciones sobre el tipo topológico y la geometría de la superficie. Estudiamos asimismo superficies compactas estables de géneros cuatro y cinco y de género tres e hiperelípticas y demostramos que el problema de estabilidad es equivalente a un problema de estabilidad en una variedad llana. En la tercera sección estudiamos superficies estables en variedades con curvatura constante y obtenemos que cualquier toro estable debe ser llano y, por tanto, un tubo alrededor de una geodésica cerrada. Las dos últimas secciones están dedicadas a la clasificación de las superficies estables en variedades elípticas y llanas, respectivamente. En particular, obtenemos resultados de clasificación en el espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^3(1)$  y en las variedades llanas con grupo fundamental cíclico, que nos permiten calcular el perfil isoperimétrico de dichas variedades.

### 1. Preliminares

Recordemos que una inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  de una superficie orientable en una variedad Riemanniana de dimensión tres es *estable* si tiene curvatura media constante y:

$$(2.1) \quad \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) u^2\} dA \geq 0,$$

para toda función  $u \in H^1(M)$  con soporte compacto tal que  $\int_M u dA = 0$ .

Es especialmente interesante estudiar el problema de estabilidad cuando la curvatura de Ricci de la variedad ambiente es mayor o igual que cero, puesto que en este caso la función  $q = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es no negativa y la condición de estabilidad es mucho más restrictiva. De hecho, en el caso de que la variedad ambiente sea el espacio hipérbolico  $\mathbb{H}^3$ , Silveira [84] ha demostrado que existe al menos una familia uniparamétrica de superficies estables, no compactas y no totalmente umbilicales embebidas en  $\mathbb{H}^3(1)$  con curvatura media  $H < 1$ .

Recordemos que si la inmersión  $\psi : M \rightarrow N$  es estable, el índice del operador  $\Delta + q$  es finito e igual a cero o uno. Este tipo de operadores ha sido estudiado por Fischer-Colbrie [20], quien ha probado el siguiente resultado, ver también [51]:

**TEOREMA 2.1.** *Sea  $M$  una superficie completa,  $q \geq 0$  una función diferenciable en  $M$ . Supongamos que el operador  $\Delta + (q - K)$  tiene índice finito.*

*Entonces:*

- (I)  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ .
- (II) Si  $q \geq c > 0$ , entonces  $M$  es compacta.

Si la curvatura de Ricci de la variedad ambiente es mayor o igual que cero, entonces la curvatura escalar  $S$  es también mayor o igual que cero, y se tiene que:

$$\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 = S + \frac{1}{2} |\sigma|^2 + 2H^2 - K,$$

de modo que el operador asociado a la segunda variación del área es del tipo considerado en el teorema 2.1. Aplicando dicho resultado obtenemos:

**TEOREMA 2.2.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión estable de una superficie orientable y completa en una variedad riemanniana orientable de dimensión tres y curvatura de Ricci no negativa. Entonces:*

- (I)  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ .
- (II) Si la curvatura media  $H$  es mayor que cero, entonces  $M$  es compacta.
- (III) Si la curvatura escalar  $S$  verifica  $S \geq c > 0$ , entonces  $M$  es compacta.

El caso no compacto ha sido estudiado por Silveira [84], quien ha obtenido el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.3.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión estable de una superficie  $M$  conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ , en una variedad riemanniana orientable de dimensión tres y curvatura de Ricci no negativa. Supongamos que el área de  $M$  es infinita.*

*Entonces la inmersión es totalmente geodésica y  $\text{Ric}(\nu) \equiv 0$  a lo largo de la inmersión.*

Imponiendo más restricciones a la variedad ambiente  $N$  se han conseguido mejores resultados:

**TEOREMA 2.4.** *Sea  $M \subset N$  una superficie completa, orientable y estable inmersa en una variedad orientable compacta  $N$  de dimensión tres con curvatura de Ricci positiva.*

*Entonces  $M$  es compacta y conexa y  $\text{género}(M) \leq 3$ .*

**TEOREMA 2.5.** *Sea  $M \subset N$  una superficie completa, orientable y estable inmersa en una variedad completa y orientable de dimensión tres  $N$  con curvatura de Ricci no negativa, radio de inyectividad positivo y curvaturas seccionales acotadas superiormente, entonces, o bien:*

- (I)  $\psi$  es totalmente geodésica, o bien
- (II)  $M$  es compacta y conexa y  $\text{género}(M) \leq 5$ .

*Además, si el género de  $M$  es cuatro o cinco, entonces  $\psi$  es una inmersión minimal.*

La compacidad en el teorema 2.4 se sigue del teorema 2.2, y en el teorema 2.5 de los resultados de Frensel [24], y Silveira [84]. La conexión de  $M$  es fácil de probar en ambos resultados porque en caso contrario podríamos construir una función localmente constante no idénticamente cero con media nula contradiciendo la desigualdad (2.1). La estimación del género en los teoremas 2.4 y 2.5 fue obtenida

utilizando aplicaciones holomorfas de  $M$  en  $\mathbb{S}^2$  con media nula y energía que depende del género de la superficie, ver los trabajos de El Soufi e Ilia [18], Frensel [24] o Yau [97], o la demostración del teorema 2.6. Además, si  $M$  es no compacta, entonces es una superficie minimal con índice cero y  $M$  es conformemente equivalente al plano  $\mathbb{C}$  o al cilindro  $\mathbb{C}^*$ , ver [21].

## 2. Superficies estables en variedades con curvatura de Ricci no negativa

Estamos interesados en la clasificación de superficies estables en variedades de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa ( $\text{Ric} \geq 0$ ). A partir de los teoremas 2.2 y 2.3 vemos que sólo queda por estudiar el caso de una inmersión minimal estable  $\psi : M \rightarrow N$  de una superficie orientable no compacta con área finita.

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.6.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica estable de una superficie completa orientable con área finita en una variedad orientable con curvatura de Ricci no negativa.*

*Entonces  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  de género  $g$  menos  $r$  puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ , y se tiene:*

- (I) *Si género( $\overline{M}$ ) = 0, 1, entonces  $r \leq 3$ .*
- (II) *Si género( $\overline{M}$ ) = 2, 3, entonces  $r \leq 1$ .*
- (III) *Si género( $\overline{M}$ ) = 4, 5, entonces  $r = 0$ .*

*Además, si  $M$  es no compacta, entonces  $\psi$  es una inmersión minimal.*

Antes de demostrar el teorema 2.6 necesitamos probar unos resultados previos.

**LEMA 2.7.** *Sea  $M$  una superficie completa y orientable conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . Sea  $q \geq 0$  una función diferenciable. Supongamos que el operador  $\Delta + q$  tiene índice finito.*

*Entonces  $q \in L_1(M)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Llamemos  $L$  al operador  $\Delta + q$  de índice finito. Fischer-Colbrie [20] ha demostrado que  $L$  es estable en el exterior de un conjunto compacto  $C \subset M$ . Podemos suponer que  $C$  es la unión de  $k$  discos conformes  $D_i \subset \overline{M}$ ,  $i = 1, \dots, k$  centrados en los puntos  $p_i$  y de radio 1.

Sea  $\varphi$  una función diferenciable en  $\overline{M}$  con soporte contenido en  $\bigcup_{i=1}^k D_i$  e igual a 1 en un entorno  $\Omega \subset \bigcup_i D_i$  de los puntos  $p_i$ . Sea  $u_\delta$  la función definida por:

$$u_\delta = \begin{cases} 0, & |z_i| \leq \delta^2, \\ \log(|z_i|/\delta^2)/\log(1/\delta), & \delta^2 \leq |z_i| \leq \delta, \\ 1, & \delta \leq |z_i|, \end{cases}$$

e igual a 1 en  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i$ . Por la estabilidad de  $L$ , se tiene que  $\int_M q\varphi u_\delta \leq \int_M |\nabla(\varphi u_\delta)|^2$ . Tomando límites cuando  $\delta$  tiende a 0, obtenemos que:

$$\int_M q\varphi \leq \int_{\Omega} q dA \leq \int_{\bigcup_i D_i} q u_\delta^2 \leq \int_M |\nabla\varphi|^2 dA < \infty,$$

y, por tanto,  $q \in L_1(M)$ . □

LEMÁ 2.8. *Sea  $M$  una superficie completa y orientable conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . Sea  $q \geq 0$  una función diferenciable. Supongamos que para toda  $u \in H^1(M)$  con soporte compacto tal que  $\int_M u = 0$  se verifica*

$$\int_M qu^2 dA \leq \int_M |\nabla u|^2 dA.$$

*Entonces la desigualdad anterior se verifica para toda función  $u \in H^1(\overline{M}) \cap L_\infty(\overline{M})$  tal que  $\int_M u dA = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. En el enunciado del teorema, el espacio  $H^1(\overline{M})$  es el espacio de Sobolev asociado a cualquier métrica riemanniana en  $\overline{M}$  compatible con su estructura conforme. Recordemos que en una variedad riemanniana compacta, los espacios de Sobolev asociados a distintas métricas riemannianas son linealmente isomorfos con normas de Sobolev equivalentes.

Sea  $u \in H^1(\overline{M}) \cap L_\infty(\overline{M})$ , y sean  $v_\varepsilon \in H^1(\overline{M})$  tales que:

- (I)  $\text{sop}(v_\varepsilon)$  es compacto contenido en  $M$ ,
- (II)  $v_\varepsilon \leq 1$  y  $v_\varepsilon \rightarrow 1$  puntualmente en  $M$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,
- (III)  $\int_{\overline{M}} |\bar{\nabla} v_\varepsilon|^2 \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Entonces  $v_\varepsilon u^+$  y  $v_\varepsilon u^-$  tienen soporte compacto contenido en  $M$  y convergen respectivamente a  $u^+$ ,  $u^-$  en  $H^1(\overline{M})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si  $\{\lambda_\varepsilon\}_\varepsilon$  es el conjunto de números reales definido por  $\lambda_\varepsilon \int v_\varepsilon u^+ dA = \int v_\varepsilon u^- dA$ , y llamamos  $u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^-$ , entonces se tiene que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon = 1$   $\int_M u_\varepsilon = 0$ , y  $u_\varepsilon$  converge en  $H^1(\overline{M})$  a  $u$ . Puesto que el soporte de  $u_\varepsilon$  es compacto se tiene que:

$$\int_M qu_\varepsilon^2 \leq \int_M |\nabla u_\varepsilon|^2.$$

Tomando límites cuando  $\varepsilon$  tiende a 0 obtenemos, por una parte, que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M qu_\varepsilon^2 = \int_M qu^2,$$

aplicando el teorema de la convergencia dominada, ya que  $qu_\varepsilon^2$  converge puntualmente a  $qu^2$  y  $|qu_\varepsilon^2| \leq \|u\|_\infty q \in L_1(M)$ , pues  $q \in L_1(M)$ .

Por otra parte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{M}} |\bar{\nabla} u_\varepsilon|^2 = \int_{\overline{M}} |\bar{\nabla} u|^2 = \int_M |\nabla u|^2.$$

La primera y la última igualdades por ser la integral de Dirichlet un invariante conforme. La segunda por la convergencia de  $u_\varepsilon$  a  $u$  en  $H^1(\overline{M})$ .  $\square$

Por último, necesitaremos el siguiente lema, que es una extensión de un resultado debido a Hersch [32]. Puede consultarse también [50].

LEMÁ 2.9. *Sean  $(M, ds^2)$  una superficie riemanniana,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible y positiva tal que  $0 < \int_M f dA < \infty$ . Sea  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  una función medible tal que  $\phi^{-1}(p)$  tiene medida nula en  $M$  para todo  $p \in \mathbb{S}^2$ .*

*Entonces existe una transformación de Möbius  $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $\int_M f(F \circ \phi) dA = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $B^3 = \{g \in \mathbb{R}^3; |g| < 1\}$ . Definimos  $F : B^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  por:

$$F(g, p) = \frac{p + (\mu \langle p, g \rangle + \lambda)g}{\lambda(\langle p, g \rangle + 1)},$$

donde  $\lambda = \sqrt{(1 - |g|^2)^{-1}}$  y  $\mu = (\lambda - 1)|g|^{-2}$ .

Para cada  $g \in B^3$ ,  $F_g = F(g, -)$  es una transformación conforme de  $\mathbb{S}^2$ . Además, si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $B^3$  tal que  $g_n \rightarrow g \in \mathbb{S}^2$ , entonces la sucesión de transformaciones de Möbius  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $F_n = F(g_n, -)$  converge puntualmente en  $\mathbb{S}^2 \setminus \{-g\}$  a la función  $F_g(p) = g$  definida para todo  $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{-g\}$ .

Definimos  $\Phi : \overline{B}^3 \rightarrow \overline{B}^3$  por:

$$\Phi(g) = \left[ \int_M f dA \right]^{-1} \left[ \int_M f(F_g \circ \phi) dA \right].$$

Como  $f \geq 0$ , se tiene que  $(\int_M f dA) |\Phi(g)| \leq \int_M |f(F_g \circ \phi)| dA = \int_M f dA$ . Por tanto,  $|\Phi(g)| \leq 1$  y  $\Phi$  está bien definida.

Además, por el teorema de la convergencia dominada,  $\Phi$  es continua en  $\overline{B}^3$ . Si  $p \in \mathbb{S}^2$ , entonces  $F_p \circ \phi(q) = p$  para casi todo  $q \in M$ , ya que  $\phi^{-1}(-p)$  tiene medida nula en  $M$ , por lo que se deduce:

$$\Phi(p) = \left[ \int_M f dA \right]^{-1} \left[ \int_M f p dA \right] = p.$$

Así pues,  $\Phi$  restringida a  $\partial \overline{B}^3$  es la identidad en  $\partial \overline{B}^3$  y, por un razonamiento elemental de topología,  $\Phi$  es sobreyectiva. En particular, existe  $g \in B^3$  tal que:

$$\int_M f(F_g \circ \phi) dA = 0,$$

lo que prueba el lema.  $\square$

El lema anterior se aplicará especialmente en el caso de que  $M$  sea una superficie con área finita y la función  $f$  sea idénticamente uno.

DEMOSTRACIÓN. del teorema 2.6 Por el teorema 2.1 la superficie  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  menos un número finito de puntos  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . Sea  $\phi : \overline{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación holomorfa. Puesto que  $M$  tiene área finita, aplicando el lema 2.9, podemos suponer que  $\phi$  tiene medida nula componiendo  $\phi$  con una transformación de Möbius. Cada componente  $\phi_i$  de la aplicación  $\phi$  es una función diferenciable en la superficie compacta  $\overline{M}$  y, por tanto, está en  $H^1(\overline{M}) \cap L_\infty(\overline{M})$ . Aplicando el lema 2.8 tenemos que:

$$\sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla \phi_i|^2 dA \geq \sum_{i=1}^3 \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) \phi_i^2 dA,$$

y, por tanto:

$$(2.2) \quad \int_M |\nabla \phi|^2 dA \geq \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) dA.$$

Teniendo en cuenta que  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  es igual a  $\text{Ric}(e_1) + \text{Ric}(e_2) + 4H^2 - 2K$ , donde  $e_1, e_2$  son campos locales tangentes a  $M$ ,  $K$  es la curvatura de Gauss de la métrica

de  $M$ , y  $H$  es la curvatura media de  $\psi$ , transformamos la desigualdad (2.2) en:

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla \phi|^2 dA &\geq \int_M \{\text{Ric}(e_1) + \text{Ric}(e_2) + 4H^2 - 2K\} dA \\ &\geq - \int_M 2K dA \geq 4\pi(r - \chi(\bar{M})) = 4\pi(r - 2 - 2g), \end{aligned}$$

donde en la última línea hemos aplicado la desigualdad de Cohn–Vossen  $\int_M K \leq 2\pi\chi(M)$ .

Teniendo en cuenta que  $\int_M |\nabla \phi|^2 = 8\pi\text{grado}(\phi)$ , y que podemos elegir la aplicación holomorfa  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  de grado menor o igual que  $1 + [(1+g)/2]$ , ver [27], obtenemos que:

$$(2.3) \quad 0 \leq \left( 4 + 2 \left[ \frac{1+g}{2} \right] - 2g - r \right),$$

y se sigue que las únicas posibilidades para  $g$  y  $r$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{si } g = 0, 1 &\text{ entonces } r \leq 4, \\ \text{si } g = 2, 3 &\text{ entonces } r \leq 2, \\ \text{si } g = 4, 5 &\text{ entonces } r = 0. \end{aligned}$$

Si se da la igualdad en la ecuación (2.3) se da también la igualdad en la desigualdad (2.3) y obtenemos que  $\text{Ric}(e_1) = \text{Ric}(e_2) = 0$ , que  $H = 0$ , y que  $\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 = -2K$ . Al mismo tiempo obtenemos la igualdad en la desigualdad (2.2) y, por tanto:

$$\int_M \{|\nabla \phi_i|^2 + 2K\phi_i^2\} dA = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Puesto que  $\int_M \{|\nabla u|^2 + 2Ku^2\} \geq 0$  para toda función  $u$  diferenciable en  $M$  tal que  $\int_M u dA = 0$ , derivando la función  $I(\phi_i + tu)$  en  $t = 0$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} I(\phi_i + tu) = \int_M \{\langle \nabla \phi_i, \nabla u \rangle + 2K\phi_i u\} dA \\ &= \int_M -u(\Delta \phi_i - 2K\phi_i) dA = 0, \end{aligned}$$

para toda función  $u$  diferenciable en  $M$  tal que  $\int_M u dA = 0$ . Se sigue que  $\Delta \phi_i - 2K\phi_i$  es constante. Por otra parte, como  $\phi$  es una función holomorfa, sus coordenadas verifican las ecuaciones  $\Delta \phi_i + |\nabla \phi|^2 \phi_i = 0$ . Combinando ambas ecuaciones en forma vectorial se sigue que  $|\nabla \phi|^2 = -2K$  y que  $\Delta \phi_i - 2K\phi_i = 0$ .

En consecuencia, las funciones  $\phi_i$  son soluciones de la ecuación  $\Delta + (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) = 0$ .

Si  $M$  es no compacta, se sigue del trabajo de Fischer–Colbrie [20] que una solución positiva  $u$  de dicha ecuación en un entorno de un final de  $M$  determina una métrica  $u^2 ds^2$  completa en el final y con curvatura de Gauss no negativa, con  $ds^2$  la métrica en  $M$  inducida por la inmersión. Una métrica de este tipo debe tener área infinita, ver [96]. Sin embargo, las métricas  $\phi_i^2 ds^2$  no pueden tener área infinita puesto que  $ds^2$  tiene área finita y  $\phi_i^2$  es una función acotada. Por tanto, no puede darse la igualdad en el caso no compacto en la desigualdad (2.3) y se sigue que las únicas posibilidades para  $g$  y  $r$  son las enunciadas en el teorema.  $\square$

En el caso de que  $M$  sea una superficie de Riemann compacta de género cuatro o cinco o una superficie hiperelíptica de género tres, podemos reducir el problema a uno equivalente al que obtenemos en una variedad llana.

**TEOREMA 2.10.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica estable de una superficie riemanniana compacta de género cuatro o cinco o de una superficie hiperelíptica de género tres en una variedad orientable de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa.*

*Existe entonces una inmersión isométrica minimal multivaluada  $\bar{\psi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  con aplicación de Gauss  $\phi$  de modo que las métricas inducidas por ambas inmersiones coinciden y además  $|\nabla\phi|^2 = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ .*

En consecuencia, los problemas de estabilidad para ambas inmersiones coinciden, ya que si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una inmersión minimal y  $\phi$  es su aplicación de Gauss, entonces  $|\sigma|^2 = |\nabla\phi|^2$ .

**DEMOSTRACIÓN.** En cualquiera de los casos considerados podemos encontrar una función antiholomorfa  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  y grado mayor o igual que  $1 - g$ . La demostración del teorema 2.6 prueba que las componentes de  $\phi$  verifican la ecuación  $\Delta\phi_i + (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2)\phi_i = 0$ . Además se prueba que  $\psi$  es minimal, que  $\text{grado}(\phi) = 1 - g$ , y que:

$$(2.4) \quad \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 = -2K = |\nabla\phi|^2.$$

En cualquier caso se tiene que  $\text{grado}(\phi) = 1 - g$ , y podemos encontrar una 1-forma holomorfa  $\omega$  en  $M$  con ceros de orden doble en los polos de  $\phi$  por el teorema de Riemann–Roch [22]. De este modo, el par  $(\phi, \omega)$  induce una inmersión  $\bar{\psi}$  minimal conforme no ramificada, sin finales, y multivaluada en  $\mathbb{R}^3$ , con aplicación de Gauss  $\phi$ . Podemos elegir dicha inmersión de modo que exista un punto  $p \in M$  tal que  $K(p) = K'(p) \neq 0$ , donde  $K'$  es la curvatura de Gauss de la métrica inducida por  $\bar{\psi}$ .

Sean  $g$  la métrica inducida en  $M$  por la inmersión  $\psi$  y  $g'$  la métrica inducida por la inmersión  $\bar{\psi}$ . Las métricas  $g$  y  $g'$  son conformes, de modo que existe  $u \in C^\infty(M)$  tal que  $g' = e^{2u}g$ . La relación que existe entre las curvaturas de Gauss de dos métricas conformes es:

$$(2.5) \quad \Delta_g u = K - K'e^{2u}.$$

Por ser  $\phi$  la aplicación de Gauss de una inmersión minimal a  $\mathbb{R}^3$  se verifica que  $|\nabla\phi|_{g'}^2 = -2K'$ . Teniendo en cuenta (2.4) se sigue que  $K = K'e^{2u}$ . Sustituyendo en la ecuación (2.5) obtenemos que  $\Delta_g u = 0$  y  $u$  es una función armonica en una superficie compacta y, por tanto, es constante. Puesto que  $K(p) = K'(p) \neq 0$ , se sigue de la igualdad  $K = K'e^{2u}$  que  $u(p) = 0$  y, por ser  $u$  constante,  $u \equiv 0$ . Esto prueba que  $g = g'$ .  $\square$

En todos los resultados anteriores hemos utilizado que  $M$  es conformemente equivalente a una superficie compacta punteada. El siguiente resultado nos proporciona restricciones sobre superficies estables sin esta hipótesis.

**TEOREMA 2.11.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión isométrica estable de una superficie riemanniana completa y orientable en una variedad orientable de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa. Supongamos que  $M$  es no compacta y que  $q = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 \not\equiv 0$ .*

Entonces:

$$\int_M r^\alpha < +\infty, \quad \text{para todo } \alpha < 2,$$

donde  $r$  es la distancia en  $M$  a un punto fijo  $p \in M$ .

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar la desigualdad  $\int_M r^{\alpha_n} < +\infty$  para los elementos de la sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por recurrencia por medio de  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_{n+1} = (1/2)\alpha_n + 1$ . Puesto que  $\alpha_n \rightarrow 2$  y  $\alpha_n < 2$ , y se tiene que:

$$\int_M r^\alpha \leq \int_{\{r \leq 1\}} r^\alpha + \int_M r^\beta, \quad \text{si } \alpha < \beta,$$

se sigue el resultado.

Demostraremos la desigualdad  $\int_M r^{\alpha_n} < \infty$  por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  la finitud de la integral es consecuencia de que el área de  $M$  es finita por el teorema 2.3.

Supongamos por inducción que  $\int_M r^{\alpha_k} < \infty$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Probaremos por contradicción que  $\int_M r^{\alpha_n} < \infty$ . Supongamos que  $\int_M r^{\alpha_n} = \infty$ .

Para  $0 < a < b$ , consideremos la función  $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a-1 \\ a-x, & a-1 \leq r \leq \frac{a+b}{2} \\ x-b, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0, & b \leq x. \end{cases}$$

Como  $r^{\alpha_n} \in H_{loc}^1(M)$  y  $\varphi_{a,b}$  es de clase  $C^1$  a trozos en  $\mathbb{R}$ , se tiene que  $\varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n}$  pertenece a  $H^1(M)$ , tiene soporte compacto y:

$$|\nabla(\varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n})| = \begin{cases} 0, & r \leq a-1, \\ \alpha_n r^{(1/2)\alpha_{n-1}}, & a-1 \leq r \leq b \\ 0, & b \leq r. \end{cases}$$

Fijado  $a$ , la función  $b \mapsto \int_M \varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n}$  es continua, ya que si  $b_k \rightarrow b$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces  $|b_k| \leq c$  para algún  $c \in \mathbb{R}$ . Como  $\varphi_{a,b_k} \rightarrow \varphi_{a,b}$  puntualmente cuando  $k \rightarrow \infty$ , además  $|\varphi_{a,b_k}| \leq |\varphi_{a,c}| \leq \frac{c-a}{2} \chi_{\{r \leq c\}}$ , y  $\int_M \frac{c-a}{2} \chi_{\{r \leq c\}}$  es integrable, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y obtenemos que  $\lim_k \int_M (\varphi_{a,b_k} \circ r^{\alpha_n}) = \int_M (\varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n})$ . Como  $\int_M r^{\alpha_n} = \infty$ , podemos elegir  $b$  de modo que  $\int_M \varphi_{a,b} \circ r^{\alpha_n} = 0$ . Por estabilidad, se tiene que:

$$\int_{\{r^{\alpha_n} \leq a-1\}} q \leq \int_M q(\varphi_{a,b} r^{\alpha_n})^2 \leq \int_M |\nabla \varphi_{a,b} r^{\alpha_n}|^2 \leq \int_{\{a-1 \leq r^{\alpha_n}\}} \alpha_n^2 r^{\alpha_{n-1}}.$$

Puesto que  $r^{\alpha_{n-1}}$  es una función integrable por hipótesis de inducción, pasando al límite cuando  $a \rightarrow \infty$  en las desigualdades anteriores, obtenemos que  $\int_M q = 0$ , lo que implica que  $q \equiv 0$ , con lo que obtenemos una contradicción que prueba el teorema.  $\square$

### 3. Estabilidad en variedades con curvatura constante

El teorema 2.4 se aplica especialmente en el caso de que la variedad  $N$  tenga curvatura constante 1, y el teorema 2.5 cuando la variedad ambiente  $N$  sea llana.

En este tipo de ambientes ha sido demostrado por Barbosa y do Carmo [5], Barbosa, do Carmo y Eschenburg [6], El Soufi e Ilias [18] y Heintze [31] el siguiente resultado:

TEOREMA 2.12. *Sea  $\psi : M \rightarrow N(c)$  una inmersión isométrica estable de una superficie compacta y orientable en una variedad completa y simplemente conexa con curvatura constante  $c$ .*

*Entonces el género de  $M$  es cero y  $\psi$  es una inmersión totalmente umbilical.*

Puesto que estamos estudiando el problema de estabilidad cuando la curvatura de Ricci de la variedad ambiente sea mayor o igual que cero, nos restringiremos a los casos de curvatura constante uno o cero. Llamaremos *elípticas* a las variedades completas de dimensión tres y curvatura constante uno.

Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana compacta y orientable y  $N(c)$  una variedad Riemanniana tridimensional completa con curvatura seccional constante  $c$ . Si  $\psi : M \rightarrow N(c)$  es una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$  y segunda forma fundamental  $\sigma$ , podemos considerar en  $M$  la diferencial de Hopf  $\sigma^{2,0}$ . Recordemos que  $\sigma^{2,0}$  es una diferencial cuadrática holomorfa en  $M$  tal que, si  $(U, z)$  es un entorno isotermo en  $M$ , entonces:

$$\sigma^{2,0} = 4\sigma(\partial_z, \partial_z) dz^2 = \{\sigma(\partial_x, \partial_x) - \sigma(\partial_y, \partial_y) - 2i\sigma(\partial_x, \partial_y)\} dz^2.$$

Se sigue entonces que  $\sigma^{2,0}(p) = 0$  si y solo si  $p$  es un punto umbílico de la inmersión y que, o bien todos los puntos son umbílicos, o bien los puntos umbílicos son aislados. Supongamos que  $b^2 = 4(c + H^2) > 0$ . Entonces en un punto umbílico  $p$  de  $M$  la curvatura de Gauss viene dada por  $K(p) = b^2/4$  y, por tanto, el caso totalmente umbilical corresponde a  $\text{género}(M) = 0$ . Si  $M$  es una superficie de género  $g > 0$ , el número de puntos umbílicos, contados con multiplicidad, es  $4g - 4$  y, en particular, los toros con curvatura media constante no tienen puntos umbílicos. Si denotamos por  $P$  el conjunto finito de puntos umbílicos de  $\psi$ , podemos considerar en  $M \setminus P$  la métrica llana  $ds_0^2 = b|\sigma^{2,0}|$ , que es conforme a  $ds^2$ . Si  $w$  es la función en  $M \setminus P$  definida por  $ds^2 = (\exp(2w)/b^2) ds_0^2$ , entonces:

$$(2.6) \quad \Delta_0 w + \text{senh}(w) \cosh(w) = 0,$$

donde  $\Delta_0$  es el Laplaciano de la métrica llana  $ds_0^2$ . Más aún, si denotamos por  $k_i$ ,  $i = 1, 2$ , las curvaturas principales de  $\psi$ , entonces:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} k_i &= H \pm (b/2) \exp(-2w), \quad i = 1, 2, \text{ y} \\ K &= (b^2/4)(1 - \exp(-4w)). \end{aligned}$$

de modo que  $K \equiv 0$  si y solo si  $w \equiv 0$ . Véase [17], [37] y [48].

Cuando el espacio ambiente es  $N(c)$ , usando la ecuación de Gauss, la forma índice puede escribirse:

$$(2.8) \quad I(f) = \int_M \{|\nabla f|^2 - (b^2 - 2K)f^2\} dA,$$

para toda  $f \in C^\infty(M)$ .

Como  $w$  satisface la ecuación senh–Gordon (2.6) y en los puntos umbílicos  $w$  tiende a  $+\infty$ , en el caso de que  $w \not\equiv 0$ , los ceros de  $w$  vienen dados por un conjunto finito (líneas nodales) de círculos inmersos de clase  $C^1$ , ver [12].

Ahora probaremos que la estabilidad implica una restricción sobre los conjuntos nodales de  $w$  (regiones con signo de  $w$ ).

TEOREMA 2.13. *Sea  $\psi : M \rightarrow N^3(c)$  una inmersión con curvatura media constante  $H$  de una superficie compacta orientable en una variedad Riemanniana*

orientada completa con curvatura constante  $c$ . Sea  $K$  la curvatura de Gauss de  $M$ . Supongamos que  $b^2 = 4(c + H^2) > 0$ .

Si  $K \neq 0$  y  $\psi$  es estable, entonces el conjunto  $\{p \in M \mid K(p) < 0\}$  es conexo y cada componente conexa de  $\{p \in M \mid K(p) > 0\}$  debe contener un punto umbílico al menos.

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  es una función con soporte compacto en  $M \setminus P$  entonces, como en el complemento del conjunto de puntos umbílicos tenemos por (2.7) que  $b^2 - 2K = b^2 \cosh(2w) \exp(-2w) = b^2 (\cosh^2 w + \operatorname{senh}^2 w) \exp(-2w)$ , la forma índice (2.8) puede escribirse:

$$(2.9) \quad I(f) = \int_M \{|\nabla_0 f|^2 - (\cosh^2 w + \operatorname{senh}^2 w) f^2\} dA_0,$$

donde el módulo del gradiente de  $f$  y la medida se toman con respecto a la métrica llana  $ds_0^2$ .

Sea  $\Omega$  una componente conexa de  $\{p \in M \mid K(p) \neq 0\}$  sin puntos umbílicos. Como  $\operatorname{signo}(K) = \operatorname{signo}(w)$ , la función  $f$  en  $M$  definida por:

$$f = \begin{cases} \operatorname{senh}(w), & \text{en } \Omega, \\ 0, & \text{en } M \setminus \Omega, \end{cases}$$

está en el espacio de Sobolev  $H^1(M)$ . Más aún, los puntos umbílicos no pertenecen a la frontera de  $\Omega$  porque la curvatura de Gauss es positiva en los puntos umbílicos y cero en la frontera de  $\Omega$ . Por tanto  $f$  tiene soporte compacto en  $M \setminus P$ . Integrando por partes y utilizando (2.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_0 f|^2 dA_0 &= \int_M \langle \nabla_0 f, \nabla_0 \operatorname{senh}(w) \rangle dA_0 \\ &= - \int_M f \Delta_0 \operatorname{senh}(w) dA_0 \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{senh}(w) \Delta_0 \operatorname{senh}(w) dA_0 \\ &= - \int_{\Omega} \{ \operatorname{senh}(w) \{ \operatorname{senh}(w) |\nabla_0 w|^2 \\ &\quad + \cosh(w) \Delta_0 w \} \} dA_0 \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{senh}^2(w) \{ \cosh^2 w - |\nabla_0 w|^2 \} dA_0. \end{aligned}$$

De esta última igualdad y (2.9) tenemos que:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{\Omega} \{ \operatorname{senh}^2 w (\cosh^2 w - |\nabla_0 w|^2) \\ &\quad - (\cosh^2 w + \operatorname{senh}^2 w) \operatorname{senh}^2 w \} dA_0 \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{senh}^2 w (\operatorname{senh}^2 w + |\nabla_0 w|^2) dA_0 < 0. \end{aligned}$$

Si existieran dos componentes conexas de  $\{p \in M \mid K(p) \neq 0\}$  sin puntos umbílicos, obtendríamos dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  en  $H^1(M)$  con soportes disjuntos y tales que  $I(f_i) < 0$ ,  $i = 1, 2$ . Una cierta combinación lineal de ambas funciones proporcionaría otra función  $f$  con media nula y tal que  $I(f) < 0$ , lo que es imposible por la estabilidad de  $\psi$ . El teorema se sigue directamente porque el conjunto

$\{p \in M \mid K(p) < 0\}$  es no vacío por el teorema de Gauss–Bonnet, y no contiene puntos umbílicos.  $\square$

Si  $\text{género}(M) = 1$  obtenemos la siguiente conclusión, *sin restricciones* sobre los valores de  $c$  y  $H$ .

**COROLARIO 2.14.** *Sea  $\psi : (M, ds^2) \rightarrow N^3(c)$  una inmersión isométrica con curvatura media constante  $H$ . Si  $M$  es un toro y  $\psi$  es estable, entonces la métrica  $ds^2$  es llana.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos en primer lugar que  $b^2 = 4(c + H^2) > 0$ . Como  $M$  no tiene puntos umbílicos concluimos usando el teorema 2.13 que el conjunto  $\{p \in M \mid K(p) > 0\}$  es vacío. El resultado se sigue del teorema de Gauss–Bonnet.

Si  $c + H^2 \leq 0$ , se sigue de la ecuación de Gauss que la curvatura de  $M$  es menor o igual que cero y, por el teorema de Gauss–Bonnet, debe ser idénticamente cero.  $\square$

Es conocido que una superficie llana inmersa con curvatura media constante en  $N(0)$  es localmente congruente a un plano o a un cilindro circular recto en  $\mathbb{R}^3$ , en  $N(1)$  a un toro de Clifford, esto es, a un producto de círculos en  $\mathbb{S}^3(1)$  y en  $\mathbb{H}^3(-1)$  a una horosfera o a un tubo alrededor de una geodésica. Además, el operador asociado a la segunda variación del área en este caso es de la forma  $\Delta + 4(c + H^2)$ , con  $c$  la curvatura seccional de la variedad ambiente y  $H$  la curvatura media de la inmersión, de modo que el problema de estabilidad se reduce a calcular los valores propios del laplaciano de un toro que sean menores que  $4(c + H^2)$ .

#### 4. Estabilidad en variedades elípticas

Toda variedad tridimensional completa  $N(1)$  con curvatura constante  $c = 1$  determina un revestimiento Riemanniano finito  $\Pi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow N(1)$  de la esfera unidad  $\mathbb{S}^3(1)$  con su métrica canónica en  $N(1)$ . En particular, el espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^3(1)$  determina un revestimiento de dos hojas. En esta sección obtendremos información sobre superficies estables compactas con curvatura media constante en  $N(1)$  cuando el número de hojas de  $\Pi$  es pequeño.

Necesitaremos el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.15.** *Si  $\psi : M \rightarrow N(1)$  es una inmersión de una superficie compacta y orientable, entonces:*

$$(2.10) \quad \int_M (1 + H^2) dA \geq 4\pi,$$

*y la igualdad se da si y solo si  $M$  es una esfera totalmente umbilical.*

*Más aún, si:*

$$(2.11) \quad \int_M (1 + H^2) dA \leq 8\pi,$$

*entonces la inmersión  $\psi$  es un embebimiento.*

Para demostrar la primera parte del teorema ver [10]. La segunda afirmación se prueba en [50] si  $\int_M (1 + H^2) dA < 8\pi$ . Cuando  $\int_M (1 + H^2) dA = 8\pi$  el resultado se debe esencialmente a Kusner [47]. Puesto que no está explicitamente probado en [47], explicamos brevemente la demostración: si  $\psi$  no es un embebimiento, entonces existe un punto  $p \in \mathbb{S}^3(1)$  tal que  $\psi^{-1}(p)$  contiene exactamente dos puntos, ver [50].

Tomando proyección estereográfica desde el punto  $p$ , transformamos la inmersión  $\psi$  en una superficie minimal completa con curvatura total finita en  $\mathbb{R}^3$  y dos finales planos embebidos, ver [47]. Pero se sigue de [47] que una superficie de este tipo debe ser embebida y, por tanto, sus finales deben ser paralelos. En consecuencia, la función lineal ortogonal a los finales es una función armónica acotada y, por tanto, constante. El resultado se sigue de esta contradicción.

Una superficie compacta de género cero inmersa con curvatura media constante en un espacio elíptico es totalmente umbilical y, por tanto, es estable. Si el género de la superficie es uno el problema de estabilidad está resuelto por el teorema 2.13. Por el teorema 2.4 queda por estudiar el problema de estabilidad cuando el género de la superficie es dos o tres. Algunos de nuestros argumentos son similares a los utilizados en [18], [50], [57] y [97].

**TEOREMA 2.16.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N(1)$  una inmersión estable con curvatura media constante  $H$  de una superficie orientable compacta de género mayor que uno en un espacio elíptico orientado. Entonces:*

- (I)  $(1 + H^2) \text{área}(M) \leq 2\pi$ .
- (II)  $k \geq 3$ .
- (III) *Si  $k = 3$  o  $4$ , la inmersión  $\psi$  es un embebimiento y el morfismo inducido entre los grupos fundamentales  $\psi_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N(1))$  es sobreíctivo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $g$  el género de  $M$ . Es un hecho conocido (ver [27, p. 261]) que existe una función meromorfa no constante  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

$$(2.12) \quad \text{grado}(\phi) \leq 1 + \left[ \frac{g+1}{2} \right],$$

donde  $[x]$  es el mayor número entero menor o igual que  $x$ . Componiendo  $\phi$  con un difeomorfismo conforme de la esfera de Riemann  $\mathbb{S}^2$  podemos suponer, ver [50] o el lema 2.9, que:

$$\int_M \phi \, dA = 0.$$

Utilizando esta función vectorial como función test en la forma índice (2.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 \leq I(\phi) &= \int_M \{|\nabla \phi|^2 - (b^2 - 2K)\} \, dA = \\ &= 8\pi \text{grado}(\phi) - 4 \int_M (1 + H^2) \, dA + 8\pi(1 - g), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que  $\phi$  es una aplicación conforme y el teorema de Gauss–Bonnet. Estimando el grado de  $\phi$  por (2.12) obtenemos:

$$(2.13) \quad \int_M (1 + H^2) \, dA \leq 2\pi \left( 2 - g + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right).$$

Si  $g \geq 4$ , el término de la derecha de la desigualdad anterior es no positivo y esta contradicción prueba la afirmación (i) del teorema 2.4. Si  $g = 2, 3$  obtenemos (i).

Sea  $\bar{M}$  la imagen inversa de  $M$  por medio de la aplicación  $\Pi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow N(1)$ . La superficie  $\bar{M}$  no es necesariamente conexa. Asociada a esta superficie tenemos definida de forma natural una inmersión isométrica  $\bar{\psi} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{S}^3(1)$  y un revestimiento

Riemanniano de  $k$  hojas  $\overline{M} \rightarrow M$ . Como  $\bar{\psi}$  es localmente congruente a  $\psi$  la nueva inmersión tiene también curvatura media constante  $H$ . Utilizando (i) tenemos que:

$$(2.14) \quad \int_{\overline{M}} (1 + H^2) d\overline{A} = k \int_M (1 + H^2) dA \leq 2k\pi.$$

Si  $k \leq 2$ , entonces  $\bar{\psi}$  debería verificar la igualdad en (2.10). Pero claramente se tiene que  $\text{género}(\overline{M}) \geq g > 1$ , y esta contradicción prueba (ii).

Ahora probaremos (iii). Supongamos que  $k \leq 4$ . De (2.10) concluimos que:

$$(2.15) \quad 4\pi \#\{\text{componentes de } \overline{M}\} \leq \int_{\overline{M}} (1 + H^2) d\overline{A} \leq 2k\pi \leq 8\pi.$$

Se sigue entonces que  $\overline{M}$  es conexo: de otro modo  $\overline{M}$  tendría precisamente dos componentes conexas, por el teorema 2.15, cada una de las cuales debería ser una esfera umbilical en  $\mathbb{S}^3(1)$ , y esto es imposible porque  $\text{género}(M) > 0$ . Este hecho es equivalente a la sobreyectividad de la aplicación  $\psi_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N(1))$ . De (2.11) y (2.15) concluimos también que la inmersión  $\psi$  es un embebimiento.  $\square$

Como consecuencia de los resultados anteriores podemos enunciar la solución completa del problema global de estabilidad en el espacio proyectivo real de dimensión tres. Este espacio elíptico es el único cociente de la esfera  $\mathbb{S}^3(1)$  con dos hojas.

**COROLARIO 2.17.** *Sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{RP}^3(1)$  una superficie orientable completa inmersa con curvatura media constante en el espacio proyectivo real. Si la inmersión es estable, entonces o bien:*

- (i)  *$M$  es una superficie compacta de género cero y  $\psi$  es una esfera geodésica embebida o un revestimiento de dos hojas de un plano proyectivo totalmente geodésico, o bien*
- (ii)  *$M$  es una superficie compacta de género uno y  $\psi$  es un tubo llano embebido de radio  $r$ , con  $\pi/6 \leq r \leq \pi/3$ , alrededor de una geodésica.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el teorema 2.4 sabemos que  $M$  es compacta y conexa y que su género es menor o igual que tres. Por el teorema 2.16 sabemos que el género de  $M$  no puede ser dos o tres.

Si  $\text{género}(M) = 0$  entonces  $\psi$  es una inmersión totalmente umbilical y hemos probado (i).

Si  $\text{género}(M) = 1$  entonces, por el corolario 2.14,  $M$  es un toro llano. Es conocido que una inmersión de este tipo debe ser un revestimiento Riemanniano finito de un tubo de radio  $r$ , con  $0 < r < \pi/2$ , alrededor de una geodésica en  $\mathbb{RP}^3(1)$ . Utilizando (2.13) y (2.14) para  $g = 1$  y  $k = 2$  deducimos que  $\psi$  es un embebimiento.

Si  $\overline{T}$  es un tubo de radio  $r$ , con  $0 < r < \pi/2$ , alrededor de una geodésica en  $\mathbb{S}^3(1)$ , entonces  $\overline{T}$  es congruente al embebimiento canónico del toro de Clifford  $\mathbb{S}^1(\cos(r)) \times \mathbb{S}^1(\sin(r)) \subset \mathbb{S}^3(1) \subset \mathbb{R}^4$ , y el operador de Jacobi de esta superficie es  $\Delta + 1/\cos^2 r + 1/\sin^2 r$ . Obtenemos fácilmente que el correspondiente tubo embebido en  $\mathbb{RP}^3(1)$  viene dado desde un punto de vista intrínseco por  $T = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es el retículo en  $\mathbb{R}^2$  generado por los vectores  $(2\pi \cos(r), 0)$  y  $(\pi \cos(r), \pi \sin(r))$ . Como los valores propios del Laplaciano de  $T$  son:

$$\left\{ \frac{m^2}{\cos^2(r)} + \frac{(2n+m)^2}{\sin^2(r)}; n, m \in \mathbb{Z} \right\},$$

el tubo  $T$  es estable si y solo si:

$$\cos(r), \sin(r) \geq 1/2,$$

o, equivalentemente:

$$\pi/6 \leq r \leq \pi/3.$$

□

Como consecuencia de este resultado podemos describir el perfil isoperimétrico de  $\mathbb{RP}^3(1)$ . Sea  $f(V)$  la función que proporciona el perfil isoperimétrico de la esfera  $\mathbb{S}^3(1)$ ; esto es, para cualquier  $V \in (0, 2\pi^2)$ , la función  $f(V)$  denota el área de la esfera geodésica en  $\mathbb{S}^3(1)$  que encierra un volumen  $V$ . Denotemos por  $g(V)$  a la función  $2V^{1/2}(\pi^2 - V)^{1/2}$ . Resolver la ecuación  $f(V) = g(V)$  en el intervalo  $[\pi^2/4, \pi^2/2]$  es equivalente a encontrar los puntos fijos de la función  $f^{-1} \circ g$  en dicho intervalo. Un cálculo directo demuestra que  $|f^{-1} \circ g| < 1$ , de modo que existe al menos un punto fijo de  $f^{-1} \circ g$  (ya que  $f(\pi^2/4) < g(\pi^2/4)$  y  $f(\pi^2/2) > g(\pi^2/2)$ ); entonces  $f^{-1} \circ g([\pi^2/4, \pi^2/2]) \subset [\pi^2/4, \pi^2/2]$  y concluimos, por el teorema del punto fijo de Banach, que existe exactamente una solución de  $f(V) = g(V)$  en  $(\pi^2/4, \pi^2/2)$ . Denotamos esta solución por  $\mu$ . Aproximadamente  $\mu \cong 4,1432835$ . Tenemos entonces lo siguiente:

**TEOREMA 2.18.** *El perfil isoperimétrico de  $\mathbb{RP}^3(1)$  viene dado por:*

$$A(V) = \begin{cases} f(V), & \text{si } 0 < V \leq \mu \\ 2V^{1/2}(\pi^2 - V)^{1/2}, & \text{si } \mu \leq V \leq \pi^2 - \mu \\ f(\pi^2 + V), & \text{si } \pi^2 - \mu \leq V < \pi^2. \end{cases}$$

*En el primer caso la solución del problema isoperimétrico es una bola geodésica, en el segundo la solución es un entorno tubular de una geodésica, y en el último caso es el exterior de una bola geodésica.*

En particular, a partir del conocimiento del perfil isoperimétrico, podemos probar:

**COROLARIO 2.19.** *Sea  $M \subset \mathbb{RP}^3$  una superficie embebida que divide a  $\mathbb{RP}^3$  en dos regiones de igual volumen.*

*Entonces  $\text{área}(M) \geq \pi^2$  y la igualdad se da si y solo si  $M$  es el toro de Clifford.*

## 5. Estabilidad en variedades completas y llanas

Consideramos ahora la variedad llana  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , donde  $S_\theta$  es el subgrupo de isometrías del espacio euclídeo generado por el movimiento helicoidal:

$$(x, y, z) \mapsto (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z + \lambda),$$

con  $\theta \in [0, 2\pi)$  y  $\lambda > 0$ . Queremos encontrar los embebimientos  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/S_\theta$  de superficies estables compactas. Puesto que no existen superficies totalmente geodésicas en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , el teorema 2.5 nos dice que  $M$  debe ser una superficie conexa. Por otra parte, si  $\bar{M}$  es una componente conexa de la imagen inversa de  $M$  en el revestimiento universal  $\mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , y  $\bar{\psi} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es el correspondiente embebimiento propio con curvatura media constante, entonces, o bien  $\bar{M}$  es una superficie compacta y, por el teorema de reflexión de Alexandrov [3],  $\bar{\psi}$  es totalmente umbilical, o bien  $\bar{\psi}$  es un embebimiento propio simplemente periódico contenido en el interior de un cilindro circular recto y, por los resultados de Korevaar, Kusner y Solomon, [46, theorem 2.10],  $\bar{M}$  es una superficie de revolución embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto,

$M$  debe ser un toro y, por el corolario 2.14, es un cociente de un cilindro circular recto cuyo eje ha de ser el del movimiento helicoidal. Con este resultado y unos cálculos sencillos, obtenemos que:

TEOREMA 2.20. *El perfil isoperimétrico de  $\mathbb{R}^3/S_\theta$  viene dado por:*

$$A(V) = \begin{cases} (4\pi)^{1/3}(3V)^{2/3}, & \text{si } 0 < V \leq \frac{4\pi\lambda^3}{3^4} \\ (4\pi\lambda V)^{1/2}, & \text{si } \frac{4\pi\lambda^3}{3^4} \leq V. \end{cases}$$

*En el primer caso el dominio de mínima área que encierra un volumen  $V$  es la bola geodésica y en el segundo la solución es el dominio encerrado por el toro embebido  $(\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{R})/S_\theta$ , para valores adecuados de  $a$ .*

Veamos por último una pequeña mejora del teorema 2.5 en el caso de que la variedad ambiente  $N$  sea completa y llana, y la superficie  $M$  esté embebida en  $N$ . Recordemos que el teorema 2.5 asegura que una inmersión estable  $\psi : M \rightarrow N$  debe ser totalmente geodésica, o que  $M$  debe ser compacta y conexa con  $\text{género}(M) \leq 5$ . Nosotros probamos:

TEOREMA 2.21. *Sea  $M$  una superficie estable embebida en  $N$ . Si el género de  $M$  es cuatro o cinco, o  $M$  es una superficie de Riemann hiperelíptica de género tres, entonces  $N$  es un toro llano tridimensional.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración del teorema 2.6 prueba la existencia de una aplicación antiholomorfa  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  de grado  $1 - g$  en  $M$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$  cuando  $M$  tiene género cuatro o cinco o  $M$  es hiperelíptica de género tres. Además,  $M$  debe ser una superficie minimal y, como el género de  $M$  no es uno,  $M$  no es una superficie totalmente geodésica.

Sea  $\widetilde{M}$  la imagen inversa de  $M$  por el revestimiento  $\mathbb{R}^3 \rightarrow N$ . La superficie  $\widetilde{M}$  es embebida y no es un plano. Por el teorema del semiespacio de Hoffman y Meeks [33],  $\widetilde{M}$  es una superficie conexa. Sea  $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  la aplicación de Gauss de  $\widetilde{M}$ , y sea  $\widetilde{\phi}$  el levantamiento de  $\phi$  a  $\widetilde{M}$ .

Tenemos entonces que  $\nu$  y  $\widetilde{\phi}$  son aplicaciones antiholomorfas que verifican  $|\nabla\nu|^2 = |\nabla\widetilde{\phi}|^2 = -2\widetilde{K}$ . Se demuestra entonces como en [75], que existe una isometría  $A$  de  $\mathbb{S}^2$  tal que  $\nu = A(\widetilde{\phi})$ . Supongamos que  $p \in \widetilde{M}$  y que  $f$  es una transformación del recubrimiento  $\mathbb{R}^3 \rightarrow N$ . Puesto que  $\widetilde{M}$  es invariante por  $f$  y  $\widetilde{\phi}$  es un levantamiento de  $\phi$  se tiene que  $\widetilde{\phi}(p) = \widetilde{\phi}(f(p))$ . Por otra parte, puesto que  $f$  es la restricción a  $\widetilde{M}$  de una isometría de  $\mathbb{R}^3$  que conserva la aplicación de Gauss  $\nu$ , obtenemos que  $\nu(f(p)) = u(\nu(p))$ , donde  $u$  es la parte lineal de  $f$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} (A \circ \widetilde{\phi})(p) &= \nu(p) = u^{-1}(\nu(f(p))) \\ &= u^{-1}(A \circ (\widetilde{\phi} \circ f))(p) = u^{-1}(A(\widetilde{\phi}(p))). \end{aligned}$$

Puesto que esta igualdad es válida para todo  $p \in M$  y  $\phi$  no es constante, obtenemos que  $u$  es la identidad y  $f$  es una traslación. Se sigue que el grupo de transformaciones del revestimiento  $\mathbb{R}^3 \rightarrow N$  consta únicamente de traslaciones y, puesto que  $M$  es una superficie minimal compacta en  $N$  que no es totalmente geodésica, la variedad  $N$  debe ser un toro llano tridimensional.  $\square$

## 6. Comentarios

Parece no existir una generalización del teorema 2.5 para variedades generales con curvatura de Ricci no negativa en el sentido de que cualquier superficie estable sea compacta o totalmente geodésica. El mejor resultado que hemos obtenido hasta este momento es el teorema 2.6.

Los teoremas 2.10 y 2.21 son similares en el sentido de que a partir de una condición sobre la estructura conforme de la superficie estable se obtienen restricciones sobre la variedad ambiente.

No se conocen hasta el momento ejemplos de superficies estables de género dos, aunque de los argumentos expuestos por Frankel [23] parece natural pensar que el espacio dodecaédrico de Poincaré, un espacio elíptico recubierto 120 veces por la esfera  $S^3$ , contiene una escisión de Heegard minimal de género dos, que podría ser estable. Tampoco se conocen hasta ahora ejemplos de superficies estables con género cuatro o cinco. En virtud de los teoremas 2.10 y 2.21 los ejemplos de tales superficies deben buscarse en toros llanos tridimensionales.

Ejemplos de superficies minimales hiperelípticas de género tres y estables han sido encontrados por M. Ross [74], quien ha probado que las clásicas superficies minimales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de Schwarz de género tres en toros llanos tridimensionales son estables. De su resultado cabe esperar que no podamos encontrar una caracterización geométrica sencilla de las superficies estables con género mayor que uno.

En los capítulos 4 y 5 continuaremos el estudio de las superficies estables.

## CAPÍTULO 3

### Superficies minimales con índice uno

En este capítulo estudiamos superficies minimales con índice uno completas y orientables embebidas en variedades llanas, completas y orientables. En la primera sección presentamos resultados ya conocidos, y en la segunda probamos otros que utilizaremos posteriormente. La tercera sección está dedicada al estudio de superficies minimales compactas con índice uno; las consecuencias que obtenemos son similares a los teoremas 2.10 y 2.21 para superficies estables. La última sección está dedicada al estudio de las superficies minimales no compactas con índice uno. El principal resultado es el teorema de clasificación 3.10.

#### 1. Preliminares

Supongamos que  $\psi : M \rightarrow N$  es una inmersión minimal de una superficie orientable en una variedad orientable de dimensión tres. Recordemos que la segunda fórmula de variación del área de una variación normal  $u\nu$ , con  $u \in C^\infty(M)$ , viene dada por:

$$A'' = I(u) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2)u^2\} dA$$

Recordemos también que el índice de la inmersión minimal  $\psi$  se define como el supremo de los índices del operador  $\Delta + \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  sobre los dominios relativamente compactos de  $M$ .

Las superficies minimales con índice cero son mínimos del área para cualquier variación de la superficie y son llamadas a veces superficies estables, aunque en este trabajo hemos reservado este nombre para las inmersiones con curvatura media constante que son mínimos del área para las variaciones que conservan el volumen. Las superficies minimales con índice cero han sido estudiadas por D. Fischer-Colbrie y R. Schoen en el caso de que la curvatura escalar de la variedad ambiente  $N$  sea no negativa. En particular, cuando la curvatura de Ricci es no negativa, obtienen el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.1 ([20, 21]).** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión minimal con índice cero de una superficie orientable completa en una variedad riemanniana orientada de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa.*

*Entonces  $\psi$  es totalmente geodésica y  $\text{Ric}(\nu) \equiv 0$  a lo largo de la inmersión.*

En particular, si  $N = \mathbb{R}^3$ , dicho resultado puede considerarse una extensión del siguiente de do Carmo y Peng [9]:

**TEOREMA 3.2.** *Las únicas superficies minimales completas con índice cero en  $\mathbb{R}^3$  son los planos.*

Las superficies minimales de índice uno aparecen en métodos de tipo minimax como los de Pitts [66], Pitts y Rubinstein [67] y Hass, Pitts y Rubinstein [30]. Para este tipo de superficies se pueden aplicar los resultados de Fischer-Colbrie [20] sobre superficies minimales de índice finito, ver teorema 2.1.

Cuando la superficie minimal tenga aplicación de Gauss  $\phi$ , se tiene que  $|\nabla\phi|^2 = |\sigma|^2 = -2K$ , de modo que el operador asociado a la segunda variación del área se transforma en  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ . En este caso, Fischer-Colbrie [20] ha probado:

**TEOREMA 3.3.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa y orientable inmersa con índice finito en una variedad orientable. Supongamos que existe una aplicación conforme o anticonforme  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ .*

*Entonces el índice de  $M$  coincide con el índice del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en la compactificación conforme  $\bar{M}$  de  $M$ .*

Hacemos notar que el índice del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es invariante por cambios conformes de la métrica de la superficie  $\bar{M}$ .

Los operadores del tipo  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ , con  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación anticonforme definida sobre una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$ , han sido estudiados por Montiel y Ros, quienes han probado:

**TEOREMA 3.4 ([57]).** *Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta,  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación anticonforme. Supongamos que el operador elíptico  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  tiene índice uno.*

*Entonces:*

- (I) *Si  $\eta : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación anticonforme, entonces  $\text{grado}(\phi) \leq \text{grado}(\eta)$ . Si se da la igualdad, entonces existe una transformación de Möbius  $A$  tal que  $\eta = A(\phi)$ .*
- (II) *Si  $\text{género}(M) = 1$ , entonces el índice de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es mayor que uno.*

## 2. Resultados previos

**TEOREMA 3.5.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa y orientable con índice uno inmersa en una variedad orientada tridimensional con curvatura de Ricci no negativa.*

*Entonces  $M$  es conforme a una superficie de Riemann compacta  $\bar{M}$  de género  $g$  menos  $r$  puntos. Además  $g \leq 5$  y se tiene:*

- (I) *Si  $g = 0, 1$ , entonces  $r \leq 4$ ,*
- (II) *si  $g = 2, 3$ , entonces  $r \leq 2$ ,*
- (III) *si  $g = 4, 5$ , entonces  $r = 0$ .*

*Más aún, si se da la igualdad en la columna de la derecha y  $M$  es compacta o  $M$  es una superficie propiamente embebida en una variedad llana y completa, entonces existe una aplicación anticonforme  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos en primer lugar el caso compacto. Sea  $u$  la primera función propia del operador  $\Delta + \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$  en  $M$ . Como  $M$  tiene índice uno, se sigue de la caracterización variacional de los valores propios que  $\int_M \{|\nabla v|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2)v^2\} \geq 0$  para toda función diferenciable  $v$  ortogonal en  $L_2(M)$  a  $u$ .

Sea  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación anticonforme tal que  $|\text{grado}(\phi)|$  es menor o igual que  $1 + [\frac{1+g}{2}]$  en  $M$ , ver [27]. Aplicando el lema 2.9 podemos encontrar una

transformación de Möbius  $F$  de  $\mathbb{S}^2$  tal que  $\int_M (F \circ \phi) u \, dA = 0$ . Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} 8\pi |\text{grado}(F \circ \phi)| &= \int_M |\nabla \phi|^2 \, dA \geq \sum_{i=1}^3 \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) \phi_i^2 \, dA \\ &\geq \int_M -2K = 4\pi(2g - 2), \end{aligned}$$

y, puesto que  $|\text{grado}(F \circ \phi)| = |\text{grado}(\phi)| \leq 1 + [\frac{1+g}{2}]$ , deducimos que  $g \leq 5$ . Si  $g = 4, 5$ , obtenemos la igualdad en todas las desigualdades anteriores. En particular, obtenemos que:

$$\int_M \{|\nabla \phi_i|^2 - (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) \phi_i^2\} \, dA = 0,$$

y que  $|\nabla \phi|^2 = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2 = -2K$ .

Si  $v$  es una función ortogonal  $L_2$  a  $u$ , se tiene que  $\phi_i + tv$  es ortogonal  $L_2$  a  $u$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto,  $I(\phi_i + tv) \geq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y es igual a cero en  $t = 0$ . Derivando dicha función y evaluando en  $t = 0$ , obtenemos que:

$$0 = \int_M \{\langle \phi_i, v \rangle + 2K\phi_i v\} \, dA = \int_M -v(\Delta \phi_i - 2K\phi_i) \, dA,$$

para toda función  $v$  diferenciable y ortogonal  $L_2$  a  $u$ . Por tanto,  $\Delta \phi_i - 2K\phi_i$  es proporcional a  $u$  para  $i = 1, 2, 3$ , y existe un vector  $c \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\Delta \phi - 2K\phi = cu$ . Como  $\phi$  es una aplicación no constante, se sigue que  $c = 0$  y que  $\Delta \phi - 2K\phi = 0$ . Como  $\phi$  verifica la ecuación  $\Delta \phi + |\nabla \phi|^2 = 0$ , deducimos que  $|\nabla \phi|^2 = -2K$ .

Si  $M$  es una superficie no compacta, sabemos por el teorema 2.1 que  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M}$  de género  $g$  menos un número finito de puntos  $p_1, \dots, p_r$ . Como  $M$  tiene índice uno, el trabajo de Fischer–Colbrie [20] nos garantiza la existencia de una función  $u$  en  $L_2(M)$  tal que  $\Delta u + (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2)u + \lambda_1 u = 0$ , con  $\lambda_1 < 0$ , y tal que  $I(v) \geq 0$  para toda función  $v$  diferenciable con soporte compacto que sea ortogonal  $L_2$  a la función  $u$ . Por construcción,  $u$  es diferenciable y positiva.

Sea  $\phi : \overline{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$  una función anticonforme en  $\overline{M}$  tal que  $|\text{grado}(\phi)|$  es menor o igual que  $1 + [\frac{1+g}{2}]$ . Consideremos una sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones diferenciables con soporte compacto contenido en  $M$  tales que:

- (I)  $0 \leq v_n \leq 1$ , y  $v_n \nearrow 1$  puntualmente,
- (II)  $\int_M |\nabla v_n|^2 \rightarrow 0$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , usando el lema 2.9 podemos encontrar una transformación de Möbius  $F_n$  tal que:

$$\int_M (F_n \circ \phi) v_n u \, dA = 0.$$

Como  $(F_n \circ \phi) v_n$  es ortogonal  $L_2$  a  $u$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq I((F_n \circ \phi)v_n) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)v_n|^2 \right\} - \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) v_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 v_n^2 + |\nabla v_n|^2 (F_n \circ \phi_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \langle \nabla(F_n \circ \phi_i), \nabla v_n \rangle \right\} - \int_M (\text{Ric}(\nu) - |\sigma|^2) v_n^2. \end{aligned}$$

De las desigualdades

$$\begin{aligned} |(F_n \circ \phi_i)| &\leq 1, \\ |v_n| &\leq 1, \\ |\langle \nabla(F_n \circ \phi_i), \nabla v_n \rangle| &\leq |\nabla(F_n \circ \phi_i)| |\nabla v_n|, \end{aligned}$$

se sigue que el primer sumando es menor o igual que:

$$(3.1) \quad \sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 + \int_M |\nabla v_n|^2 + \sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)| |\nabla v_n|.$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 = 8\pi |\text{grado}(\phi)|,$$

y que  $\int_M |\nabla v_n|^2 \rightarrow 0$ . Por la desigualdad de Schwarz:

$$\int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)| |\nabla v_n| \leq \left( \int_M |\nabla(F_n \circ \phi_i)|^2 \right)^{1/2} \left( \int_M |\nabla v_n|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Además, por el teorema de la convergencia monótona:

$$\int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2) v_n^2 \rightarrow \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2).$$

De modo que obtenemos a partir de (3.1) que:

$$0 \leq 8\pi |\text{grado}(\phi)| - \int_M (\text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2),$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 8\pi |\text{grado}(\phi)| - \int_M (\text{Ric}(e_1) + \text{Ric}(e_2) - 2K) \\ &\leq 8\pi |\text{grado}(\phi)| - \int_M 2K, \end{aligned}$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal local en  $M$ . Por la desigualdad de Cohn–Vossen  $\int_M K \leq 2\pi(2 - 2g - r)$ , tenemos que:

$$(3.2) \quad 0 \leq 4\pi \left( 4 + 2 \left[ \frac{1+g}{2} \right] - 2g - r \right).$$

De modo que las únicas posibilidades para  $g$  y  $r$  son las enunciadas en el teorema.

Si se da la igualdad, en particular se obtiene la igualdad  $\int_M K = 2\pi(2 - 2g - r)$  en la desigualdad de Cohn–Vossen. Si  $M$  es embebida en una variedad llana  $N$  y se da la igualdad en dicha desigualdad, es conocido a partir de los resultados de clasificación de superficies minimales embebidas [54, 55] que los finales de  $M$  deben ser de tipo Scherk. En este caso, la imagen inversa de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  tiene una aplicación de Gauss  $\nu$ , y la métrica ramificada  $\nu^*ds^2$ , donde  $ds^2$  es la métrica canónica de la esfera, se proyecta a  $M$  y extiende a una métrica ramificada  $ds_0^2$  en  $\bar{M}$ . Dicha métrica tiene área finita y es conforme a la métrica de  $M$ . En dicha métrica, el operador segunda variación del área se escribe  $\Delta_0 + 2$ . Podemos entonces trabajar con dicha métrica como en el caso compacto [51] y deducir que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.6.** *Si  $M$  es una superficie minimal orientable propiamente embebida en una variedad completa, llana y orientable  $N$ , y existe en  $M$  una aplicación anticonforme  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$ , entonces  $N$  es un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo de traslaciones y  $\phi$  es, salvo composición con isometrías de  $\mathbb{R}^3$ , la aplicación de Gauss de  $M$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Similar a la del teorema 2.21.  $\square$

En la demostración del teorema 3.10 necesitaremos el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 3.7.** *Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta de género tres,  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación anticonforme no constante. Supongamos que el índice de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es uno.*

*Entonces  $\text{grado}(\phi) = 2$  y  $M$  es una superficie hiperelíptica.*

**DEMOSTRACIÓN.** En una superficie de Riemann compacta de género tres siempre existe una aplicación anticonforme tal que el módulo del grado es mayor o igual que tres, ver [27]. Por el apartado (i) del teorema 3.4 deducimos que si el índice del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  es uno, entonces  $|\text{grado}(\phi)|$  es dos o tres. Supongamos que  $|\text{grado}(\phi)| = 3$ . Probaremos que existen dos aplicaciones meromorfas en  $M$  de grado tres que no pueden relacionarse por medio de una transformación de Möbius. Aplicando de nuevo el apartado (i) del teorema 3.4 llegaremos a contradicción.

Sean  $\omega$  y  $\alpha$  1-formas holomorfas en  $M$  sin ceros comunes. Entonces  $f = \frac{\omega}{\alpha}$  es una aplicación meromorfa  $M \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  de grado cuatro. Si  $a \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$  es un valor regular para  $f$ , entonces  $f - a$  tiene cuatro ceros simples. Sea  $\omega_1 = \omega - a\alpha$ , y sean  $p_1, \dots, p_4$  los ceros de  $\omega_1$ . Podemos encontrar 1-formas holomorfas  $\omega_2$  y  $\omega_3$  con un cero en  $p_2$  y  $p_3$ , respectivamente. El único cero común de  $\omega_1$  y  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , es  $p_i$ , ya que, en caso contrario,  $\frac{\omega_1}{\omega_i}$  sería una función meromorfa no constante de grado menor o igual que dos y, aplicando de nuevo el apartado (i) del teorema 3.4 llegamos a contradicción.

Es fácil ver entonces que  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  es una base de 1-formas holomorfas en  $M$ .

Las funciones meromorfas  $f = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  y  $g = \frac{\omega_3}{\omega_1}$  tienen grado menor o igual que tres, y es igual a tres por ser el operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  de índice uno. Por el apartado (i) de 3.4, existe una transformación de Möbius  $A = \frac{az+b}{cz+d}$  tal que:

$$f = A(g) = \frac{ag+b}{cg+d},$$

y, por tanto:

$$c\omega_2 \otimes \omega_3 + d\omega_1 \otimes \omega_2 - a\omega_1 \otimes \omega_3 - b\omega_1 \otimes \omega_1 = 0.$$

Evaluando en  $p_1$ , que no es cero de  $\omega_2$  ni de  $\omega_3$  obtenemos que  $c = 0$  y, por tanto, que  $\omega_1 \otimes (-b\omega_1 + d\omega_2 - a\omega_3) = 0$ . Esto implica que  $a = b = d = 0$  porque  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  son linealmente independientes. Por tanto, llegamos a una contradicción que prueba que  $f$  y  $g$  no están relacionados por una transformación de Möbius. En consecuencia, el índice del operador asociado a una aplicación anticonforme de grado tres no puede ser uno.  $\square$

### 3. Superficies minimales compactas

**TEOREMA 3.8.** *Sea  $M$  una superficie minimal compacta y orientable con índice uno embebida en una variedad orientable  $N$  de dimensión tres completa y llana. Supongamos que  $M$  tiene género cuatro o cinco o bien es una superficie hiperelíptica de género tres.*

*Entonces la variedad  $N$  es un toro llano tridimensional.*

**DEMOSTRACIÓN.** En una superficie de Riemann de este tipo podemos encontrar una aplicación anticonforme  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  de grado  $1 - g$ , que podemos suponer es ortogonal  $L_2$  a la primera función propia del operador  $\Delta - 2K$ . Utilizándola como función test en la forma índice obtenemos que  $|\nabla\phi|^2 = -2K$  y concluimos aplicando la proposición 3.6.  $\square$

**TEOREMA 3.9.** *Sea  $\psi : M \rightarrow N$  una inmersión minimal con índice uno de una superficie compacta de género cuatro o cinco o de una superficie hiperelíptica de género tres en una variedad orientable de dimensión tres con curvatura de Ricci no negativa.*

*Existe entonces una inmersión isométrica minimal multivaluada  $\bar{\psi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  con aplicación de Gauss  $\phi$  de modo que las métricas inducidas por ambas inmersiones coinciden y tal que  $|\nabla\phi|^2 = \text{Ric}(\nu) + |\sigma|^2$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Similar a la del teorema 2.10  $\square$

### 4. Superficies minimales no compactas

En este apartado estudiamos superficies minimales no compactas y embebidas con índice uno en variedades llanas. Ejemplos conocidos de tales superficies son la catenoide en  $\mathbb{R}^3$ , ver [51], las superficies simple y doblemente periódicas de Scherk de género cero con cuatro finales y curvatura total  $-4\pi$  [54, 55], y los helicoides con curvatura total mayor o igual que  $-4\pi$ , ver [86].

Si consideramos dos piezas de género cero de la superficie de Scherk simplemente periódica obtenemos una superficie minimal embebida de género uno con cuatro finales y curvatura total  $-8\pi$  cuya representación de Weierstrass viene dada por:

$$w^2 = (z - e^{i\theta})(z + e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(z + e^{-i\theta}), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$g(z, w) = z, \quad \omega(z, w) = \frac{dz}{w^2}.$$

Dicha superficie es invariante por un movimiento helicoidal  $S$  que consiste en una rotación  $R$  de ángulo  $\pi$  y una traslación  $T$  en la dirección del eje del movimiento helicoidal. Las restricciones de tales isometrías a  $M$  vienen dadas, respectivamente, por  $\sigma(z, w) = (-z, -w)$ ,  $\sigma_1(z, w) = (-z, w)$  y  $\theta(z, w) = (z, -w)$ . Las involuciones anticonformes  $h_1(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$  y  $h_2(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w})$  son isometrías intrínsecas que preservan la curvatura de Gauss. La superficie  $M/\sigma$  es una superficie minimal embebida en  $\mathbb{R}^3/S$ . Llamaremos  $\phi$  a su aplicación de Gauss.

Sea  $ds_\phi^2$  la imagen inversa de la métrica de la esfera  $\mathbb{S}^2$  por la aplicación  $\phi$ . Dicha métrica tiene área finita, curvatura constante 1 y se anula en un conjunto discreto de puntos. El operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  se transforma en  $\Delta_\phi + 2$  al calcularlo en la métrica  $ds_\phi^2$ .

Podemos calcular el índice de  $M/\sigma$  como el número de valores propios negativos del operador  $\Delta_\phi + 2$  cuyos subespacios de funciones propias son invariantes por  $\sigma$ . Veamos que no existe una función propia distinta de la primera que sea simétrica y con valor propio negativo.

Es bien conocido, ver [87], que las funciones de valor propio negativo mayor que el primero son antisimétricas con respecto de la involución  $\theta$ . Pero tales funciones son necesariamente simétricas con respecto a  $h_1$  y  $h_2$ , ya que las primeras funciones propias del problema de Dirichlet en el complemento de los puntos fijos de  $h_1$  y  $h_2$  son coordenadas de la aplicación de Gauss, que tienen valor propio cero. Por tanto, las funciones consideradas son antisimétricas respecto de  $\sigma = \sigma_1 \circ \theta = (h_1 \circ h_2) \circ \theta$ , y se sigue que el índice de  $M/\sigma$  es uno.

El principal resultado de clasificación es el siguiente:

**TEOREMA 3.10.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa, orientable y no compacta con índice uno propiamente embebida en una variedad orientable  $N$  de dimensión tres completa y llana.*

*Entonces se tienen las siguientes posibilidades:*

- (I)  $M$  es una catenoide en  $\mathbb{R}^3$ ,
- (II)  $M$  es un helicoide con curvatura total mayor o igual que  $-4\pi$  en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ ,
- (III)  $M$  es una superficie de Scherk de género cero, cuatro finales y curvatura total  $-4\pi$  en  $\mathbb{R}^3/T_v$ ,
- (IV)  $M$  es una superficie de Scherk de género cero, cuatro finales y curvatura total  $-4\pi$  en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ ,
- (V)  $M$  es un toro con dos finales tipo Scherk y curvatura total  $-4\pi$  en una variedad de la clase  $\mathcal{K}$ ,
- (VI)  $M$  es un toro con dos finales y curvatura total en el intervalo  $[-4\pi, -8\pi)$  en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , con  $\theta \in (0, \pi]$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $N = \mathbb{R}^3$ , es conocido que  $M$  debe ser una catenoide, ver [51]. Si  $N$  no es simplemente conexo, entonces  $M$  debe tener un número par de finales, ver [55, th.8]. De esta observación y el teorema 3.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Si } g = 0, 1 &\quad \text{entonces } r = 2, 4, \\ \text{si } g = 2, 3 &\quad \text{entonces } r = 2. \end{aligned}$$

Si  $g = 2$  o  $3$  entonces la forma índice viene dada por la forma cuadrática asociada al operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$ , donde  $\phi$  es una aplicación anticonforme  $M \rightarrow \mathbb{S}^2$  y  $|\nabla\phi|^2 = -2K$  por el teorema 3.5. En este caso,  $M$  debe estar embebida en una variedad del tipo  $\mathbb{R}^3/T_v$  o  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $T_v$  es el subgrupo generado por la traslación en la dirección del vector  $v \neq 0$ , y  $\mathbb{T}^2$  es un toro llano bidimensional. En el caso  $g = 3$  la aplicación anticonforme  $\phi$  tiene grado tres y llegamos a contradicción a partir de la proposición 3.7. Si  $g = 2$  entonces  $M$  no puede estar en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  porque una superficie propiamente embebida y orientable en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  debe tener al menos cuatro finales por el trabajo de Meeks y Rosenberg [55]. Por tanto  $M$  debe estar en  $\mathbb{R}^3/T_v$  y, puesto que  $16\pi = \int_M K = 2\pi\chi(M)$ , concluimos que los dos finales de  $M$  son de tipo Scherk, pero una superficie de este tipo levantaría a  $\mathbb{R}^3$  como

una superficie propiamente embebida contenida en un semiespacio de  $\mathbb{R}^3$ , lo que contradice el teorema del semiespacio de Hoffman y Meeks [34].

El caso  $g = 1$  y  $r = 4$  no es posible por el teorema 3.4.

Si  $g = 0$  y  $r = 4$  entonces  $M$  es embebida en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^3/T_v$  y tiene curvatura total  $-4\pi$ . Se sigue del trabajo de Hofmann y Meeks [33] y Meeks y Rosenberg [54] que  $M$  debe ser una superficie de Scherk, que ya hemos visto que tienen índice uno.

Si  $g = 0$  y  $r = 2$  entonces  $M$  no puede estar en una variedad llana recubierta por  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , porque la imagen inversa de  $M$  en  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  sería una superficie minimal propiamente embebida con solo dos finales, lo que no es posible, ver [54]. Por tanto  $M$  debe estar en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , con  $0 < \theta \leq 2\pi$  y, por el trabajo de Meeks y Rosenberg [55],  $M$  debe ser un helicoide. Además, por el teorema 3.5, tenemos que  $\int_M |K| \leq 4\pi$ .

La única posibilidad que queda es  $g = 1$  y  $r = 2$ . En este caso se tiene que  $\int_M |K| < 8\pi$  a partir del teorema 3.5 y, como antes,  $M$  no puede tener aplicación de Gauss. Si  $M$  está en una variedad de la clase  $\mathcal{K}$  entonces  $M$  puede levantarse como un toro con cuatro finales en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  con curvatura total  $-8\pi$  y se sigue (vi). Si  $M$  está en algún cociente helicoidal de  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\int_M |K| = 2\pi(\chi(M) - W(M)) \leq -4\pi$  y se sigue (v).  $\square$

Como consecuencia del teorema 3.10, obtenemos, para cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones, un resultado completo de clasificación de superficies minimales con índice uno:

### COROLARIO 3.11.

- (i) *Una superficie minimal orientable propiamente embebida en la variedad  $\mathbb{R}^3/T_v$ , donde  $T_v$  es el subgrupo generado por una traslación no trivial en la dirección del vector  $v$ , tiene índice uno si y sólo si  $M$  es un helicoide o está an la familia uniparamétrica de superficies de Scherk simplemente periódicas de género cero y cuatro finales.*
- (ii) *Una superficie minimal orientable propiamente embebida en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{T}^2$  es un toro llano bidimensional, tiene índice uno si y sólo si  $M$  es una superficie de Scherk orientable doblemente periódica de género cero y cuatro finales. Además, en este caso, el retículo que determina el cociente  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  está generado por vectores de la misma longitud.*

## 5. Comentarios

Algunos ejemplos de superficies minimales compactas con índice uno han sido encontrados por M. Ross [74], quien ha probado que las clásicas superficies minimales de Schwarz  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de género tres, así como el giroide de A. Schoen [42] tienen índice uno. También ha demostrado que superficies minimales próximas en retículos próximos deben ser también tener índice uno. En el capítulo 4 se prueba que el espacio de superficies minimales con índice uno en toros llanos tridimensionales es compacto. Hasta ahora, no se conoce la existencia de superficies minimales de índices cuatro o cinco en toros llanos de dimensión tres.

El ejemplo previo al teorema 3.10 prueba que existen toros minimales con dos finales e índice uno en variedades llanas. Sin embargo, los cocientes de superficies de Scherk doblemente periódicas en variedades en la clase  $\mathcal{K}$  no tienen índice uno. Consideremos las superficies de Scherk doblemente periódicas cuya representación

de Weierstrass es:

$$w^2 = (z - e^{i\theta})(z + e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(z + e^{-i\theta}), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$g(z, w) = z, \quad \omega(z, w) = \frac{i dz}{w^2}.$$

Cada una de estas superficies es invariante por un movimiento helicoidal  $S$  consistente en una rotación  $R$  de ángulo  $\pi$  seguida de una traslación  $T$  en la dirección del eje del movimiento helicoidal, cuya restricción a  $M$  viene dada por  $\sigma(z, w) = (1/z, -w/z)$ . La tercera coordenada de la aplicación de Gauss  $\phi$  es  $\phi_3 = (-1 + |z|^2)/(1 + |z|^2)$ , que es una función propia de valor propio cero del operador asociado a la segunda variación del área  $\Delta_\phi + 2$  antiinvariante por  $\sigma$ . El conjunto nodal de  $\phi_3$  tiene cuatro componentes  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , tales que  $\sigma(\Omega_1) = \Omega_2$  y  $\sigma(\Omega_3) = \Omega_4$ . Llamemos  $u_1$  y  $u_3$  a las restricciones de  $\phi_3$  a  $\Omega_1$  y  $\Omega_3$ , respectivamente. Si el índice de  $M/\sigma$  es uno, entonces el segundo valor propio del operador  $\Delta_\phi + 2$  es mayor o igual que cero. Las funciones  $u_1$  y  $u_3$  se pueden proyectar a  $M/\sigma$  y, puesto que sus soportes son disjuntos, una combinación lineal  $u$  de ambas es ortogonal a la primera función propia. Esto implica que  $u$  es una función propia del operador  $\Delta_\phi + 2$  cuyo valor propio es 0. Pero  $u$  no puede ser una función diferenciable, puesto que su levantamiento a  $M$  es una función simétrica con respecto a  $\sigma$  que coincide en  $\Omega_1$  con un múltiplo de  $\phi_3$ . Por continuación única, ambas funciones coinciden en  $M$ , lo que es imposible, ya que  $\phi_3$  es antisimétrica con respecto a  $\sigma$ .

Las superficies helicoidales obtenidas por Karcher a partir de las superficies de Scherk [44] pueden considerarse como toros con dos finales helicoidales en un cociente adecuado de  $\mathbb{R}^3$  por un movimiento helicoidal. Sin embargo, no sabemos si su índice es uno.



## CAPÍTULO 4

# Compacidad de superficies estables y embebidas

Recordemos que el teorema 2.5 demuestra que una inmersión estable de una superficie completa y orientable  $M$  en una variedad llana, completa y orientable debe ser totalmente geodésica, o bien la superficie  $M$  debe ser compacta y conexa y el género de  $M$  debe ser menor o igual que cinco. Por tanto, las únicas superficies estables no compactas son cocientes de planos de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $M$  es una superficie compacta de género cero, entonces es totalmente umbilical y estable. Si el género de  $M$  es uno, se ha probado en el corolario 2.14 que  $M$  debe ser llana y, por tanto, un tubo alrededor de una geodésica cerrada en la variedad ambiente o un toro totalmente geodésico.

En este capítulo continuamos con el estudio de las superficies estables en variedades llanas, completas y orientables. Cuando el género de la superficie  $M$  es mayor que uno no debemos esperar una caracterización geométrica tan sencilla como en los casos de género más bajo. M. Ross [74] ha probado que las clásicas superficies  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de Schwarz de género tres son estables, así como todas las superficies minimaes próximas a estas en una cierta familia. Hasta ahora no conocemos ejemplos de superficies estables con género dos, cuatro o cinco.

Continuando con este estudio, demostramos un resultado de compacidad para superficies estables embebidas de género mayor que uno en variedades llanas, completas y orientables. Concretamente, si  $M_k \subset N_k$  es una sucesión de estas variedades, y la aplicación entre grupos fundamentales es sobreyectiva, entonces podemos extraer una subsucesión convergente tanto de las superficies como de las variedades ambiente a una superficie estable embebida en la variedad límite. Cuando las variedades ambiente son  $\mathbb{T}_k^2 \times \mathbb{R}$ , entonces probamos que la aplicación entre grupos fundamentales siempre es sobreyectiva y, por tanto, podemos aplicar el resultado anterior.

Fijando el ambiente  $N$ , podemos suprimir la hipótesis sobre el grupo fundamental para concluir que una subsucesión de las superficies converge, bien a una superficie estable orientable embebida o bien a una superficie minimal no orientable embebida que minimiza el área para cualquier variación. En particular, deducimos que existe un número finito de clases de homotopía de superficies estables compactas y embebidas en  $N$ .

Como consecuencia de estos resultados, damos aplicaciones al problema isoperimétrico en variedades llanas.

### 1. Preliminares

En este capítulo utilizaremos un conocido resultado de convergencia para una sucesión de superficies propiamente embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  que puede encontrarse, por ejemplo, en [46] o [93].

TEOREMA 4.1. *Sea  $M_n \subset \mathbb{R}^3$  una sucesión de superficies propiamente embebidas con curvatura media constante tales que  $|\sigma_n| < C$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y satisfacen cotas locales uniformes de área.*

*Entonces, o bien la sucesión  $M_n$  no tiene puntos de acumulación, o bien podemos extraer una subsucesión convergente en la topología  $C^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a una superficie propiamente embebida con curvatura media constante  $M$ .*

Decimos que una sucesión de superficies  $M_n$  sin borde satisface *cotas locales uniformes de área* si existe un radio  $r$  tal que, para toda bola  $B_r$ , se tiene que  $\text{area}(M_n \cap B_r) < C$ , con  $C$  independiente de  $n$ .

La convergencia  $C^k$  significa que, en un entorno en  $\mathbb{R}^3$  de cada punto  $p \in M$  y para  $n$  suficientemente grande, cada  $M_n$  es un grafo sobre un disco fijo  $D \subset T_p M$  y los grafos de  $M_n$  convergen en la topología usual  $C^k$  de funciones al grafo de  $M$ .

El límite de una sucesión de superficies embebidas solo puede tener autointersecciones tangenciales. Diremos que una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *débilmente embebida* si solamente presenta autointersecciones tangenciales.

Toda variedad completa y llana es un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto  $G$  del grupo  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  de isometrías afines de  $\mathbb{R}^3$  actuando propia y discontinuamente en  $\mathbb{R}^3$ . Estamos interesados en variedades orientables y, puesto que este hecho es equivalente a que todas las isometrías de  $G$  conserven la orientación, consideramos el conjunto  $\mathcal{G}$  de subgrupos discretos de isometrías que actúan propia y discontinuamente en  $\mathbb{R}^3$  que conservan la orientación. Para todo  $G \in \mathcal{G}$  denotaremos por  $\Gamma(G)$  al subgrupo de traslaciones de  $G$  y por  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G)$  al radio de inyectividad de la variedad cociente  $\mathbb{R}^3/G$ . El siguiente lema se sigue directamente de los resultados de Wolf [94].

#### LEMA 4.2.

- (i) *Si  $G \in \mathcal{G}$  entonces el subgrupo  $\Gamma(G)$  es un grupo abeliano libre sin torsión, normal en  $G$ , y tal que  $\text{rango}(\Gamma(G)) \leq 3$ . El grupo  $G$  es cíclico si solo si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 0, 1$ . Si el rango de  $\Gamma(G)$  es 2, 3 entonces  $\text{orden}(G/\Gamma(G)) \leq 6$ .*
- (ii) *El conjunto  $\{G \in \mathcal{G} : \text{rango}(\Gamma(G)) \geq 2\}$  contiene un número finito de clases afines de conjugación.*
- (iii) *Sean  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}, G \in \mathcal{G}$  tales que  $G_n \rightarrow G$  ( $G$  es el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión en  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$ ). Si  $\text{rango}(\Gamma(G_n)) \geq 2$  entonces  $\Gamma(G_n)$  converge a  $\Gamma(G)$  y además  $\text{rango}(\Gamma(G)) \leq \liminf \text{rango}(\Gamma(G_n))$ .*
- (iv) *Sea  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  contenida en una clase afín de conjugación en  $\mathcal{G}$ , y  $G \in \mathcal{G}$  el límite de la sucesión  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = \text{rango}(\Gamma(G_n))$ , entonces  $G$  está en la misma clase afín de conjugación que los elementos de  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Por tanto, existe una sucesión de transformaciones afines de  $\mathbb{R}^3$  que convergen a la identidad que inducen difeomorfismos entre  $\mathbb{R}^3/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$ .*
- (v) *Sea  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$  tal que  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n)$  está acotado inferiormente por una constante positiva. Entonces podemos extraer una subsucesión convergente a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$ .*

Describiremos brevemente los subgrupos  $G \in \mathcal{G}$  salvo conjugación afín, es decir, los posibles tipos de variedades llanas y completas afínmente difeomorfas [94].

Si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 0, 1$  entonces  $G = \{\text{Id}\}$  o  $G = S_\theta$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$ , donde  $S_\theta$  es el subgrupo generado por un movimiento helicoidal compuesto de una rotación

de ángulo  $\theta$  seguido de una traslación no trivial en la dirección del eje de rotación. Hacemos notar que en este caso las posibles clases afines de conjugación están parametrizadas por  $\theta$ .

Si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 2$ , entonces existen dos clases afines de conjugación: o bien  $G$  está generado por dos traslaciones independientes y el cociente  $\mathbb{R}^3/G$  es el producto riemanniano  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{T}^2$  es un toro llano bidimensional, o  $G$  está generado por un movimiento helicoidal de ángulo  $\pi$  y una traslación ortogonal al eje del movimiento helicoidal. Denotaremos esta clase de variedades cociente por  $\mathcal{K}$ . Cada variedad en  $\mathcal{K}$  admite un revestimiento de dos hojas por una variedad  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{T}^2$  es un cociente de  $\mathbb{R}^2$  por un retículo generado por vectores ortogonales.

Las variedades anteriores describen todos los tipos de variedades afínmente difeomorfas no compactas.

Finalmente, si  $\text{rango}(\Gamma(G)) = 3$ , entonces o bien  $G$  contiene solamente traslaciones y  $\mathbb{R}^3/G$  es un toro llano tridimensional o  $G$  contiene movimientos helicoidales con ángulo distinto de cero y  $\mathbb{R}^3/\Gamma(G) \rightarrow \mathbb{R}^3/G$  es un revestimiento riemanniano con seis hojas como máximo. Este tipo de grupos determina cinco clases afines diferentes de difeomorfismos.

Ahora daremos unas restricciones a la existencia de superficies compactas con curvatura media constante embebidas en variedades llanas, completas y orientables no compactas de dimensión tres, que se obtienen a partir del principio de reflexión de Alexandrov [3]:

TEOREMA 4.3.

- (I) *La única superficie compacta y conexa embebida con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  es la esfera totalmente umbilical.*
- (II) *La únicas superficies compactas y conexas embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$  son cocientes de superficies de Delaunay invariantes por  $S_\theta$ .*
- (III) *Cualquier superficie compacta y conexa no totalmente geodésica embebida con curvatura media constante en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  es orientable y simétrica con respecto a un toro totalmente geodésico.*

Fijando el género de la superficie obtenemos otro tipo de restricciones. Diremos que una superficie  $M$  embebida en una variedad llana  $N_1$  de dimensión tres *levanta* a otra variedad llana  $N_2$  si existe un revestimiento riemanniano  $\Pi : N_2 \rightarrow N_1$  y un embebimiento isométrico  $i : M \rightarrow N_2$  tal que  $\Pi \circ i$  coincide con la inclusión  $M \rightarrow N_1$ . Esto es equivalente a que  $i_*(\pi_1(M)) \subset \Pi_*(\pi_1(N_2))$ .

TEOREMA 4.4. *Sea  $M$  una superficie compacta y orientable no totalmente geodésica embebida con curvatura media constante en una variedad llana, completa y orientable  $N$  de dimensión tres. Entonces:*

- (I) *Si el género de  $M$  es cero, entonces  $M$  levanta como una esfera totalmente umbilical a  $\mathbb{R}^3$ .*
- (II) *Si el género de  $M$  es uno, entonces  $M$  levanta a un cociente de una superficie de Delaunay en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ .*

DEMOSTRACIÓN. En el caso de género cero  $M$  puede levantarse a  $\mathbb{R}^3$  y concluimos el resultado del teorema de Alexandrov [3]. Supongamos que el género de  $M$  es uno. Entonces  $M$  no puede ser una superficie minimal, ya que entonces sería totalmente geodésica. Por el lema 4.7, que demostraremos en la siguiente sección,

la superficie  $M$  separa a la variedad  $N$ . Denotemos por  $\Omega$  la clausura de la componente de  $N \setminus M$  hacia la que apunta el vector curvatura media. Sabemos por los resultados de Meeks, Simon y Yau [56] que  $\Omega$  es un toro macizo. Como la inclusión  $i : M \rightarrow N$  factoriza a través de  $\Omega$  y la inclusión  $M \rightarrow \Omega$  induce un morfismo sobreyectivo entre los grupos fundamentales, concluimos que  $i_*(\pi_1(M))$  coincide con la imagen del morfismo  $\pi_1(\Omega) \rightarrow \pi_1(N)$  y, por tanto,  $i_*(\pi_1(M))$  tiene un generador. Se sigue que  $i_*(\pi_1(M))$  es un subgrupo cíclico, que es no trivial, porque entonces  $M$  levantaría como una esfera totalmente umbilical a  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto  $M$  levanta a  $\mathbb{R}^3/S_\theta$  y (ii) es consecuencia del apartado (ii) del teorema 4.3.  $\square$

## 2. Cotas locales del área y un resultado de convergencia

Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie propiamente embebida no necesariamente conexa que es invariante por un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$ . El cociente  $M/G$  es una superficie riemanniana propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3/G$ . Supondremos que  $M/G$  es orientable, lo que es equivalente a que todos los elementos de  $G$  conserven la orientación al restringirlos a  $M$ . Elegimos una orientación de  $M/G$  y consideramos en  $M$  el levantamiento de esta orientación, que determina una aplicación de Gauss  $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  que es equivariante por  $G$ .

El hecho de que  $M/G$  separe a  $\mathbb{R}^3/G$  es equivalente a que  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  sea la unión disjunta de dos conjuntos  $G$ -invariantes. Cada uno de estos conjuntos, que no son necesariamente conexos, tiene a  $M$  como frontera, y el vector normal  $\nu$ , equivariante por  $G$ , apunta hacia una de las componentes.

Puesto que  $M$  es la imagen inversa de  $M/G$  por el revestimiento  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ , la superficie  $M$  es conexa si y solo si el morfismo inducido entre los grupos fundamentales  $\pi_1(M/G) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3/G)$  inducido por la inclusión es sobreyectivo.

Comenzamos esta sección con una generalización de un resultado válido para superficies convexas. Un clásico teorema de Blaschke garantiza que una esfera de radio  $R > 0$  puede “rodar” por el interior de una superficie convexa cuyas curvaturas principales sean menores que  $1/R$  y por el exterior de una superficie convexa cuyas curvaturas principales sean mayores que  $R$ . Si reemplazamos la hipótesis de convexidad de la superficie por la de no negatividad de la curvatura media obtenemos un resultado análogo al del teorema de Blaschke en la cara de la superficie hacia la que apunta el vector curvatura media.

**TEOREMA 4.5** (Teorema de Blaschke para  $H \geq 0$ ). *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie embebida no totalmente geodésica, invariante por un grupo  $G \in \mathcal{G}$  tal que  $M/G$  es una superficie orientable compacta y conexa que separa a  $\mathbb{R}^3/G$ . Sea  $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  el vector normal  $G$ -equivariante. Supongamos que la curvatura media es no negativa. Si:*

$$c = c(M) = 1 / \max \{ \text{curvaturas principales positivas de } M \}.$$

*y denotamos por  $F : M \times [0, c) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a la aplicación exponencial normal dada por:*

$$(p, t) \in M \times [0, c) \longmapsto p + t\nu(p).$$

*Entonces tenemos que  $F$  es un difeomorfismo local inyectivo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Denotemos por  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  a la inclusión. Es claro de la definición de  $c$  y de la compacidad de  $M/G$  que  $0 < c < \infty$ , que  $F$  es un difeomorfismo local y que la restricción de  $F$  a  $M \times [0, \varepsilon)$  es inyectiva para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.

Para  $0 \leq t < c$  la superficie paralela determinada por  $\psi_t = F(-, t) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene curvatura media dada por:

$$2H_t = \frac{k_1}{1-tk_1} + \frac{k_2}{1-tk_2} = \frac{2H - 2tK}{(1-tk_1)(1-tk_2)},$$

donde  $k_i$ ,  $H$  y  $K$  son las curvaturas principales, la curvatura media y la curvatura de Gauss de  $\psi$ .

Como  $H^2 \geq K$  y la igualdad solo se da en los puntos umbílicos, se tiene que:

$$2H_t \geq \frac{2H(1-tH)}{(1-tk_1)(1-tk_2)} \geq 0.$$

Más aún,  $H_t = 0$  en algún punto implica que el punto es llano para el embebimiento  $\psi$ .

Sea  $t_0 = \sup\{t > 0; F : M \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ es inyectiva}\}$ . Vamos a probar el teorema razonando por contradicción. Supongamos que  $t_0 < c$ . Entonces existen dos puntos distintos en  $M \times [0, t_0]$  con la misma imagen por  $F$ . Estos puntos están necesariamente en la frontera de  $M \times [0, t_0]$ , y no pueden estar ambos en  $M \times \{0\}$  porque  $\psi$  es un embebimiento. Estudiamos ahora las restantes posibilidades.

Si  $F(p, t_0) = F(q, t_0)$  para  $p$  y  $q$  distintos, entonces la inmersión  $\psi_{t_0}$  tiene un contacto tangencial en esos puntos. Como el vector normal a una inmersión coincide con el de sus superficies paralelas, concluimos que  $\nu(p)$  y  $\nu(q)$  son proporcionales. Si  $\nu(p) = \nu(q)$  entonces se sigue de la definición de  $F$  que  $\psi(p) = \psi(q)$ , lo que no es posible porque  $\psi$  es un embebimiento. Por tanto  $\nu(p) = -\nu(q)$  y, como  $H_{t_0} \geq 0$ , una aplicación del principio del máximo, [80], demuestra que existen entornos de  $p$  y  $q$  en  $M$  con  $H_{t_0} \equiv 0$  que tienen la misma imagen por la inmersión  $\psi_{t_0}$ . Esto implica que  $\psi$  es totalmente geodésica en estos entornos y, por un argumento de conexión en  $M/G$  y ser  $M$  una superficie  $G$ -invariante, tenemos que  $\sigma \equiv 0$  en  $M$ , lo que contradice nuestras hipótesis sobre  $M$ .

Si  $F(p, 0) = F(q, t_0)$  para dos puntos arbitrarios en  $M$ , entonces las inmersiones  $\psi$  y  $\psi_{t_0}$  tienen un contacto en esos puntos y, por tanto, los vectores normales a  $\psi$  en  $p$ ,  $\nu(p)$ , y a  $\psi_{t_0}$  en  $q$ ,  $\nu(q)$ , son proporcionales. El segmento  $t \mapsto q + t\nu(q)$ , con  $t \in [0, t_0]$ , corta a  $M$  ortogonalmente en sus puntos extremos  $q$  y  $p$ , no corta a  $M$  en su interior, y deja a  $q$  en la dirección de  $\nu(q)$ . Puesto que  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  es la unión de dos conjuntos abiertos  $G$ -invariantes, se sigue que este segmento está contenido en la región  $G$ -invariante de  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  hacia la que apunta el normal  $\nu$ . En particular,  $\nu(p) = -\nu(q)$ . Se sigue entonces de la expresión de  $F$  que  $F(p, \frac{t_0}{2}) = F(q, \frac{t_0}{2})$ , lo que no es posible por la definición de  $t_0$ .  $\square$

**COROLARIO 4.6.** *Con las mismas hipótesis del teorema 4.5, si  $M/G$  no es un toro y  $G$  no es cíclico entonces  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G) \geq c(M)/6$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $G$  no es cíclico tenemos que el orden de  $(G/\Gamma(G)$  es menor o igual que 6 por el lema 4.2 y concluimos que  $M/\Gamma(G)$  es una superficie compacta de género distinto de uno. Como la aplicación de Gauss  $\nu$  de  $M$  se puede inducir en el cociente  $M/\Gamma(G)$ , se sigue del teorema de Gauss–Bonnet que  $\nu$  es sobreyectiva. Sean ahora  $v \in \Gamma(G) \setminus \{0\}$ , y  $p \in M$  tal que el vector normal  $\nu(p)$  es  $v/|v|$ . Como  $M$  es invariante por la traslación de vector  $v$ , tenemos que  $q = p + v$  está en  $M$  y, por tanto,  $F(p, |v|) = F(q, 0)$ . Se sigue entonces del teorema 4.3 que  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/\Gamma(G)) \geq c$ . En consecuencia  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G) \geq \frac{c}{d}$ , donde  $d \leq 6$  es el número de hojas del revestimiento  $\mathbb{R}^3/\Gamma(G) \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ , lo que demuestra el corolario.  $\square$

Queremos aplicar el teorema 4.5 cuando la curvatura media de  $M$  sea constante. En este caso la hipótesis de separación se sigue de las otras hipótesis como se demuestra en el siguiente lema:

**LEMA 4.7.** *Una superficie orientable, compacta y conexa, no totalmente geodésica, embebida con curvatura media constante en una variedad llana, completa y orientable de dimensión tres separa a la variedad ambiente en dos componentes conexas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathbb{R}^3/G$ , con  $G \in \mathcal{G}$ , una variedad llana, completa y orientable de dimensión tres, y  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3/G$  una superficie orientable, compacta y conexa, no totalmente geodésica, embebida con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3/G$ . Sea  $M$  la imagen inversa de  $\widetilde{M}$  por la aplicación  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ .

Supongamos que  $\mathbb{R}^3/G \setminus \widetilde{M}$  es conexo. Existe entonces una curva cerrada simple  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3/G$  que corta ortogonalmente a  $M$  en un único punto, de modo que el número de intersección  $\#(\widetilde{M} \cap \gamma)$  de  $\gamma$  y  $\widetilde{M}$  es  $\pm 1$ .

La curva  $\gamma$  no puede ser homótopa, en  $\mathbb{R}^3/G$ , a una curva contenida en  $\widetilde{M}$ , ya que entonces  $\#(\widetilde{M} \cap \gamma) = 0$ . En particular, el morfismo entre los grupos fundamentales inducido por la inclusión  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3/G$  no puede ser sobreíectivo. Se sigue que  $M$  no es conexa. Además, si  $\alpha$  es un levantamiento de  $\gamma$  a  $\mathbb{R}^3$  cuyo origen está en una componente conexa  $M_1$  de  $M$ , su extremo está en otra componente conexa  $M_2$  de  $M$ .

Como  $M_1, M_2$  son superficies propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$ , separan a  $\mathbb{R}^3$ . Existe una componente conexa de  $\mathbb{R}^3 \setminus (M_1 \cup M_2)$  cuya frontera es  $M_1 \cup M_2$ . La curva  $\alpha$  menos sus puntos extremos está contenida en  $\Omega$  ya que sólo corta a  $M$  en dichos puntos. Como  $\widetilde{M}$  es orientable, la orientación inducida en  $M$  determina una aplicación de Gauss  $\nu$  que es  $G$ -equivariante y podemos suponer, por medio de un cambio de orientación si es necesario, que  $\alpha'(0) = \nu(\alpha(0))$ . Utilizando que  $\nu$  es  $G$ -equivariante, obtenemos que  $\alpha'(\ell) = \nu(\alpha(0))$  y, por tanto, el vector normal  $\nu$  apunta hacia  $\Omega$  en  $M_1$  y fuera de  $\Omega$  en  $M_2$ .

Sean  $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$  puntos de mínima distancia, que existen por la periodicidad de las superficies y la compacidad de  $\widetilde{M}$ . La geodésica minimizante que une  $p_1$  y  $p_2$  está contenida en  $\Omega$  y las superficies  $M_2$  y  $(p_2 - p_1) + M_1$  se cortan tangencialmente en  $p_2$  con el mismo vector normal y la misma curvatura media constante. Se sigue del principio del máximo que  $M_2 = (p_2 - p_1) + M_1$  y, por tanto, los pares de puntos  $q \in M_1, q' = q + (p_2 - p_1)$  son puntos de mínima distancia. Por tanto, los vectores normales a  $M_1$  y  $M_2$  son proporcionales a  $p_2 - p_1$  y concluimos que  $M_1$  y  $M_2$  son planos paralelos en  $\mathbb{R}^3$ . Esto contradice nuestras hipótesis sobre  $M$  y prueba el lema.  $\square$

Para superficies minimales obtenemos un resultado aún mejor.

**COROLARIO 4.8** (Teorema de Blaschke para  $H = 0$ ). *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie minimal embebida no totalmente geodésica invariante por un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$  tal que  $M/G$  es una superficie compacta y orientable.*

*Entonces  $M$  tiene un entorno tubular embebido de radio:*

$$c = c(M) = 1 / \max \{ \text{curvaturas principales positivas de } M \},$$

*es decir, la aplicación exponencial normal  $F : M \times (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un difeomorfismo local inyectivo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por ser  $M$  minimal y  $M/G$  compacta, concluimos utilizando el principio del máximo que  $M$  es conexa y, por tanto, que  $M/G$  es conexa. La orientabilidad de  $M/G$  y la conexión de  $M$  implican que  $M/G$  separa a  $\mathbb{R}^3/G$ . Por tanto, si  $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación de Gauss  $G$ -equivariante, tanto  $\nu$  como  $-\nu$  están en las hipótesis del teorema 4.3 y los “semientornos tubulares” están contenidos en diferentes componentes  $G$ -invariantes de  $\mathbb{R}^3 \setminus M$ .  $\square$

**TEOREMA 4.9** (Cotas locales del área). *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie embebida no totalmente geodésica con curvatura media no negativa invariante por un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$  tal que  $M/G$  es una superficie compacta orientable que separa a  $\mathbb{R}^3/G$ . Supongamos que la segunda forma fundamental de  $M$  es uniformemente acotada,  $|\sigma| < C$ .*

*Entonces, para todo  $R$  tal que  $0 < R \leq \frac{1}{C}$ , tenemos que:*

$$\text{área}(M_R) \leq 36\pi R^2,$$

*donde  $M_R = M \cap B_R$ , y  $B_R$  es una bola euclídea de radio  $R$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideraremos la aplicación exponencial normal

$$F : M \times [0, c(M)) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

que es un difeomorfismo local inyectivo por el teorema 4.5. Se sigue fácilmente que  $\frac{R}{2} < c(M)$  y, por tanto,  $F$  aplica  $M_R \times [0, \frac{R}{2})$  inyectivamente sobre una región  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^3$ . Por la fórmula de cambio de variables

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^{R/2} \left\{ \int_{M_R} (1 - t k_1)(1 - t k_2) dA \right\} dt,$$

donde  $k_i$  son las curvaturas principales de  $M$  y  $(1 - t k_1)(1 - t k_2)$  es el Jacobiano de la aplicación  $F$ . Puesto que  $0 \leq t \leq \frac{R}{2}$  y  $k_1, k_2 \leq C$  tenemos que el volumen de  $\Omega$  es mayor o igual que:

$$\int_0^{R/2} \left\{ \int_{M_R} \left(1 - \frac{R}{2} C\right)^2 dA \right\} dt.$$

Como  $\frac{R}{2} C \leq \frac{1}{2}$ , la última integral es menor o igual que:

$$\int_0^{R/2} \int_{M_R} \frac{1}{4} dA = \frac{R}{8} \text{área}(M_R),$$

y concluimos que  $\text{vol}(\Omega) \geq \frac{R}{8} \text{área}(M_R)$ .

El teorema se sigue del hecho de que  $\Omega$  está contenida en una bola euclídea de radio  $\frac{3}{2}R$  y, por tanto,  $\text{vol}(\Omega) \leq \frac{9}{2}\pi R^3$ . Para comprobar esto, tomamos  $p \in \Omega$ . Entonces  $d(p, M_R) < \frac{R}{2}$  y la distancia entre el centro de  $B_R$  y  $p$  es menor que  $\frac{3}{2}R$ .  $\square$

**Nota.** Utilizando la misma idea podemos estimar el volumen de la región  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^3/G \setminus M/G$  que es la proyección de la región  $G$ -invariante de  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  hacia la que apunta el vector curvatura media, y obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &\geq \int_0^{c(M)} \left\{ \int_{M/G} (1 - tk_1)(1 - tk_2) dA \right\} dt = \\ &= c(M) \text{área}(M/G) - c(M)^2 \int_{M/G} H dA + \frac{c(M)^3}{3} 2\pi \chi(M). \end{aligned}$$

Recordemos que el lema 4.2 y el teorema 4.3 implican que si una variedad llana  $\mathbb{R}^3/G$ , con  $G \in \mathcal{G}$ , admite una superficie compacta y orientable embebida con curvatura media constante y género mayor que uno, entonces  $\text{rango}(\Gamma(G)) \geq 2$ , es decir,  $G$  no es cíclico. En particular, tales grupos  $G$  determinan un número finito de clases afines de conjugación. Antes de demostrar el principal resultado de convergencia necesitaremos el siguiente lema:

**LEMA 4.10.** *Sea  $\mathcal{A}$  una clase afín de conjugación de subgrupos en  $\mathcal{G}$ . Consideremos una sucesión  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de superficies conexas embebidas en  $\mathbb{R}^3$  tales que la superficie  $M_n$  es  $G_n$ -invariante para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $M_n/G_n$  son superficies compactas. Supongamos que  $G_n \rightarrow G \in \mathcal{G}$  y que  $M_n$  converge a una superficie propiamente inmersa  $M$  que es invariante por  $G$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $M/G$  es compacta.*

*Entonces  $G \in \mathcal{A}$  y  $\mathbb{R}^3/G_n$  es afinamente difeomorfo a  $\mathbb{R}^3/G$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Llamemos  $\Gamma$  a  $\Gamma(G)$ . Por el lema 4.2 tenemos que  $\Gamma(G_n) \rightarrow \Gamma$  y, puesto que  $\text{orden}(G_n/\Gamma(G_n)) \leq 6$ , se sigue que  $\text{orden}(G/\Gamma(G)) \leq 6$  y, por tanto,  $M/\Gamma$  es compacta.

De nuevo por el lema 4.2 es suficiente probar que el rango de  $\Gamma$  y el de  $\Gamma_n$  coinciden. Supongamos, razonando por contradicción, que  $\text{rango}(\Gamma) < \text{rango}(\Gamma_n)$ .

Sea  $\{w^i\}_{i \in I}$  un base de  $\Gamma$  y  $V$  el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  generado por  $\{w^i\}_{i \in I}$ . Tenemos que  $\dim(V) < \text{rango}(\Gamma(G_n)) \leq 3$ . Tomemos vectores  $w_n^i \in \Gamma(G_n)$  que converjan a los vectores  $w^i$  y llamemos  $V_n$  al espacio vectorial generado por  $\{w_n^i\}_{i \in I}$ . Estos vectores generan un subgrupo discreto  $\Gamma'_n$  tal que  $V_n/\Gamma'_n$  es compacto. Sea  $S_n(r)$ , con  $r > 0$ , la esfera centrada en el origen de radio  $r$  en el subespacio  $V_n^\perp$  ortogonal a  $V_n$ . Supongamos que  $M$  contiene el origen de  $\mathbb{R}^3$ . Puesto que  $\text{rango}(\Gamma(G_n)) > \dim(V_n)$ , tenemos que  $\Gamma(G_n) \not\subset V_n$  y, por ser  $M_n$  conexo y  $\Gamma(G_n)$ -invariante, concluimos que las superficies  $M_n$  cortan a  $S_n(r) \times V_n$  para todo  $r > 0$ .

Moviendo estos puntos por medio de los vectores en  $\Gamma'_n$  y utilizando la compactitud de  $V_n/\Gamma'_n$  y que  $\Gamma'_n \rightarrow \Gamma$ , obtenemos que la superficie  $M$  corta a  $S(r) \times V$  para todo  $r > 0$ , donde  $S(r)$  es la esfera de radio  $r$  en  $V^\perp$ . Entonces  $M/\Gamma$  corta a todas las superficies  $S(r) \times (V/\Gamma)$  y, por tanto, es necesariamente no compacta. Esta contradicción prueba el lema.  $\square$

El principal resultado de convergencia de esta sección es:

**TEOREMA 4.11.** *Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies embebidas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante invariantes por subgrupos discretos  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ , donde  $\mathcal{A}$  es una clase afín de conjugación en  $\mathcal{G}$  cuyos elementos no son cíclicos. Supongamos que  $M_n/G_n$  son superficies compactas conexas con género mayor que uno y segundas formas fundamentales uniformemente acotadas,  $|\sigma| < C$ .*

*Entonces podemos extraer una subsucesión de  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$  y, si la sucesión  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene un punto de acumulación, entonces podemos extraer una subsucesión convergente en la topología  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , a una superficie  $G$ -invariante propia y débilmente embebida  $M$  con curvatura media constante. Además:*

- (I) *Si la multiplicidad de  $M$  es mayor que uno entonces  $M$  es una superficie minimal con multiplicidad dos.*
- (II) *Si  $M/G$  es compacta y las superficies  $M_n$  son conexas entonces la multiplicidad de  $M$  es uno,  $M_n/G_n$  son afinamente difeomorfas a  $M/G$  para  $n$  suficientemente grande, y  $\mathbb{R}^3/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$  son afinamente difeomorfas.*

(III) *Si todas las superficies  $M_n$  son minimales entonces  $M$  es embebida con multiplicidad uno.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por el teorema 4.9 que si  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en las condiciones del teorema, la estimación uniforme de la curvatura  $|\sigma_n| < C$  implica una cota local uniforme del área para la sucesión. Podemos entonces extraer una subsucesión convergente de  $M_n$  a una superficie con curvatura media constante  $M$  que está débilmente embebida en  $\mathbb{R}^3$ . Puesto que los radios de inyectividad  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n)$  son mayores que  $\frac{1}{6C}$  por el corolario 4.6, podemos también extraer una subsucesión convergente de los subgrupos  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$  por el lema 4.2.

Sea  $p \in M$ . Como  $M$  es límite de superficies embebidas solo puede tener autointersecciones tangenciales. Por tanto, la intersección de  $M$  con una bola  $B$  de radio suficientemente pequeño centrado en  $p$  es la unión de uno o varios grafos que se cortan tangencialmente en  $p$ . Cada uno de estos grafos es el límite de una o varias componentes de  $M_n \cap B$ . Como todas las superficies  $M_n$  admiten por el teorema 4.5 un “semientorno tubular” de radio  $1/C$  en la región del complemento de la superficie hacia la que apunta el vector normal, entonces  $M_n \cap B$  tiene como máximo dos componentes conexas. A partir de la convergencia  $C^k$  de  $M_n$  a la superficie  $M$  deducimos que  $M \cap B$  consiste en, o bien dos hojas distintas que se cortan tangencialmente en  $p$  (por el principio del máximo esto solamente ocurre cuando la superficie límite  $M$  no es minimal), o  $M \cap B$  es embebida y es el límite de una o dos componentes de  $M_n \cap B$ . Si  $M \cap B$  es el límite de dos componentes de  $M_n \cap B$ , estas inducen en  $M \cap B$  vectores normales opuestos y, por tanto, la curvatura media de  $M \cap B$  debe ser invariante por un cambio del normal, i.e., la superficie límite  $M$  es minimal. Esto prueba (i).

Ahora probamos (ii). Supongamos, razonando por contradicción, que la multiplicidad de  $M/G$  es dos. Por (i) la superficie  $M/G$  es minimal. Por el lema 4.10 tenemos que la variedad límite  $\mathbb{R}^3/G$  es afínmente difeomorfa a  $\mathbb{R}^3/G_n$  y, por el lema 4.2, podemos encontrar una sucesión de transformaciones afines de  $\mathbb{R}^3$  que convergen a la identidad, e inducen difeomorfismos  $f_n : \mathbb{R}^3/G_n \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ . Para  $n$  suficientemente grande, utilizando la compacidad de las superficies  $M_n/G_n$  y  $M/G$ , obtenemos revestimientos de dos hojas  $\Pi_n : M_n/G_n \rightarrow M/G$  que inducen sobre los puntos de  $M/G$  orientaciones opuestas, lo que implica que  $M/G$  es no orientable, y tales que las dos aplicaciones:

$$\begin{aligned} M_n/G_n &\xrightarrow{\Pi_n} M/G \rightarrow \mathbb{R}^3/G \\ M_n/G_n &\rightarrow \mathbb{R}^3/G_n \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^3/G \end{aligned}$$

determinan el mismo morfismo entre los grupos fundamentales. La segunda aplicación induce un morfismo sobreyectivo entre los grupos fundamentales de  $M_n/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$  por hipótesis. La primera es topológicamente equivalente a la composición de la proyección del revestimiento de orientación de dos hojas de  $M/G$  con el embebiemiento  $M/G \rightarrow \mathbb{R}^3/G$ , que nunca induce un morfismo sobreyectivo entre los grupos fundamentales (en caso contrario, tomando imagen inversa a  $\mathbb{R}^3$ , obtendríamos que el revestimiento de orientación de dos hojas de  $M$  sería conexo, lo que es imposible porque  $M$  es propiamente embebida en  $\mathbb{R}^3$ ). Esta contradicción prueba que la multiplicidad de  $M$  es uno. Puesto que  $M_n/G_n \rightarrow M/G$  con multiplicidad uno y todas las superficies son compactas, se sigue fácilmente que  $M_n/G_n$  y  $M/G$  son difeomorfas. Esto completa la demostración de (ii).

Si todas las superficies  $M_n$  son minimales, el corolario 4.8 demuestra que existe un entorno tubular de radio  $1/C$  para cada  $M_n$  y, por tanto,  $M \cap B$  es embebida y es el límite de una sucesión de componentes de  $M_n \cap B$ , lo que prueba (iii).  $\square$

**Nota.** Los argumentos en la demostración de (ii) demuestran lo siguiente: si  $G \in \mathcal{A}$  y la superficie límite  $M/G$  es compacta con multiplicidad dos, entonces  $M/G$  es una superficie minimal no orientable. Por supuesto, en este caso las superficies  $M_n$  son no conexas.

Hacemos notar que, en general, para los límites obtenidos en el anterior teorema, ni el tipo topológico de las superficies  $M_n/G_n$  ni la clase afín de difeomorfismo de las variedades ambiente  $\mathbb{R}^3/G_n$  se conserva en el paso al límite.

### 3. Superficies minimales con índice uno

El propósito de este apartado es probar la compacidad del espacio de superficies minimales embebidas triplemente periódicas que inducen superficies minimales embebidas con índice uno en un toro llano no necesariamente fijo. Para superficies minimales simple y doblemente periódicas este resultado de compacidad no es cierto. En otras variedades llanas el problema continua abierto. Recordemos que las únicas superficies minimales compactas y embebidas con índice uno que no están contenidas en un toro llano tridimensional tienen género dos o son de género tres y no hiperelípticas por el teorema 3.8. Las posibles restantes superficies compactas orientables y embebidas con índice uno, es decir, superficies de géneros cuatro o cinco y superficies de género tres hiperelípticas, deben estar embebidas en un toro llano tridimensional.

**TEOREMA 4.12.** *Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies minimales propiamente embebidas en  $\mathbb{R}^3$  invariantes por retículos (i.e., subgrupos discretos de traslaciones de rango tres en  $\mathbb{R}^3$ )  $\Gamma_n$  normalizados de modo que el radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$  sea uno. Supongamos que  $M_n/\Gamma_n$  es una superficie compacta orientable con índice uno en  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$ . Entonces:*

- (I) *Podemos extraer una subsucesión convergente de  $\Gamma_n$  a un retículo  $\Gamma$ .*
- (II) *Podemos extraer una subsucesión, que denotaremos igual, de  $M_n$  convergente en la topología  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , a una superficie minimal  $M$  triplemente periódica y embebida  $\Gamma$ -invariante con índice uno. En particular, las superficies  $M_n/\Gamma_n$  y  $M/\Gamma$  son difeomorfas y  $M_n/\Gamma_n \rightarrow M/\Gamma$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Las superficies compactas  $M_n/\Gamma_n$  son no llanas por tener índice uno, y son necesariamente conexas. Como el tipo topológico de  $M_n/\Gamma_n$  es menor o igual que cinco, podemos suponer que su género es constante. Es bien conocido que su género debe ser mayor o igual que tres.

Probaremos en primer lugar que  $|\sigma_n| < C$  para alguna constante  $C > 0$ . Si no, existiría una sucesión  $p_n \in M_n$  tal que  $\lambda_n = \max_{p_n \in M_n} |\sigma_n| = |\sigma_n|(p_n) \rightarrow \infty$ . Trasladando los puntos  $p_n$  al origen y expandiendo las superficies  $M_n$  por medio de una homotecia de razón  $\lambda_n$  obtenemos una sucesión de superficies minimales embebidas  $\widetilde{M}_n$  tales que  $|\widetilde{\sigma}_n|(0) = 1$  y  $|\widetilde{\sigma}_n| \leq 1$ . Por el teorema 4.11, una subsucesión de  $\widetilde{M}_n$ , que denotaremos igual, converge en la topología  $C^k$  a una superficie minimal propiamente embebida y no llana  $\widetilde{M}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Por nuestra hipótesis sobre el radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$  (que coincide con la mínima longitud de los vectores no

nulos de  $\Gamma_n$ ), se sigue que el único punto de acumulación de los retículos  $\lambda_n \Gamma_n$  es el vector 0.

Como  $\widetilde{M}$  no es totalmente geodésica, debe ser conexa. Las regiones compactas de  $\widetilde{M}$  se pueden aproximar uniformemente por regiones en  $\widetilde{M}_n/\lambda_n \Gamma_n$ , y, por tanto, el índice de la superficie  $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^3$  es menor o igual que uno. Como  $\text{Ind}(\widetilde{M}) = 0$  implicaría que  $\widetilde{M}$  es totalmente geodésica, concluimos que  $\text{Ind}(\widetilde{M}) = 1$ . Por tanto  $\widetilde{M}$  es la catenoide, [51]. Puesto que  $\text{gén}(M_n/\Gamma_n) \geq 3$ , se sigue que la curvatura total de  $M_n/\Gamma_n$  es menor o igual que  $-8\pi$ . Como la curvatura total de  $\widetilde{M}$  es  $-4\pi$ , contradecimos la afirmación 4.1 y concluimos que  $|\sigma_n|$  es uniformemente acotada.

AFIRMACIÓN 4.1. *La curvatura total de  $M_n/\Gamma_n$  es la misma que la de  $\widetilde{M}$ .*

La superficie  $\widetilde{M}$  es conformemente la esfera de Riemann  $\Sigma$  menos dos puntos  $p_1, p_2$  y, por tanto,  $\widetilde{M} = \Sigma \setminus \{p_1, p_2\}$ . Sean  $(D_i, z_i)$  discos conformes en  $\Sigma$  centrados en  $p_i$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$  y sea  $\Omega(\varepsilon)$  el dominio acotado  $\Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^2 \{z_i \in D_i; |z_i| < \varepsilon\}$ . Podemos elegir  $\varepsilon$  suficientemente pequeño de modo que  $\text{Ind}(\Omega(\varepsilon)) = 1$ . Consideraremos sobre el dominio acotado  $\Omega(\varepsilon^2)$ , que contiene a  $\Omega(\varepsilon)$ , la función  $u_\varepsilon$  definida por:

$$u_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{en } \Omega(\varepsilon), \\ \frac{\log(|z_i|/\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}, & \text{en } z_i \in D_i, \quad \varepsilon^2 \leq |z_i| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la energía de  $u_\varepsilon$  tiende a 0.

Como  $\Omega(\varepsilon^2)$  se puede aproximar uniformemente por regiones en  $\widetilde{M}_n/\lambda_n \Gamma_n$  y tanto el índice de  $I$  como la integral de Dirichlet son invariantes por homotecias, podemos encontrar sobre las superficies  $M_n/\Gamma_n$ , para  $n$  suficientemente grande que depende de  $\varepsilon$ , un dominio  $A_n$ , un subdominio  $A'_n \subset A_n$  y una función  $u_n$  definida en  $A_n$  tal que  $u_n = 0$  en  $A'_n$ ,  $u_n = 1$  en  $\partial A_n$  tales que, después de aplicar una homotecia de razón  $\lambda_n$ , los objetos  $A_n$ ,  $A'_n$  y  $u_n$  estén uniformemente próximos a  $\Omega(\varepsilon^2)$ ,  $\Omega(\varepsilon)$  y  $u_\varepsilon$ , respectivamente. Más aún, podemos suponer que  $\text{Ind}(A'_n) = 1$ , y que la energía total de  $u_\varepsilon$  es  $O_1(\varepsilon)$ , donde  $O_i(\varepsilon)$  denotará una función convergente a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La función  $u_n$  se puede extender en  $M_n/\Gamma_n$  por 1 fuera de  $A_n$  para obtener una función Lipschitziana  $v_n$  con soporte contenido en el complemento de  $A_n$ . Como los índices de  $M_n/\Gamma_n$  y  $A'_n$  son uno, concluimos que  $\text{Ind}(M_n/\Gamma_n - A'_n) = 0$ . En particular, puesto que  $\text{sop}(v_n)$  está contenido en  $M_n/\Gamma_n - A'_n$ , la forma índice aplicada a  $v_n$  debe ser no negativa y, por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{M_n/\Gamma_n} \{|\nabla v_n|^2 + 2K_n v_n^2\} \\ &\leq \int_{M_n/\Gamma_n} |\nabla u_n|^2 + 2 \int_{\{v_n=1\}} K_n \\ &= O_1(\varepsilon) + 2 \int_{M_n/\Gamma_n} K_n - 2 \int_{A_n} K_n, \end{aligned}$$

donde  $K_n$  es la curvatura de Gauss de  $M_n$ . Como la curvatura total finita de  $\widetilde{M}$  está próxima a la de  $\Omega(\varepsilon^2)$ , tenemos que  $\int_{\widetilde{M}} \widetilde{K} = \int_{A_n} K_n + O_2(\varepsilon)$ , donde  $\widetilde{K}$  es la curvatura de Gauss de  $\widetilde{M}$ . Combinando esta fórmula con la desigualdad anterior, concluimos que:

$$\int_{M_n/\Gamma_n} |K_n| \leq \int_{\widetilde{M}} |\widetilde{K}| + O_3(\varepsilon).$$

Como las dos integrales en la desigualdad anterior son independientes de  $n$  y  $\varepsilon$ , se sigue que:

$$\int_{M_n/\Gamma_n} |K_n| \leq \int_{\widetilde{M}} |\widetilde{K}|.$$

La desigualdad opuesta se sigue de la semicontinuidad inferior de la curvatura total absoluta para la topología  $C^k$ , con  $k \geq 2$ . De este modo probamos la afirmación.

Por nuestra normalización, los retículos  $\Gamma_n$  no contienen vectores no nulos con longitud menor que uno y, por tanto, una subsucesión, que denotaremos igual, converge en el grupo euclídeo  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  a un subgrupo discreto  $\Gamma$  de traslaciones, ver el lema 4.2. Más aún,  $\Gamma \neq \{0\}$  porque cada  $\Gamma_n$  contiene vectores con longitud uno. Podemos elegir un sistema de generadores  $\{w_n^1, w_n^2, w_n^3\}$  de  $\Gamma_n$  para cada  $n$  tal que existe un subconjunto  $I \subset \{1, 2, 3\}$  y subsucesiones de  $\{w_n^i\}$  que convergen a  $w^i$  cuando  $i \in I$  y tal que  $\{w^i\}_{i \in I}$  son generadores de  $\Gamma$ . El conjunto  $I$  es no vacío porque  $\Gamma \neq \{0\}$ . Ahora vamos a probar, razonando por contradicción, que  $\Gamma$  es un retículo en  $\mathbb{R}^3$ , i.e., que  $\text{rango}(\Gamma) = 3$ .

Supongamos que  $I \neq \{1, 2, 3\}$ . Trasladando adecuadamente las superficies  $M_n$  podemos suponer que todas las superficies  $M_n$  contienen el origen y que se tiene  $\max_{p \in M_n} |\sigma_n| = |\sigma_n|(0)$ . Hacemos notar que, por el corolario 4.6,  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/\Gamma_n) \geq \frac{c(M_n)}{6} \geq \frac{1}{6 \max|\sigma_n|}$ .

Como  $|\sigma_n|$  es uniformemente acotado, una subsucesión de  $M_n$  converge por el teorema 4.11 en la topología  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , a una superficie minimal no llana propiamente embebida  $M$ , que es invariante por  $\Gamma$ . Más aún, como el índice es claramente semicontinuo para la topología  $C^k$ , concluimos que el índice de  $M/\Gamma$  es menor o igual que uno y, como  $M$  es no llano, tenemos que  $\text{Ind}(M/\Gamma) = 1$ .

Finalmente, como estamos suponiendo que  $\text{rango}(\Gamma) = 1, 2$ , concluimos por el corolario 3.11 que la curvatura total de  $M/\Gamma$  es  $-4\pi$ . Sin embargo, razonando como en la afirmación 4.1, probamos que la curvatura total de  $M_n/\Gamma_n$  coincide con la de  $M/\Gamma$ , lo que no es posible porque  $\text{género}(M_n/\Gamma_n) \geq 3$ . Esta contradicción prueba que  $\Gamma$  es un retículo. En particular,  $M/\Gamma$  es una superficie minimal compacta en el toro llano tridimensional  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  con el mismo tipo topológico de  $M_n/\Gamma_n$ , y  $M_n/\Gamma_n$  converge uniformemente  $C^k$ , para  $k \geq 2$ , a  $M/\Gamma$  por el teorema 4.11.  $\square$

**Nota.** Como consecuencia del teorema, obtenemos que la normalización del radio de inyectividad de  $\mathbb{R}^3/\Gamma_n$  puede ser reemplazada por otras normalizaciones de invariantes geométricos de los toros ambientes o de las superficies. En particular, obtenemos el mismo resultado de compacidad fijando, o bien el área de las superficies o el volumen de los toros.

Ahora identificamos toros llanos homotéticos y consideramos el espacio de moduli. Entonces obtenemos:

**COROLARIO 4.13.** *El conjunto de toros llanos tridimensionales que admiten superficies minimales orientables y embebidas con índice uno es un subconjunto compacto del espacio de moduli.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que no es cierto. Sea  $M_n/\Gamma_n \subset \mathbb{T}_n^3 = \mathbb{R}^3/\Gamma_n$  una sucesión de superficies minimales orientables y embebidas con índice uno en toros llanos tridimensionales  $\mathbb{T}_n^3$  normalizados de tal modo que  $\text{iny}(\mathbb{T}_n^3) = 1$ . Por el teorema 4.12 una subsucesión de  $\mathbb{T}_n^3$  converge a un toro  $\mathbb{T}^3$ .  $\square$

Como el anterior espacio de moduli es no compacto, se sigue que la “mayoría” de los toros llanos tridimensionales no admiten superficies minimales orientables y embebidas con índice uno.

#### 4. Superficies estables

El propósito de este apartado es probar la compacidad del espacio de superficies conexas embebidas con curvatura media constante invariantes por un subgrupo discreto de isometrías de  $\mathbb{R}^3$  que inducen superficies orientables y estables en  $M/G$  de género mayor que uno. Recordemos que los resultados del capítulo 2 implican que una superficie de género cero es totalmente umbilical y estable y que los toros estables son necesariamente llanos. Para superficies de género mayor que uno no se conoce ningún resultado de clasificación, aunque los ejemplos de M. Ross [74] demuestran que no es razonable esperar un resultado de clasificación similar al obtenido en géneros cero o uno.

Ahora probamos el principal resultado de esta sección. Denotamos por  $\mathcal{A}$  una clase afín de conjugación en  $\mathcal{G}$  cuyos elementos no son subgrupos cíclicos. Recordemos que solo hay un número finito de dichas clases.

**TEOREMA 4.14** (Compacidad del espacio de superficies estables). *Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies conexas embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  y  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{A}$  normalizada de modo que  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n) = 1$ . Supongamos que  $M_n$  es invariante por  $G_n$  y tal que las superficies  $M_n/G_n$  son compactas, orientables y estables en  $\mathbb{R}^3/G_n$  con género fijo mayor que uno.*

Entonces:

- (i) podemos extraer una subsucesión convergente de  $G_n$ , que denotaremos igual, a un subgrupo  $G \in \mathcal{A}$ , i.e.,  $\mathbb{R}^3/G_n$  y  $\mathbb{R}^3/G$  son afinamente difeomorfas.
- (ii) Podemos extraer una subsucesión de  $M_n$ , que denotaremos igual, que converge, salvo traslaciones en  $\mathbb{R}^3$ , en la topología  $C^k$  a una superficie  $M$  conexa propia y débilmente embebida con curvatura media constante y  $G$ -invariante, con multiplicidad uno, en  $\mathbb{R}^3$  y tal que  $M/G$  es una superficie compacta estable en  $\mathbb{R}^3/G$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos primero que existe una constante  $C > 0$  tal que  $|\sigma_n| < C$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si no, existiría una sucesión  $p_n \in M_n$  tal que  $\lambda_n = \max_{p \in M_n} |\sigma_p| = |\sigma_n|(p_n) \rightarrow \infty$ . Trasladando los puntos  $p_n$  al origen, expandiendo las superficies  $M_n$  por medio de una homotecia de razón  $\lambda_n$  y pasando a una subsucesión si es preciso, obtenemos una sucesión de superficies propiamente embebidas con curvatura media constante  $\widetilde{M}_n$  que convergen en la topología  $C^k$  a una superficie propia y débilmente embebida con curvatura media constante no totalmente geodésica  $\widetilde{M}$  por el teorema 4.11. La superficie  $\widetilde{M}$  es orientable: de hecho, si  $\widetilde{M}$  fuera no orientable, su multiplicidad debería ser dos (en caso contrario, por el teorema 4.11  $\widetilde{M}$  tendría multiplicidad uno y en este caso la orientabilidad de  $\widetilde{M}_n/\lambda_n G_n$  implica la de  $\widetilde{M}$ ) y, de nuevo por el teorema 4.11,  $\widetilde{M}$  sería una superficie minimal propiamente inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , lo que es imposible. Como  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n) = 1$ , se sigue que el único punto de acumulación de la sucesión de subgrupos  $\{\lambda_n G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en el grupo de isometrías  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  es la identidad. Entonces regiones compactas en  $\widetilde{M}$  se pueden aproximar uniformemente por regiones en  $\widetilde{M}_n/\lambda_n G_n$  y, como la estabilidad se conserva por la convergencia  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , concluimos que  $\widetilde{M}$  es una

superficie estable en  $\mathbb{R}^3$  y, por los resultados del capítulo 2, concluimos que  $\widetilde{M}$  es una esfera umbilical. Aplicando el lema 4.10 a las superficies  $\widetilde{M}_n$  y a los grupos  $\lambda_n G_n$  concluimos que la superficie  $\widetilde{M}$  es no compacta. Esta contradicción prueba que la sucesión  $|\sigma_n|$  es uniformemente acotada.

A partir de la normalización  $\text{iny}(\mathbb{R}^3/G_n) = 1$  se sigue que, pasando a una subsucesión, los subgrupos  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen a un subgrupo  $G \in \mathcal{G}$ . Por el corolario 4.6, obtenemos que  $1 = \text{inj}(\mathbb{R}^3/G_n) \geq \frac{c(M)}{6} \geq \frac{1}{\max|\sigma_n|}$ .

En consecuencia, trasladando adecuadamente las superficies  $M_n$  en  $\mathbb{R}^3$ , podemos suponer que una subsucesión de  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a una superficie  $M$  propia y débilmente embebida con curvatura media constante no totalmente geodésica que es  $G$ -invariante. Afirmamos que  $M/G$  es compacta: de hecho, si  $M/G$  es orientable, entonces es estable y por tanto, es compacta por el teorema 2.4. Si  $M/G$  es no orientable, entonces su multiplicidad debe ser dos (en caso contrario, por el teorema 4.11  $M/G$  tendría multiplicidad uno y, como antes, la orientabilidad de  $M_n/G_n$  implicaría la de  $M/G$ ). Más aún, el revestimiento de orientación de dos hojas es estable y, por tanto, compacto y se sigue que  $M/G$  es compacta. Esto prueba nuestra afirmación. Finalmente, concluimos de (ii) en el teorema 4.11 que  $G \in \mathcal{A}$ , que  $M_n/G_n$  y  $M/G$  son difeomorfas y que  $M_n/G_n \rightarrow M/G$  con multiplicidad uno.  $\square$

**Nota.** No hay compacidad para el espacio de superficies estables embebidas de género uno. De hecho, si consideramos el cociente  $\mathbb{R}^3/T_v$ , donde  $T_v$  es el subgrupo generado por una traslación no trivial, los tubos alrededor de una geodésica cerrada en  $\mathbb{R}^3/T_v$  son superficies estables embebidas cuando el radio es suficientemente grande. Pero estos tubos, trasladados adecuadamente, convergen a un cilindro totalmente geodésico.

Hemos necesitado la conexión de las superficies  $M_n$  en el teorema anterior para probar la compacidad de las variedades ambiente  $\mathbb{R}^3/G_n$  y para asegurar que la superficie límite tiene multiplicidad uno. Si suprimimos estas hipótesis y tomamos las variedades ambientes en un conjunto compacto, utilizando los mismos argumentos, obtenemos un resultado similar. En particular, fijando la variedad ambiente, obtenemos:

**TEOREMA 4.15.** *Sea  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$  y  $G \in \mathcal{G}$  tal que las superficies  $M_n$  son invariantes por  $G$ . Supongamos que  $M_n/G$  son compactas, orientables y estables en  $\mathbb{R}^3/G$  con género  $(M_n/G) \geq 2$ .*

*Entonces podemos extraer una subsucesión convergente de  $M_n$ , que denotaremos igual, a una superficie propia y débilmente embebida con curvatura media constante  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que, o bien:*

- (I)  *$M/G$  una superficie estable y orientable difeomorfa a  $M_n/G$  para  $n$  suficientemente grande, o:*
- (II)  *$M/G$  es una superficie minimal compacta con multiplicidad dos cuyo revestimiento de orientación es estable y difeomorfo a  $M_n/G$  para  $n$  suficientemente grande.*

La hipótesis en el teorema 4.14 sobre la conexión de las superficies  $M_n$ , que es equivalente a que la aplicación inducida por la inclusión  $M_n/G_n \subset \mathbb{R}^3/G_n$  entre los grupos fundamentales sea sobreyectiva, es siempre cierta si todas las superficies

son no llanas y minimales. El siguiente lema nos proporciona otra situación en la que este resultado es cierto:

**LEMA 4.16.** *Si  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie propiamente embebida con curvatura media constante e invariante por un subgrupo de rango dos  $\Gamma$  de traslaciones de  $\mathbb{R}^3$  y tal que  $M/\Gamma$  es una superficie compacta y conexa con género mayor que uno, entonces  $M$  es conexa.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $V$  el plano determinado por  $\Gamma$  y  $\mathbb{T}$  el toro  $V/\Gamma$ . Por el principio de reflexión de Alexandrov podemos suponer que la superficie  $M/\Gamma$  es simétrica con respecto al toro totalmente geodésico  $\mathbb{T} \times \{0\} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  y que es la unión de dos grafos sobre  $\mathbb{T} \times \{0\}$ . Sea  $\psi : M/\Gamma \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  la inclusión y  $\Gamma' = \psi_*(\pi_1(M/\Gamma))$ . Entonces  $\text{rango}(\Gamma')$  debe ser dos: si no,  $M/\Gamma$  podría levantarse a  $\mathbb{R}^3/\Gamma'$  y, por tanto,  $\text{género}(M/\Gamma) = 0, 1$ . Sea  $\mathbb{T}' = V/\Gamma'$ . El grupo  $\Gamma/\Gamma'$  es finito y tenemos un revestimiento riemanniano finito  $\mathbb{T}' \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  tal que la imagen inversa de  $M/\Gamma$  es una colección finita de superficies conexas disjuntas  $M_1, \dots, M_k$  congruentes por traslaciones de  $\Gamma$  y cada una de ellas congruente a  $M/\Gamma$ . Si llamamos  $\Pi : \mathbb{T}' \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}' \times \{0\}$  a la proyección sobre  $\mathbb{T}'$  tenemos que todos los subconjuntos  $\Pi(M_i)$  son disjuntos. Más aún, los embebimientos  $\psi_i : M_i \rightarrow \mathbb{T}' \times \mathbb{R}$  inducen, entre los grupos fundamentales, una aplicación sobreyectiva  $\psi_{i*} : \pi_1(M_i) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}')$ .

La conexión de  $M$  es equivalente a la igualdad  $\Gamma' = \Gamma$ . Supongamos, razonando por contradicción, que  $\Gamma' \neq \Gamma$  y, por tanto, que  $k \geq 2$ . Puesto que el grupo fundamental de  $\mathbb{T}' \times \mathbb{R}$  es abeliano, y  $\psi_{i*}$  es sobreyectiva, deducimos que el morfismo inducido por  $\psi_i$  entre los primeros grupos de homología es también sobreyectivo para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  y, puesto que  $\Pi$  induce un isomorfismo en homología, tenemos que  $\Pi \circ \psi_i$  induce entre los grupos de homología  $H_1(M_i, \mathbb{Z})$  y  $H_1(\mathbb{T}', \mathbb{Z})$  una aplicación sobreyectiva. Entonces podemos tomar  $\alpha, \beta$  ciclos en  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente, tales que  $\Pi(\psi_1(\alpha))$  y  $\Pi(\psi_2(\beta))$  son representantes de una base de  $H_1(\mathbb{T}', \mathbb{Z})$ . Pero los últimos dos ciclos son disjuntos, lo que es imposible, porque el número de intersección de una base del primer grupo de homología de un toro de dimensión dos debe ser  $\pm 1$ . Esta contradicción prueba que  $M$  es conexo.  $\square$

Vamos a identificar variedades tridimensionales llanas, completas, no compactas y orientables cuando sean homotéticas, y consideraremos el espacio de moduli. Obtenemos:

**COROLARIO 4.17.** *El conjunto de variedades de dimensión tres llanas, completas no compactas y orientables que admiten superficies orientables, estables y embebidas con género mayor que uno es compacto en el espacio de moduli.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $M_n/G_n \subset \mathbb{R}^3/G_n$  una sucesión en las condiciones del corolario. Como  $\text{género}(M_n/G_n) \geq 2$  tenemos que el rango de  $\Gamma(G_n)$  es mayor o igual que 2 y, como  $\mathbb{R}^3/G_n$  es no compacto concluimos que  $\text{rango}(\Gamma(G_n)) = 2$ . Tenemos dos clases afines de difeomorfismo distintas en  $\mathbb{R}^3/G_n$  y podemos suponer, pasando a una subsucesión, que todas las variedades  $\mathbb{R}^3/G_n$  son del mismo tipo.

Si  $\mathbb{R}^3/G_n = \mathbb{T}_n^2 \times \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\mathbb{T}_n^2$  es un toro llano bidimensional, entonces el lema 4.16 nos permite utilizar el teorema 4.14 para completar la demostración. Si todas las variedades  $\mathbb{R}^3/G_n$  están en la clase  $\mathcal{K}$  y, para una subsucesión, los morfismos inducidos entre los grupos fundamentales por las inclusiones son sobreyectivos, entonces concluimos de nuevo por el teorema 4.14 la existencia del límite.

Si  $\mathbb{R}^3/G_n \in \mathcal{K}$ , pero los morfismos inducidos entre los grupos fundamentales por las inclusiones no son sobreyectivos, consideramos revestimientos de dos hojas  $\mathbb{T}_n^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3/G_n$ . Por el lema 4.16 la imagen inversa de  $M_n/G_n$  en  $\mathbb{T}_n^2 \times \mathbb{R}$  no es conexa y, por tanto,  $M_n/G_n$  levanta a  $\mathbb{T}_n^2 \times \mathbb{R}$ . Podemos extraer entonces una subsucesión convergente de  $\mathbb{T}_n^2 \times \mathbb{R}$  y, por tanto, de  $\mathbb{R}^3/G_n$ .  $\square$

Como el anterior espacio de moduli no es compacto se sigue del corolario 4.17 y de los resultados del capítulo 2 que para la mayoría de las variedades de dimensión tres completas, llanas y orientables, las únicas superficies estables, compactas y orientables tienen género menor o igual que uno y, por los resultados del capítulo 2, son esferas totalmente umbilicales o toros llanos. En particular, los dominios isoperimétricos en la mayoría de estas variedades son bolas geodésicas, entornos tubulares de geodésicas cerradas y entornos tubulares de toros totalmente geodésicos.

## 5. Comentarios

Los resultados de compacidad que hemos probado demuestran que los espacios de superficies estables y superficies minimales con índice uno compactas con género mayor que dos son pequeños en cierto sentido. Por ejemplo, se puede deducir de nuestros resultados que el número de clases de homotopía de superficies estables y minimales con índice uno en una variedad completa y llana es finito. Hasta ahora, no se conocen resultados de existencia ni de superficies minimales con índice uno de género cuatro o cinco en toros llanos ni de superficies estables con género dos.

Los métodos que hemos usado no pueden utilizarse para probar la compacidad del espacio de superficies con curvatura media constante e índice uno. El estudio del comportamiento de la familia doblemente periódica de superficies embebidas con curvatura media constante  $\Sigma_2$  que se hará en el capítulo 6 parece sugerir que este espacio no es compacto en general.

## CAPÍTULO 5

# Superficies estables con aplicación de Gauss

En este capítulo estudiamos propiedades de compacidad del espacio de superficies estables compactas en cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones. Tales superficies poseen siempre aplicación de Gauss, y la condición de estabilidad proporciona una cota de la energía de dicha aplicación que sólo depende del género de la superficie, lo que permite aplicar ciertos resultados de compacidad para aplicaciones armónicas con energía uniformemente acotada [28, 95]. A partir de la convergencia de las aplicaciones de Gauss obtenemos la convergencia de las inmersiones. Los resultados que obtenemos son similares a los del capítulo 4, y son también válidos para el espacio de superficies minimales con índice uno. La técnica de demostración es totalmente diferente.

### 1. Preliminares

Supongamos que  $M$  es una superficie compacta orientable de género mayor o igual que dos. Sea  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes en  $M$ , y  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de métricas hiperbólicas con curvatura de Gauss  $-1$  asociadas a las estructuras conformes. Si las longitudes de las geodésicas no homótopas a cero de las métricas hiperbólicas  $\nu_n$  están acotadas inferiormente por una constante positiva, existe una sucesión  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de difeomorfismos de  $M$  tal que una subsucesión de las métricas  $\{\sigma_n^* \nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una métrica hiperbólica  $\nu$ , ver los trabajos de Mumford [58] y de Tomi y Tromba [91]. Si dichas longitudes no están acotadas inferiormente, existe una sucesión  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de difeomorfismos de  $M$  y una colección finita de curvas cerradas simples no homótopas a cero  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , que son geodésicas para las métricas hiperbólicas  $\sigma_n^* \nu_n$ , tales que las longitudes  $\ell_n(\gamma_i) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , y una subsucesión de  $\{\sigma_n^* \nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en compactos de  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$  a una métrica hiperbólica completa  $\nu$  en  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$ . Si  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$  son las componentes conexas de  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$  y  $J$  es la estructura conforme asociada a la métrica  $\nu$ , se tiene que cada abierto  $(\Omega_i, J)$  es conforme a una superficie de Riemann compacta  $\overline{M_i}$  menos un número finito de puntos  $X_i \subset \overline{M_i}$ , ver el trabajo de Abikoff [1]. Denotaremos por  $M_i$  a la superficie  $\overline{M_i} \setminus X_i$ .

Supongamos que  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es una inmersión isométrica con curvatura media constante en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto  $\Gamma$  de traslaciones. Sea  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  la aplicación de Gauss. La forma índice depende solo de  $\phi$ , y puede escribirse:

$$(5.1) \quad I(u) = \int_M \{|\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2\} dA.$$

La condición de estabilidad implica la siguiente restricción sobre la energía de las aplicaciones de Gauss:

LEMÁ 5.1. *Sea  $M$  una superficie compacta y orientable y  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  una inmersión isométrica estable en un cociente de  $\mathbb{R}^3$  por un subgrupo discreto  $\Gamma$  de traslaciones.*

*Entonces la energía de la aplicación de Gauss de la inmersión  $\psi$  está acotada por una constante que sólo depende del género de la superficie.*

DEMOSTRACIÓN. Si el género de  $M$  es  $g$ , podemos encontrar una aplicación holomorfa  $\eta = (\eta_i) : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  de grado menor o igual que  $1 + [(1+g)/2]$  por los resultados de [27] y media nula por el lema 2.9. La condición de estabilidad implica que:

$$0 \leq \sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla \eta_i|^2 - |\nabla \phi|^2 \eta_i^2,$$

y, por tanto, tenemos que  $E(\phi) \leq E(\eta) \leq 8\pi(1 + [(1+g)/2])$ .  $\square$

Sea  $\phi_n : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  una sucesión de aplicaciones tal que cada una de ellas es armónica para una estructura conforme  $J_n$  en  $M$  y tal que la energía  $E_n(\phi_n)$ , medida con respecto a la estructura conforme  $J_n$ , está uniformemente acotada por una constante  $A > 0$ . Para una sucesión de este tipo existe un resultado de compactidad que enunciamos en el siguiente teorema, y que aparece en los trabajos de Gromov [28], Wolfson [95] y Sacks y Uhlenbeck [78]:

TEOREMA 5.2. *Sea  $M$  una superficie orientable compacta,  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes en  $M$ . Supongamos que existe una colección finita de curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  tales que las estructuras conformes  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen uniformemente en compactos de  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$  a una estructura conforme  $J$ . Si  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de aplicaciones  $J_n$ -armónicas con energía uniformemente acotada, entonces:*

- (I) *Existe un conjunto finito  $X \subset M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$  tal que una subsucesión de las aplicaciones  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , en compactos de  $M \setminus (\bigcup_{i=1}^k \gamma_i \cup X)$  a una aplicación armónica  $\phi$ .*
- (II) *En cada punto  $p \in X$ , podemos construir una aplicación holomorfa  $\phi_p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  con energía acotada y no constante.*
- (III)  $E(\phi) + \sum_{p \in X} E(\phi_p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n(\phi_n)$ .

La demostración de (i) se sigue del teorema 2.3 de [78].

Veamos que ocurre en los puntos de  $X$ . Seguimos la demostración de Wolfson [95], ver también el artículo de Ros [73]. Si  $p \in X$ , sea  $\Omega$  un abierto simplemente conexo tal que  $\Omega \cap X = \{p\}$ . Sea  $z_n : \Omega \rightarrow D$  una sucesión de aplicaciones biyectivas holomorfas para la estructura  $J_n$  tal que  $z_n \rightarrow z$ , con  $z$  holomorfa para la estructura conforme  $J$ . Sea  $\phi'_n = \phi_n \circ z_n^{-1}$ . Tenemos que  $\phi'_n$  es una sucesión de aplicaciones armónicas en  $D$  con energía acotada que converge uniformemente en compactos de  $D \setminus \{0\}$ , pero no converge en  $D$  a una aplicación armónica  $\phi$ . Existe entonces una sucesión  $p_n \in D$  tal que  $p_n \rightarrow 0$  y  $|\nabla \phi'_n|_c^2(p_n) = \sup_D |\nabla \phi'_n|_c^2 \rightarrow \infty$ , donde el módulo y el gradiente se miden con respecto a la métrica hiperbólica del disco unidad  $D$ :

$$ds_c^2 = \left( \frac{2}{1 - |z|^2} \right)^2 |dz|^2.$$

Componiendo con la isometría  $z \mapsto (z - p_n)/(1 - \bar{p}_n z)$  de la métrica  $ds_c^2$  podemos suponer que  $p_n = 0$  para todo  $n$ . Sea  $R_n = 2|\nabla \phi'_n|_c(0)$ . En términos de la métrica

euclídea del disco podemos escribir:

$$|\nabla \phi'_n|_e(0) = R_n \rightarrow \infty, \quad |\nabla \phi'_n|_e(z) \leq \frac{R_n}{1 - |z|^2},$$

para todo  $z \in D$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos una nueva sucesión de aplicaciones armónicas  $\phi''_n : D(R_n^{1/2}) \rightarrow \mathbb{S}^2$  por medio de  $\phi''_n(z) = \phi'_n(z/R_n)$ . Entonces  $|\nabla \phi''_n|_e$  es uniformemente acotado en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$  y, tomando una subsucesión, podemos suponer que  $\{\phi''_n\}$  converge a una aplicación  $\phi_p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$  armónica. Por las propiedades de  $\phi''_n$  tenemos que  $\phi_p$  satisface:

$$|\nabla \phi_p|_e(0) = 1, \quad |\nabla \phi_p|_e \leq 1.$$

Además,  $\phi_p$  tiene energía acotada, de modo que, por el teorema 3.6 de [77], extiende a una aplicación armónica, que denotaremos igual,  $\phi_p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  con energía acotada y no constante.

Por último, (iii) se obtiene directamente de (i) y (ii).

## 2. Convergencia de inmersiones

En esta sección probaremos como la convergencia de las aplicaciones de Gauss de una familia de inmersiones con curvatura media constante implica la convergencia de las inmersiones. Demostramos en primer lugar el siguiente resultado que aplicaremos a las diferenciales de Hopf de las inmersiones con curvatura media constante.

**PROPOSICIÓN 5.3.** *Sea  $M$  una superficie compacta y orientable,  $\Omega \subset M$  un conjunto abierto conexo,  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes en  $M$  que convergen uniformemente en compactos de  $\Omega$  a una estructura conforme  $J$ . Sea  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de diferenciales cuadráticas  $J_n$ -holomorfas.*

*Entonces podemos encontrar una sucesión de números reales positivos  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que una subsucesión de  $\{\lambda_n \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a una diferencial cuadrática  $J$ -holomorfa no nula  $\alpha$  en  $\Omega$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar vamos a construir una sucesión auxiliar de funciones  $J_n$ -meromorfas  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que convergen en  $\Omega$  salvo en un número finito de puntos a una función  $J$ -meromorfa no constante  $h$ .

Elegimos un punto  $p \in \Omega$  que no sea punto de Weierstrass para ninguna de las estructuras conformes  $J_n$ . Sea  $h_n : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una sucesión de funciones meromorfas para las estructuras conformes  $J_n$  con un único polo en  $p$  de orden  $\text{género}(M) + 1$ . Sea  $p_0 \in \Omega$  distinto de  $p$ . Podemos suponer que  $h_n$  tiene un cero en  $p_0$  sustituyendo  $h_n$  por  $h_n - h_n(p_0)$ . Sea ahora  $p_1 \in \Omega$  un punto que no sea cero ni punto de acumulación de los ceros de  $h_n$ . Podemos suponer que  $h_n(p_1) = 1$  sustituyendo  $h_n$  por  $h_n/h_n(p_1)$ .

Puesto que  $h_n$  es armónica y:

$$E_n(h_n) \leq 8\pi \text{ grado}(h_n) = 8\pi(\text{género}(M) + 1),$$

aplicando el teorema 5.2 obtenemos un conjunto finito  $X \subset \Omega$  y una subsucesión de  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que seguiremos denotando igual, que converge uniformemente en compactos de  $\Omega \setminus X$  a una función  $J$ -meromorfa  $h$ .

Probaremos que  $h$  es una función meromorfa no constante viendo que tanto  $p_0$  como  $p_1$  no pertenecen a  $X$ . Se tiene entonces que  $h(p_0) = 0$  y  $h(p_1) = 1$ . Aplicando el lema 5.4 es fácil ver que  $p_1 \notin X$ , ya que en un entorno de  $p_1$  suficientemente

pequeño no hay ceros ni polos de  $h_n$ . Por otra parte, si suponemos que  $p_0 \in X$ , tenemos que en un entorno pequeño de  $p_0$  la función  $h$  omite el valor  $\infty$  y, de nuevo por el lema 5.4, se tiene que  $h \equiv 0$  en dicho entorno; por conexión,  $h \equiv \infty$  en todo el conjunto  $\Omega$ , lo que es imposible ya que  $h(p_1) = 1$ .

Ahora probamos el enunciado de la proposición. Definimos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n = \alpha_n / (d'_{J_n} h_n)^2$ . Tenemos entonces que  $f_n : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es una sucesión de aplicaciones  $J_n$ -meromorfas con grado acotado por una constante que sólo depende de  $g$ . Si  $q \in \Omega$  no es límite de ceros ni de polos de  $f_n$  y elegimos  $\lambda_n > 0$  tal que  $\lambda_n |f_n(q)| = 1$  tenemos, por el teorema 5.2, que una subsucesión de la sucesión  $\{\lambda_n f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que denotaremos igual, converge salvo en un conjunto finito  $X'$  a una aplicación  $J$ -meromorfa  $f$  que no es idénticamente cero ni infinito, ya que  $q \notin X'$  por el lema 5.4.

Tenemos entonces que  $\lambda_n \alpha_n = (\lambda_n f_n)(d'_{J_n} h_n)^2$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega \setminus (X \cup X')$  a una diferencial cuadrática  $J$ -holomorfa no nula  $\alpha$ . Como todas las diferenciales  $\alpha_n$  son holomorfas, se sigue que la convergencia extiende a los puntos de  $X \cup X'$  por el lema 5.4.  $\square$

**Nota.** El resultado anterior es válido, con pequeñas modificaciones, para una sucesión de  $p$ -diferenciales holomorfas, con  $p \in \mathbb{N}$  cualquiera.

**LEMA 5.4.** *Sean  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$  el disco unidad,  $D^* = D \setminus \{0\}$ ,  $h_n : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  una sucesión de funciones meromorfas que convergen a una función meromorfa  $h$  uniformemente en compactos de  $D^*$ , pero no en  $D$ .*

*Si  $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} h_n(D)$ , entonces  $h_n \rightarrow a$  uniformemente en compactos de  $D^*$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Podemos suponer, componiendo si es preciso con transformaciones de Möbius, que  $a = \infty$ . Se tiene entonces que  $h_n : M \rightarrow \mathbb{C}$  es una sucesión de funciones holomorfas y, como  $h_n \rightarrow h$ , tenemos que, o bien  $h$  es holomorfa, o bien  $h \equiv \infty$  en  $D^*$ . Supongamos que  $h$  es holomorfa y que  $D(\varepsilon)$  es un disco pequeño contenido en  $D$ ; puesto que  $h_n \rightarrow h$  en  $\partial D(\varepsilon)$ , se tiene que  $|h_n|$  es uniformemente acotado en  $D(\varepsilon)$  por el principio del módulo máximo y, por tanto, que  $h_n \rightarrow h$  en  $D$ , lo que no es posible. En consecuencia  $h \equiv \infty$  y hemos probado el lema.  $\square$

Enunciamos ahora el principal resultado de convergencia de esta sección.

**TEOREMA 5.5.** *Sean  $M$  una superficie compacta y orientable,  $\Omega \subset M$  un abierto conexo,  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes que convergen uniformemente en compactos de  $\Omega$  a una estructura conforme  $J$  en  $\Omega$ . Supongamos que  $\psi_n : (M, J_n) \rightarrow \mathbb{R}^3 / \Gamma_n$  es una sucesión de inmersiones conformes con curvatura media constante en cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones  $\Gamma_n$ , y que la sucesión de aplicaciones de Gauss  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , en compactos de  $\Omega$  a una aplicación armónica  $\phi$  no constante.*

*Entonces existe una sucesión de números reales positivos  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que una subsucesión de  $\lambda_n \psi_n$  converge, salvo traslaciones, uniformemente en compactos de  $\Omega$  a una inmersión multivaluada  $J$ -conforme  $\psi$  con curvatura media constante y aplicación de Gauss  $\phi$ . Dicha inmersión es no ramificada si las inmersiones  $\psi_n$  no tienen puntos de ramificación.*

*Si  $\Omega$  es una superficie de Riemann compacta  $\Omega'$  menos un número finito de puntos entonces la inmersión límite  $\psi$  sólo puede tener puntos de ramificación o finales en  $\Omega' \setminus \Omega$ . Si  $\psi$  no es minimal entonces la inmersión límite solo puede tener puntos de ramificación.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $g_n$  y  $g$  las proyecciones estereográficas de  $\phi_n$  y  $\phi$ , respectivamente, y sea  $H_n$  la curvatura media de la inmersión  $\psi_n$ .

Supongamos en primer lugar que  $\phi$  no es antiholomorfa. Entonces  $\phi_n$  no es antiholomorfa a partir de un índice suficientemente grande. En consecuencia  $g_n$  no es meromorfa y, como  $g$  es no constante, se tiene que  $d'_{J_n}g_n \not\equiv 0$ . Entonces:

$$H_n d'_{J_n} \psi_n = (1 - g_n^2, i(1 + g_n^2), 2g_n) \frac{-2\overline{d''_{J_n}g_n}}{(1 + |g_n|^2)^2},$$

converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a:

$$d'_J \psi = (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \frac{-2\overline{d''_J g}}{(1 + |g|^2)^2},$$

y se sigue la convergencia de las inmersiones  $H_n \psi_n$  a una inmersión  $\psi$  con aplicación de Gauss  $\phi$  y curvatura media  $H = 1$ .

Si  $\phi$  es antiholomorfa, aplicamos la proposición 5.3 a las diferenciales de Hopf  $\alpha_n$  de las inmersiones  $\psi_n$  y encontramos una sucesión de números reales positivos  $\lambda_n$  tales que  $\lambda_n \alpha_n$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a una diferencial cuadrática  $J$ -holomorfa  $\alpha$  no nula. Como  $\phi$  es no constante y  $g$  es meromorfa, tenemos que  $d'_J g \not\equiv 0$  y, por tanto:

$$\lambda_n d'_{J_n} \psi_n = (1 - g_n^2, i(1 + g_n^2), 2g_n) \frac{\lambda_n \alpha_n}{-4 d'_{J_n} g_n},$$

converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a:

$$(1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \frac{\alpha}{-4 d'_J g},$$

lo que implica la convergencia de las inmersiones  $\lambda_n \psi_n$  a una inmersión minimal  $J$ -conforme y multivaluada  $\psi$  con aplicación de Gauss  $\phi$ .

Los puntos de ramificación de las inmersiones  $\lambda_n \psi_n$  se corresponden con los ceros de las 1-formas complejas de tipo  $(1, 0)$   $\omega_n = \lambda_n \alpha_n / d'_{J_n} g_n$ .

Sean  $p \in \Omega$ , y  $\Omega'$  un abierto simplemente conexo que contiene a  $p$  contenido en  $\Omega$ . Sean  $z_n, z$  biholomorfismos de  $(\Omega', J_n)$ ,  $(\Omega', J)$ , respectivamente, en el disco unidad  $D \subset \mathbb{C}$  tales que  $z_n(p) = 0$ ,  $z(p) = 0$  y  $z_n \rightarrow z$  en  $C^\infty(\Omega, D)$ . Para estudiar la ramificación de las inmersiones en  $p$  basta estudiar la ramificación de las inmersiones  $\psi_n \circ z_n^{-1}$ ,  $\psi \circ z^{-1}$  en 0. Sean  $\tilde{\omega}_n, \tilde{\omega}$  las 1-formas asociadas a las inmersiones  $\psi_n \circ z_n^{-1}$  y  $\psi \circ z^{-1}$ . Por los resultados de [16] o [82], los ceros de dichas 1-formas son aislados. Sea  $\gamma$  una curva diferenciable simple contenida en  $D$  que rodea a 0 y no contiene ceros de  $\tilde{\omega}_n$  ni de  $\tilde{\omega}$ . Como localmente  $\tilde{\omega}_n = f_n dw$ , y  $\psi_n$  no tiene puntos de ramificación, tenemos que  $f_n$  no tiene ceros en ningún punto. Como  $\tilde{\omega}_n \rightarrow \tilde{\omega}$ , tenemos que  $d(\log f_n) = df_n/f_n \rightarrow df/f$  en  $\gamma$ , donde  $f$  viene dada por  $\tilde{\omega} = f dw$ . Integrando  $d(\log f_n)$  en  $\gamma$  y pasando al límite obtenemos que  $\tilde{\omega}$  no tiene ceros y, por tanto, que  $p$  no es un punto de ramificación de  $\psi$ .  $\square$

### 3. Compacidad de las aplicaciones de Gauss

Basándonos en el teorema (5.2), podemos demostrar el siguiente resultado para aplicaciones de Gauss asociadas a inmersiones estables con curvatura media constante:

**TEOREMA 5.6.** *Sea  $M$  una superficie compacta y orientable con género mayor o igual que dos,  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes en  $M$ , y  $\psi_n : (M, J_n) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_n$  una sucesión de inmersiones estables  $J_n$ -conformes en cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones  $\Gamma_n$ .*

*En estas condiciones podemos encontrar una sucesión  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de difeomorfismos tal que:*

- (I) *Una subsucesión de las estructuras conformes  $\{\sigma_n^* J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una estructura conforme  $J$  en  $M$ .*
- (II) *Una subsucesión de las aplicaciones de Gauss  $\{\sigma_n^* \phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una aplicación  $J$ -armónica  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ .*

**COROLARIO 5.7.** *En particular, el espacio de estructuras conformes que admiten inmersiones conformes estables es compacto.*

**Nota.** En el caso  $\text{género}(M) = 0$ , se tiene siempre que  $M \cong \mathbb{S}^2$  y que  $\phi$  es la identidad, ya que cualquier inmersión de curvatura media constante de una esfera es totalmente umbilical. Dichas inmersiones son todas estables.

En el caso de  $\text{género}(M) = 1$  no se tiene compactidad. Para todo  $R > 0$ , sea  $T_R$  el toro obtenido como el cociente de  $\mathbb{R}^2$  por el subgrupo generado por los vectores  $(2\pi R, 0)$  y  $(0, 2\pi)$ . Sea  $v = (0, 0, 2\pi) \in \mathbb{R}^3$ , y  $\psi_R : T_R \rightarrow \mathbb{R}^3/\langle v \rangle$  la inmersión isométrica con curvatura media constante dada por:

$$\psi_R(x, y) = (R \cos(x/R), R \sin(x/R), y),$$

cuya aplicación de Gauss es:

$$\phi_R(x, y) = (\cos(x/R), \sin(x/R), 0).$$

El operador de Jacobi de dichas inmersión es  $\Delta + 1/R^2$ , y se tiene que  $\psi_R$  es estable si y solo si  $R \geq 1$ . La energía de las aplicaciones de Gauss es:

$$E_R(\phi_R) = \int_0^{2\pi R} \int_0^1 \frac{1}{R^2} dx dy = \frac{2\pi}{R} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

Si suprimimos de  $T_R$  una pequeña banda cerrada de anchura  $\varepsilon R$  alrededor de la recta  $y = 2\pi R$ , la imagen del abierto que obtenemos es conforme por la aplicación  $z \mapsto \exp(z - \pi R)$  al anillo  $\{z \in \mathbb{C}; \exp(-\pi + \varepsilon)R) < |z| < \exp((\pi - \varepsilon)R)\}$ , y la aplicación de Gauss sobre este anillo es:

$$\phi_R(w) = (\cos(\pi + \log|w|/R), \sin(\pi + \log|w|/R), 0).$$

De modo que las estructuras conformes de los toros convergen a una esfera y las aplicaciones de Gauss convergen a la aplicación constante  $\phi(w) = (-1, 0, 0)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Reparametrizando las inmersiones si es preciso, podemos suponer que existe un conjunto finito  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , eventualmente vacío, de curvas cerradas simples en  $M$ , tales que  $J_n \rightarrow J$  uniformemente  $C^k$  en compactos de  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$ . Aplicando el lema 5.1 y el teorema 5.2, obtenemos un conjunto finito  $X \subset M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$ , tal que una subsucesión de las aplicaciones de Gauss  $\phi_n$ , que seguiremos denotando igual, converge uniformemente en compactos de  $M \setminus (\bigcup_{i=1}^k \gamma_i \cup X)$  a una aplicación armónica  $\phi$ .

Para concluir la demostración del teorema solo necesitamos probar que el conjunto de curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  es vacío, lo que implica la compactidad de las estructuras conformes, y que el conjunto de puntos  $X$  es vacío, lo que implica la compactidad

de la sucesión  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Probamos esto, razonando por contradicción, demostrando que los siguientes tres casos no son posibles.

CASO 1. *El conjunto  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  es no vacío y  $\phi$  no es constante en alguna componente conexa  $\Omega_i$ .*

La superficie  $(\Omega_i \setminus X, J)$  es una superficie de Riemann compacta  $\overline{\Omega}_i$  menos un número finito de puntos. Denotamos por  $\phi$  la límite de la sucesión  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\Omega_i$  que extiende a una aplicación armónica en  $\overline{\Omega}_i$ .

AFIRMACIÓN 5.1.  $E_n(\phi_n|_{M \setminus \Omega_i}) \rightarrow 0$ .

DEMOSTRACIÓN. de la afirmación Elegimos en cada punto  $p \in \overline{\Omega}_i \setminus \Omega_i$  un disco punteado  $J$ -conforme  $(D_p^*, z)$  centrado en  $p$ . Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño definimos:

$$u_\varepsilon = \begin{cases} 0, & (M \setminus \Omega_i) \cup (\cup_p D_p(\varepsilon^2)), \\ \log(|z|/\varepsilon^2) / \log(1/\varepsilon), & \varepsilon^2 \leq |z| \leq \varepsilon, \\ 1, & \Omega_i \setminus \cup_p D_p(\varepsilon), \end{cases}$$

$$v_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \Omega_i \setminus \cup_p D_p(\varepsilon^2), \\ \log(|z|/\varepsilon^2) / \log(\varepsilon), & \varepsilon^3 \leq |z| \leq \varepsilon^2, \\ 1, & (M \setminus \Omega_i) \cup (\cup_p D_p(\varepsilon^3)). \end{cases}$$

Las funciones  $u_\varepsilon$  y  $v_\varepsilon$  tienen soportes disjuntos y tenemos que tanto  $\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 dA$  como  $\int_M |\nabla v_\varepsilon|^2 dA$  convergen a 0 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Podemos tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño de modo que:

$$\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 - |\nabla \phi|^2 u_\varepsilon^2 dA < 0.$$

Como  $J_n \rightarrow J$ ,  $\phi_n \rightarrow \phi$  y  $dA_n \rightarrow dA$  en  $\text{sop}(u_\varepsilon) \subset \Omega_i \setminus X$ , obtenemos por continuidad que  $I_n(u_\varepsilon) < 0$  para  $n$  suficientemente grande. Se sigue entonces de la estabilidad que  $I_n(v_\varepsilon) \geq 0$  ya que, en caso contrario, podríamos encontrar una combinación lineal  $u_\varepsilon$  y  $v_\varepsilon$  con media cero y negativa para la forma índice  $I_n$ . Entonces obtenemos:

$$\int_{M \setminus \Omega_i} |\nabla \phi_n|_n^2 dA_n \leq \int_M |\nabla \phi_n|_n^2 v_\varepsilon^2 dA_n \leq \int_M |\nabla v_\varepsilon|_n^2 dA_n.$$

Como  $\text{sop} |\nabla v_\varepsilon|_n^2$  está contenido en  $\Omega_i$ , tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  en las desigualdades anteriores

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{M \setminus \Omega_i} |\nabla \phi_n|_n^2 dA_n \leq \int_M |\nabla v_\varepsilon|^2 dA,$$

y como el término de la derecha tiende a cero se sigue la afirmación.  $\square$

Como  $\text{grado}(\phi) = \int_{\Omega_i} \text{Jac}(\phi) dA$  y:

$$\int_{M \setminus \Omega_i} |\text{Jac}(\phi_n)| dA_n \leq \frac{1}{2} E_n(\phi_n|_{M \setminus \Omega_i})$$

tenemos que  $1 - \text{género}(M) = \text{grado}(\phi_n) \rightarrow \text{grado}(\phi)$  y como las inmersiones no tienen ramificación se sigue del teorema de Gauss-Bonnet que  $\text{grado}(\phi_n) = 1 - \text{género}(M)$  y, por tanto,  $\text{grado}(\phi) = 1 - \text{género}(M)$ . Como  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  es no vacío  $\text{género}(\overline{\Omega}_i) < \text{género}(M)$  y, por los resultados de Eells y Wood [16], tenemos que  $\phi$  es anticonforme. Supongamos que  $\phi$  no toma el valor  $(0, 0, 1)$  en  $\overline{\Omega}_i \setminus \Omega_i$ . Por el

teorema 5.5 existe una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos tal que una subsucesión de las inmersiones  $\{\lambda_n \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen a una inmersión minimal multivaluada sin puntos de ramificación  $\psi$  con aplicación de Gauss  $\phi$  no constante. La 1– forma de Weierstrass asociada a  $\psi$  tiene  $2\text{gén}(M) - 2$  ceros en  $\overline{\Omega}_i$  en los polos de la proyección estereográfica de  $\phi$  porque  $\psi$  está libre de puntos de ramificación.

Por tanto, como  $\#\text{ceros}(\omega) - \#\text{polos}(\omega) = 2\text{gén}(\overline{\Omega}_i) - 2$ , obtenemos que  $\omega$  tiene polos en algún punto de  $\overline{\Omega}_i \setminus \Omega_i$  y esto prueba que  $\Omega_i$  tiene área infinita con respecto a la métrica inducida por  $\psi$ . Aplicando las resultados de Silveira [84] la inmersión  $\psi$  no sería estable contradiciendo la afirmación 5.2. De este modo probamos el caso 1.

**AFIRMACIÓN 5.2.** *La inmersión multivaluada  $\psi : \Omega_i \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3$  es estable.*

**DEMOSTRACIÓN.** de la afirmación Si  $\psi$  no fuese estable podríamos encontrar una función diferenciable  $u$  con soporte compacto en  $\Omega = \Omega_i \setminus X$  tal que  $\int_{\Omega} u \, dA = 0$  y  $\int_{\Omega} \{|\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2\} \, dA < 0$ , con  $dA$  la medida asociada a la métrica inducida por la inmersión  $\psi$ . Si  $u = u^+ - u^-$  entonces  $\mu_n = (\int_{\Omega} u^- \, dA_n) / (\int_{\Omega} u^+ \, dA_n) \rightarrow 1$ , donde  $dA_n$  es la medida en  $M$  inducida por inmersión  $\lambda_n \psi_n$  y:

$$\int_{sop(u)} \{|\nabla u_n|^2 - |\nabla \phi_n|^2 u_n^2\} \, dA_n \rightarrow \int_{sop(u)} \{|\nabla u|^2 - |\nabla \phi|^2 u^2\} \, dA < 0,$$

y , por tanto, para  $n$  grande  $I_n(u_n) < 0$ , y llegamos a contradicción, ya que  $\psi_n$  y, en consecuencia,  $\lambda_n \psi_n$  son inmersiones estables.  $\square$

**CASO 2.** *El conjunto de puntos  $X$  es no vacío.*

Si  $p \in X$ , podemos obtener por el teorema 5.2 una aplicación holomorfa no constante  $\phi_p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Aplicando un argumento similar al de la afirmación 5.1 concluimos que  $E_n(\phi_n) \rightarrow E(\phi_p)$  y, por tanto, que  $\text{grado}(\phi_n) \rightarrow \text{grado}(\phi_p)$ . Entonces existe una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos tales que una subsucesión de  $\{\lambda_n \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge localmente a una inmersión minimal multivaluada de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$  con un final al menos y área infinita como antes y llegamos a contradicción como en la afirmación 5.2.

**CASO 3.** *El conjunto de curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  no es vacío, el límite de la sucesión  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es constante en cada componente de  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$  y  $X$  es vacío.*

Como:

$$(5.2) \quad E_n(\phi_n) \geq 2 \int_M |\text{Jac}(\phi_n)| \geq 8\pi(\text{gén}(M) - 1),$$

las energías  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  no pueden tender a cero.

Como  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada inferiormente por una constante positiva y  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente  $C^k$  a una aplicación constante existe al menos una geodésica hiperbólica  $\gamma \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  tal que  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada inferiormente por una constante positiva en entornos de  $\gamma$  para  $n$  dependiendo del entorno. Sea  $C$  un entorno anular de  $\gamma$  tal que  $(C \setminus \gamma, J)$  es conforme a dos discos punteados  $D_1$  y  $D_2$  con coordenadas locales  $z_1$  y  $z_2$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y  $u_{\varepsilon}$  la función lipschitziana:

$$u_{\varepsilon} = \begin{cases} 1, & |z_i| \leq \varepsilon^2, \\ \log(|z_i|/\varepsilon) / \log(\varepsilon), & \varepsilon^2 \leq |z_i| \leq \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \leq |z_i|, \end{cases}$$

extendida por cero a todo  $M$ .

Entonces la función  $u_\varepsilon$  verifica  $I_n(u_\varepsilon) < 0$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y  $n$  suficientemente grande. Además,  $\{E_n(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiende a cero fuera de cualquier entorno de  $\gamma_i$ : si no podríamos encontrar una función lipschitziana no negativa  $v$  similar a  $u_\varepsilon$  tal que  $\text{sop}(u_\varepsilon) \cap \text{sop}(v)$  es vacío y  $I_n(v) < 0$  para  $n$  grande.

Fijamos ahora  $\varepsilon > 0$  y llamamos  $C(\varepsilon) = \cup_{i=1,2} \{0 < |z_i| \leq \varepsilon\} \cup \gamma \subset C$ . Si  $\eta_n : (C, J_n) \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación holomorfa inyectiva entonces, utilizando un argumento de Li y Yau [50] podemos suponer, componiendo  $\eta_n$  con una transformación de Möbius de  $\mathbb{S}^2$ , que  $\int_{C(\varepsilon)} \eta_n u_\varepsilon ds_n^2 = 0$ . Por estabilidad:

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_n(\eta_n u_\varepsilon) \\ &= \int_{C(\varepsilon)} |\nabla \eta_n u_\varepsilon|_n^2 - |\nabla \phi_n|_n^2 \eta_n^2 u_\varepsilon^2 \\ &\leq E_n(u_\varepsilon) + E_n(\eta_n) + E_n(u_\varepsilon) E_n(\eta_n) - \int_{C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2. \end{aligned}$$

Como  $E_n(\eta_n) \leq 8\pi$  tenemos que:

$$\int_{C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 \leq 8\pi + E_n(u_\varepsilon)(1 + 8\pi),$$

De esta desigualdad y (5.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} 8\pi &\leq E_n(\phi_n) \leq \int_{M \setminus C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 + \int_{C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 \\ &\leq \int_{M \setminus C(\varepsilon^2)} |\nabla \phi_n|_n^2 + 8\pi + E_n(u_\varepsilon)(1 + 8\pi), \end{aligned}$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos que el término de la derecha en la desigualdad anterior converge a:

$$8\pi + E(u_\varepsilon)(1 + 8\pi),$$

y como  $E(u_\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se sigue que  $E_n(\phi_n) \rightarrow 8\pi$ . Entonces concluimos de (5.2) que el caso 3 no es posible si  $\text{género}(M) \geq 3$ .

Para terminar estudiamos el caso de una superficie de género dos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos la aplicación diferenciable a trozos  $\bar{\phi}_n : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  por:

$$\bar{\phi}_n(z) = \begin{cases} \phi_n(\eta_n^{-1}(z)), & x \in \eta_n(C_n) \\ h_n(z), & x \notin \eta_n(C_n), \end{cases}$$

donde  $\eta_n$  es una aplicación holomorfa inyectiva de  $(C, J_n)$  a  $\mathbb{S}^2$  elegida de modo que las regiones  $\eta_n(C)$  recubran toda la esfera menos dos puntos,  $C_n$  es una sucesión de subanillos de  $C$  tal que las regiones  $\eta_n(C_n)$  también cubren toda la esfera menos dos puntos y la energía de las curvas de la frontera  $\phi_n(\partial C_n)$  converge a cero (esto puede hacerse porque si  $\phi : C = \{r_1 < |z| < r_2\} \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación diferenciable, uno puede acotar la longitud de *alguna* curva  $\phi(re^{i\theta})$ , con  $r_1 < r < r_2$  por  $E(\phi)/\text{módulo}(C)$ ), y  $h_n$  es la función  $h_n(re^{i\theta}) = r\bar{\phi}_n(e^{i\theta})$ . Hacemos notar que las energías de las aplicaciones  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tienden a cero cuando  $n$  converge a infinito.

De este modo obtenemos que  $\text{grado}(\bar{\phi}_n) = \text{grado}(\phi_n) = -1$  y, por el lema 5.8, componiendo si es necesario con una transformación de Möbius, podemos suponer que  $\int_{\mathbb{S}^2} \bar{\phi}_n = 0$ .

Como  $E(\bar{\phi}_n)$  (calculada con la métrica usual de  $\mathbb{S}^2$ ) está acotada podemos extraer una subsucesión fuertemente convergente en  $L_2$  cuyos gradientes son débilmente convergentes en  $L_2$  a una aplicación  $\bar{\phi}$  en el espacio de Sobolev  $H^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ .

De  $\int_{\mathbb{S}^2} \bar{\phi}_n = 0$  se sigue que  $\int_{\mathbb{S}^2} \bar{\phi} = 0$  y por tanto  $\bar{\phi}$  es no constante.

Como  $E(\bar{\phi}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(\bar{\phi}_n) = 8\pi$ ,  $\bar{\phi}$  tiene media cero y  $|\bar{\phi}| \equiv 1$  obtenemos que las coordenadas de  $\bar{\phi}$  son primeras funciones propias del Laplaciano de  $\mathbb{S}^2$  y, por tanto, existe una transformación ortogonal  $A$  tal que  $A(p) = \bar{\phi}(p)$  para todo  $p \in \mathbb{S}^2$  y  $E(\bar{\phi}) = 8\pi$ .

Las regiones  $\mathbb{S}^2 \setminus \eta_n(C)$  son la unión de dos discos  $D(p_n, r_n), D(q_n, s_n)$ . Pasando a una subsucesión podemos suponer que  $p_n \rightarrow p, q_n \rightarrow q, r_n \rightarrow r, s_n \rightarrow s$ . Afirmamos que  $r, s = 0$ : de hecho, si  $r > 0$  tenemos que  $D(p, r/2) \subset D(p_n, r_n) \subset \mathbb{S}^2 \setminus \eta_n(C)$  para  $n$  suficientemente grande. Entonces  $E(\bar{\phi}_{n|D(p, r/2)})$  converge a cero, y por tanto  $E(\bar{\phi}|_{D(p, r/2)}) = 0$  y se tiene que  $\bar{\phi}|_{D(p, r/2)}$  es constante, lo que no es posible ya que  $\bar{\phi}(p) = A(p)$  en  $\mathbb{S}^2$ .

Puesto que en los anillos  $\mathbb{S}^2 \setminus \eta_n(C)$  las aplicaciones  $\bar{\phi}_n$  son reparametrizaciones de  $\phi_n$  hemos probado que en un entorno de  $\gamma$  las aplicaciones  $\phi_n$  convergen a una aplicación anticonforme con grado  $-1$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Utilizando el teorema 5.5 obtenemos que, reescalando, una subsucesión de las inmersiones  $\psi_n$  converge a una inmersión minimal  $\psi$  de una esfera punteada que tiene necesariamente al menos un final. Razonando como en la afirmación 5.2 concluimos que esta inmersión debería ser estable, lo que contradice los resultados de Silveira [84]. Esto demuestra que el caso 3 tampoco es posible.  $\square$

LEMA 5.8. *Si  $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación continua de grado no nulo, existe una transformación de Möbius  $F$  tal que:*

$$\int_{\mathbb{S}^2} \phi \circ F = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $D^3$  es la bola unidad abierta en  $\mathbb{R}^3$ , para cada  $g \in D^3$ , sea  $F_g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  la aplicación dada por:

$$F_g(p) = \frac{p + (\mu \langle p, g \rangle - \lambda)g}{\lambda(1 - \langle p, g \rangle)}, \quad p \in \mathbb{S}^2,$$

con  $\lambda = 1/(1 - |g|^2)^{1/2}$ ,  $\mu = (\lambda - 1)/|g|^2$  si  $g \neq 0$ ,  $F_0 = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$ . Entonces  $F_g$  es un difeomorfismo conforme de  $\mathbb{S}^2$  y:

$$F_g^* ds^2 = \frac{1 - |g|^2}{(1 - \langle p, g \rangle)^2} ds^2,$$

donde  $ds^2$  es la métrica canónica de  $\mathbb{S}^2$ . Definimos una aplicación  $H : D^3 \rightarrow \overline{D^3}$  por:

$$H(g) = \frac{1}{\text{área}(F_g^* ds^2)} \int_{\mathbb{S}^2} \phi(F_g^* ds^2).$$

$H$  puede extenderse a una aplicación continua  $\overline{D^3} \rightarrow \overline{D^3}$ , ya que si  $g_n \in D^3$  y  $g_n \rightarrow g \in \mathbb{S}^2$ , se tiene que las medidas  $F_{g_n}^* ds^2 / \text{área}(F_{g_n}^* ds^2)$  convergen a la medida de Dirac  $\delta(g)$ . Se tiene entonces que  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(g_n) = \phi(g)$ .

Si  $H(g) \neq 0$  para todo  $g \in \overline{D^3}$ , la aplicación  $g \mapsto H(g)/|H(g)|$  envía  $\overline{D^3}$  a  $\mathbb{S}^2$ , y la composición de  $\phi$  con esta aplicación es una aplicación continua  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  de grado no nulo. Esto implica que el morfismo inducido  $H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z})$  es no nulo, pero este morfismo es composición  $H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\overline{D^3}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z})$ ,

y puesto que  $H_2(\overline{D^3}, \mathbb{Z}) = 0$  llegamos a contradicción. Por tanto, existe  $g \in \overline{D^3}$  tal que  $H(g) = 0$ .  $g$  no puede pertenecer a  $\mathbb{S}^2$ , de modo que  $g \in D^3$ .  $H(g) = 0$  implica que

$$0 = \int_{\mathbb{S}^2} \phi(F_g^* ds^2) = \int_{\mathbb{S}^2} \phi \circ (F_g)^{-1} ds^2.$$

□

El teorema 2.10 nos garantiza que el problema de estabilidad para una inmersión minimal de una superficie compacta de género cuatro o cinco en una variedad con curvatura de Ricci no negativa es equivalente a un problema de estabilidad de una superficie minimal multivaluada en  $\mathbb{R}^3$ . Combinando este resultado con el teorema de compacidad que acabamos de probar, obtenemos:

**TEOREMA 5.9.** *Sea  $M$  una superficie compacta con género cuatro o cinco. Si  $\psi_k : M \rightarrow N_k$  es una sucesión de inmersiones isométricas estables con curvatura media constante en variedades con curvatura de Ricci no negativa, podemos extraer, salvo reparametrización, una subsucesión convergente de las estructuras conformes y una subsucesión convergente de métricas homotéticas a las métricas inducidas por las inmersiones  $\psi_n$ .*

#### 4. Comentarios

Los métodos que hemos utilizado para probar el teorema 5.6 permiten demostrar resultados de compacidad para superficies minimales con índice uno similares a los del capítulo 4. Concretamente:

**TEOREMA 5.10.** *Sean  $M$  una superficie compacta y orientable con género mayor o igual que tres,  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de estructuras conformes en  $M$ , y  $\psi_n : (M, J_n) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_n$  una sucesión de inmersiones minimales  $J_n$ -conformes con índice uno en cocientes de  $\mathbb{R}^3$  por subgrupos discretos de traslaciones  $\Gamma_n$ .*

*Entonces existe una sucesión de difeomorfismos  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:*

- (I) *Una subsucesión de las estructuras conformes  $\{\sigma_n^* J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una estructura conforme  $J$  en  $M$ .*
- (II) *Una subsucesión de las aplicaciones de Gauss  $\{\sigma_n^* \phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a una aplicación antiholomorfa  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ .*

En este caso, también obtenemos como consecuencia que el conjunto de estructuras conformes que admiten inmersiones minimales con índice uno es un subconjunto compacto.



## CAPÍTULO 6

### Ejemplos de superficies con curvatura media constante

En este capítulo construimos superficies embebidas con curvatura media constante en cocientes de la forma  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de traslaciones generado por vectores ortogonales. Partiendo de una superficie de Riemann compacta  $M$  con género menor o igual que tres y tres involuciones anticonformes o simetrías, construimos una aplicación armónica  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  que minimiza la energía en la clase de las aplicaciones equivariantes respecto de las involuciones de la superficie y de las simetrías con respecto a los tres planos coordenados de  $\mathbb{R}^3$ . A partir de esta aplicación armónica es sencillo construir una inmersión conforme con curvatura media constante  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de traslaciones generado por vectores ortogonales de rango igual al género de la superficie.

Caracterizamos estas superficies como las únicas superficies embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  que son simétricas respecto de tres superficies totalmente geodésicas que se cortan ortogonalmente y tales que las coordenadas de la aplicación de Gauss solo tienen dos regiones nodales. Teniendo en cuenta esta caracterización es fácil ver que nuestras familias de ejemplos contienen las piezas de género dos de las superficies doblemente periódicas  $\widetilde{M}_t^{0,\pi/4}$  construidas por Große Brauckmann en el teorema 3.3 de [29], que incluyen una de las superficies con curvatura media constante estudiadas por Lawson en [48].

El interés que presentan estas familias de superficies se debe a que incluyen todas las posibles soluciones del problema isoperimétrico con género positivo en las variedades  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de traslaciones generado por vectores ortogonales. Recordamos que el problema isoperimétrico ha sido resuelto en  $\mathbb{R}^3$  y en las variedades llanas con grupo fundamental cíclico, pero aún no se conoce su solución cuando la variedad ambiente es  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  o  $\mathbb{T}^3$ , donde  $\mathbb{T}^n$  es un toro llano  $n$ -dimensional.

En la primera sección de este capítulo definimos y estudiamos las superficies que parametrizarán las inmersiones. En la segunda sección construimos las aplicaciones armónicas que serán las aplicaciones de Gauss de las inmersiones y estudiamos propiedades de dichas aplicaciones. En la siguiente sección obtenemos las inmersiones y probamos que son embebimientos. En el cuarto apartado estudiamos los límites de los embebimientos construidos en la sección anterior. Por último, damos una caracterización geométrica de los ejemplos.

### 1. Superficies de Riemann

Denotaremos por  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ , respectivamente, a las superficies orientadas asociadas a las superficies de Riemann de los polinomios:

$$\begin{aligned} w^2 &= (z^2 + 1)(z^2 + (1/2)^2), \\ w^2 &= (z^2 + 1)(z^2 + (1/2)^2)(z^2 + 2^2), \\ w^2 &= (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2), \\ &\quad \text{con } a = (1/2)e^{i\pi/4}. \end{aligned}$$

Sobre  $M_i$  tenemos definidos tres difeomorfismos involutivos anticonformes  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{u}_2$  y  $\tilde{u}_3$ , dados por:

$$\tilde{u}_1(z, w) = (-\bar{z}, -\bar{w}), \quad \tilde{u}_2(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w}), \quad \tilde{u}_3(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}),$$

en los casos de géneros uno y dos, y por:

$$\tilde{u}_1(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w}), \quad \tilde{u}_2(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}), \quad \tilde{u}_3(z, w) = (1/\bar{z}, \bar{w}/\bar{z}^4),$$

en el caso de género tres.

Una *estructura casi compleja*  $J$  sobre  $M_g$  es una sección diferenciable del fibrado de endomorfismos sobre  $M_g$  tal que  $J^2 = -\text{Id}$  y tal que, para todo  $p \in M_g$  y  $x \in T_p M_g$ , tenemos que  $\{x, J(x)\}$  es una base positivamente orientada. A cada estructura casi compleja  $J$  le podemos asociar una estructura de superficie de Riemann en  $M_g$ . El espacio de todas las estructuras conformes  $\mathcal{C}(M_g)$  sobre  $M_g$  es una variedad diferenciable con la norma  $C^{r,\alpha}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

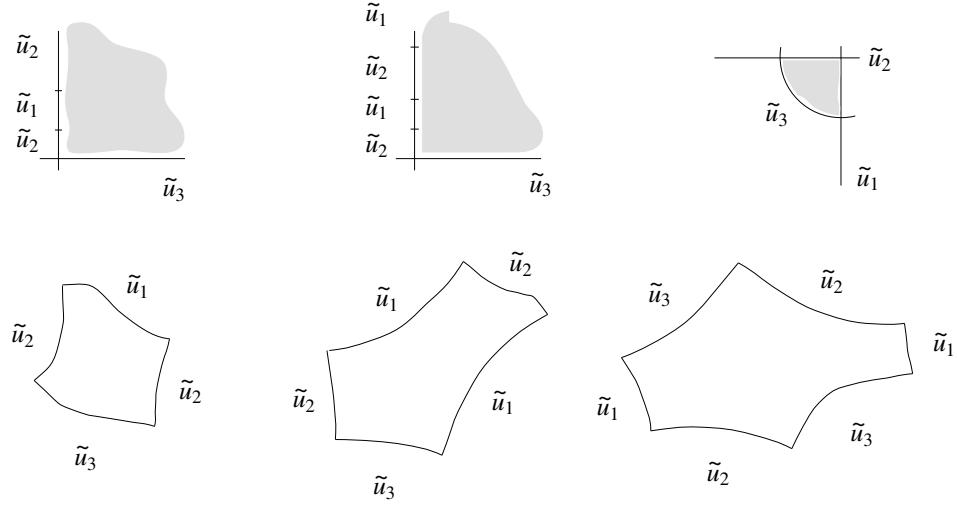
Consideramos el conjunto  $\Sigma_g \subset \mathcal{C}(M_g)$  de estructuras casi complejas  $J$  tales que  $\tilde{u}_i^* J = -J$ , es decir, tales que los difeomorfismos  $\tilde{u}_i$  son anticonformes en  $(M_g, J)$ . Diremos que involución anticonforme en una superficie de Riemann es una *simetría*. Por tanto,  $J \in \Sigma_g$  si y solo si  $\tilde{u}_i$  son simetrías en  $(M_g, J)$ . Si dotamos a  $\Sigma_g$  con la norma  $C^{r,\alpha}$  tenemos una aplicación diferenciable ( $= C^\infty$ ),  $\Sigma_g \longrightarrow \mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$ , que envía  $J$  a la métrica hiperbólica  $\nu_J$  de curvatura constante  $-1$  que induce la estructura casi compleja  $J$  sobre  $M_g$ . Hemos denotado por  $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$  al espacio de métricas Riemannianas simétricas (tales que las aplicaciones  $\tilde{u}_i$  son isometrías) de clase  $C^{r,\alpha}$  con la norma  $C^{r,\alpha}$ . El espacio  $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$  es un conjunto abierto de un espacio de Banach.

Si denotamos por  $F(\tilde{u}_i)$  al conjunto no vacío de puntos fijos de  $\tilde{u}_i$  tenemos que  $M \setminus \bigcup_{i=1}^3 F(\tilde{u}_i)$  tiene ocho componentes conexas, que son todas congruentes por medio de los difeomorfismos  $\tilde{u}_i$ , y tales que sus fronteras están formadas por la unión de género( $M_g$ ) + 3 curvas que se cortan transversalmente. Además, el conjunto  $M_g \setminus F(\tilde{u}_i)$  es la unión de dos componentes conexas que denotaremos por  $\Omega_i^+$  and  $\Omega_i^-$ . A partir de ahora fijaremos esas componentes exigiendo que  $\bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$  sea una de las regiones  $\text{Re}(z) > 0$ ,  $\text{Im}(z) > 0$  en los casos de género uno y dos o  $\text{Re}(z) < 0$ ,  $\text{Im}(z) < 0$ ,  $|z| < 1$  en el caso de género tres. La región  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$  aparece dibujada en la figura 1.

Podemos caracterizar las superficies de Riemann  $(M_g, J)$ , con  $J \in \Sigma_g$ , por medio del siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 6.1.** *Sea  $M$  una superficie de Riemann de género positivo  $g$  menor o igual que tres con tres simetrías distintas que comutan y tales que  $F(u_i)$  es no vacío para todo  $i = 1, 2, 3$ .*

*Entonces:*

FIGURA 1. Región  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$ 

- (I) Si  $g = 1, 2$  entonces existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M_g$  tal que  $f \circ u_i = \tilde{u}_i \circ f$ .
- (II) Si  $g = 3$  y  $F(u_i) \cap F(u_{i+1})$  es no vacío para todo  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $M \setminus \bigcup_{i=1}^3 F(u_i)$  es un hexágono tal que cada arista es una curva de puntos fijos de  $u_i$ . Si la disposición de dichas aristas se corresponde con las de la figura 2 entonces existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M_3$  tal que  $f \circ u_i = \tilde{u}_i \circ f$ .

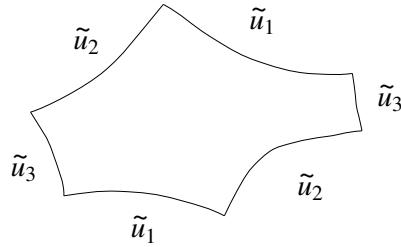


FIGURA 2

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las transformaciones conformes  $g_i = u_{i+1} \circ u_{i+2}$  para  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Llamemos  $G = \{\text{Id}, g_1, g_2, g_3\}$  y  $G_i = \{\text{Id}, g_i\}$  para  $i = 1, 2, 3$ . Tenemos que  $G$  y  $G_i$  son subgrupos de transformaciones conformes de  $M$ . Los cocientes  $M/G$  y  $M/G_i$  son superficies de Riemann de géneros  $\gamma$  y  $\gamma_i$ , respectivamente. La fórmula de Riemann-Hurwitz aplicada a  $M \rightarrow M/G$  y  $M \rightarrow M/G_i$  proporciona las siguientes igualdades:

$$(6.1) \quad 2g - 2 = \text{orden}(G_i)(2\gamma_i - 2) + B_i = 2(2\gamma_i - 2) + B_i,$$

$$(6.2) \quad 2g - 2 = \text{orden}(G)(2\gamma - 2) + B = 4(2\gamma - 2) + B,$$

y tenemos que  $B = \sum_{i=1}^3 B_i$ , donde  $B_i$  y  $B$  son los órdenes totales de ramificación de las aplicaciones  $M \rightarrow M/G_i$  y  $M \rightarrow M/G$ , ver [19, prop. v.1.10].

Sumando las dos primeras ecuaciones en  $i$  y restando la última obtenemos que

$$(6.3) \quad g + 2\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

Hacemos notar que siempre que  $F(u_{i+2}) \cap F(u_{i+1})$  sea no vacío tenemos que  $B_i > 0$ . En el caso  $g = 1$  es un ejercicio sencillo de álgebra lineal probar que, dadas tres simetrías distintas en un toro que comutan, el conjunto de puntos fijos de dos de ellas siempre se cortan.

Si  $g = 1$  entonces, puesto que por la observación anterior  $B_i > 0$  para algún  $i$ , obtenemos a partir de (6.1) que  $\gamma_i = 0$  y, por tanto, que  $\gamma = 0$ . Podemos suponer entonces por (6.3) que  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (0, 1, 0)$ .

Si  $g = 2$  tenemos siempre que  $B_i > 0$  para todo  $i$  por la ecuación (6.1) y, por tanto,  $\gamma_i \leq 1$ . Se sigue de (6.3) que  $\gamma = 0$  y podemos suponer que  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 1, 0)$ .

Si  $g = 3$  entonces, como  $B_i > 0$  para todo  $i$  ya que  $F(u_{i+2}) \cap F(u_{i+1})$  es no vacío, concluimos de la ecuación (6.1) que  $\gamma_i \leq 1$ . Obtenemos entonces de (6.3) que  $\gamma = 0$  y, por tanto,  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 1, 1)$ .

Como consecuencia, cuando  $g = 1, 2$  deducimos que la aplicación  $M \rightarrow M/G_3 \cong \overline{\mathbb{C}}$  está ramificada sobre cuatro o seis puntos de  $\overline{\mathbb{C}}$  con ramificación de orden uno. Puesto que  $u_i \circ g_3 = g_3 \circ u_i$ , las involuciones  $u_i$  se proyectan a involuciones  $\bar{u}_i$  en  $\overline{\mathbb{C}}$  con conjunto de puntos fijos no vacío, y tenemos que  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$  y que las involuciones  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_3$  comutan. Por tanto podemos suponer que  $\bar{u}_1(z) = -\bar{z}$  y  $\bar{u}_3(z) = \bar{z}$ . Esto implica que los valores de ramificación están en  $\text{Re}(z) = 0$  y son simétricos con respecto a  $\bar{u}_3$ . Podemos suponer que estos puntos son  $\pm i$ ,  $\pm ia$ , con  $0 < a < 1$  en el caso de género uno, y  $\pm i$ ,  $\pm ia$ ,  $\pm ib$ , con  $0 < a < 1 < b$  en el caso de género dos, lo que implica que  $M$  es conforme a una de las dos superficies de Riemann:

$$\begin{aligned} w^2 &= (z^2 + 1)(z^2 + a^2), & 0 < a < 1, \\ w^2 &= (z^2 + 1)(z^2 + a^2)(z^2 + b^2), & 0 < a < 1 < b, \end{aligned}$$

y que  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  son levantamientos de  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$  y  $\bar{u}_3$ . En estas condiciones, un argumento elemental de teoría de revestimientos implica el resultado para  $g = 1, 2$ .

Si  $g = 3$  hacemos notar en primer lugar que  $M \rightarrow M/G \cong \overline{\mathbb{C}}$  es un revestimiento normal (de Galois), ramificado, con cuatro hojas y 12 puntos de ramificación con ramificación de orden uno. Puesto que los puntos fijos de  $g_i$  son permutados por la acción de  $u_i$  tenemos seis valores de ramificación. Todas las simetrías  $u_i$  inducen la misma simetría  $\bar{u}$  en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Podemos suponer que  $\bar{u}(z) = \bar{z}$  y, por tanto, podemos suponer que los valores de ramificación son  $a_1 < \dots < a_6$ .

Cada componente conexa de  $M \setminus \bigcup_{i=1}^3 F(u_i)$  es la preimagen de una de las semiesferas  $\text{Re}(z) \neq 0$  y es, por tanto, un hexágono. Si suponemos que las curvas de puntos fijos están distribuidas como en la figura 2, entonces podemos suponer que la proyección de estas curvas a  $\overline{\mathbb{C}}$  es como en la figura 3:

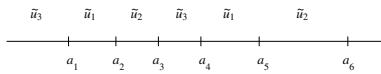


FIGURA 3

Sea  $S' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_6\}$  y  $M' = z^{-1}(S')$ . Calculamos la imagen del grupo fundamental de  $M'$  en  $\pi_1(S')$ . Sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_5$  lazos basados en el mismo punto que dan una vuelta alrededor de  $a_1, \dots, a_5$ . Estos lazos generan  $\pi_1(S')$ . Tenemos entonces  $\pi_1(M') \subset \pi_1(S')$  es un subgrupo normal de índice cuatro tal que  $\pi_1(S')/\pi_1(M')$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  y, por tanto, es el núcleo de un morfismo  $\pi_1(S') \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Definimos este morfismo sobre los generadores  $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ . Es claro que la curva  $\gamma_i$  levanta a una curva cerrada en  $M/G_k$  si y solo si el punto  $a_i$  es la imagen de un punto fijo de  $g_k$ . Esto prueba que si  $\gamma_j$  da una vuelta alrededor de un punto fijo de  $g_l$ , con  $l \neq k$ , entonces  $\gamma_i * \gamma_j^{-1}$  no levanta a una curva cerrada en  $M/G_k$ . Por tanto  $\pi_1(M') \subset \pi_1(S')$  debe ser el núcleo del morfismo:

$$\begin{aligned}\gamma_1, \gamma_4 &\longmapsto (1, 0), \\ \gamma_2, \gamma_5 &\longmapsto (0, 1), \\ \gamma_3 &\longmapsto (1, 1),\end{aligned}$$

y un argumento elemental de teoría de revestimientos demuestra que, puesto que los anteriores argumentos se pueden aplicar a la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2)$ , con  $a = (1/2)e^{i\pi/4}$ , existe un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M_3$  tal que  $f \circ u_i = \tilde{u}_i \circ f$  para todo  $i$ .  $\square$

En la anterior demostración hemos probado que las superficies de Riemann que estamos estudiando son conformes a las superficies de Riemann de ciertos polinomios. La siguiente proposición enuncia este resultado y proporciona una representación para las superficies hiperelípticas de género tres:

PROPOSICIÓN 6.2.

(I) *Si  $J \in \Sigma_1$  entonces  $(M_1, J)$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio:*

$$(6.4) \quad w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2), \quad \text{con } 0 < a < 1.$$

(II) *Si  $J \in \Sigma_2$  entonces  $(M_2, J)$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio:*

$$(6.5) \quad w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)(z^2 + b^2), \quad \text{con } 0 < a < 1 < b < \infty.$$

(III) *Si  $J \in \Sigma_3$  y  $(M_3, J)$  es una superficie hiperelíptica, entonces es conforme a la superficie de Riemann del polinomio:*

$$(6.6) \quad w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2),$$

con  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ ,  $\text{Re}(a)$ ,  $\text{Im}(a) > 0$ .

Además las simetrías  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , se corresponden, en los dos primeros casos, con las simetrías:

$$\tilde{u}_1(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w}), \quad \tilde{u}_2(z, w) = (-\bar{z}, -\bar{w}), \quad \tilde{u}_3(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}),$$

y, en el tercer caso, con las simetrías:

$$\tilde{u}_1(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w}), \quad \tilde{u}_2(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}), \quad \tilde{u}_3(z, w) = (1/\bar{z}, \bar{w}/\bar{z}^4).$$

DEMOSTRACIÓN. Solo necesitamos probar (III). Sean  $z : (M_3, J) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  la proyección hiperelíptica y  $g$  la involución hiperelíptica. Puesto que  $g$  conmuta con todas las transformaciones anticonformes de  $(M_3, J)$ , las simetrías  $\tilde{u}_i$  se inducen en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Llamemos  $\bar{u}_i$  a las simetrías inducidas. Hacemos notar que  $\bar{u}_i \neq \bar{u}_j$  siempre que  $i \neq j$ , ya que, en caso contrario,  $u_i \circ u_j$  sería la involución  $g$ , lo que no es posible ya

que el género de  $M_3/G_i$  es uno por la proposición 6.1. Podemos suponer entonces que  $\bar{u}_1(z) = -\bar{z}$ ,  $\bar{u}_2(z) = \bar{z}$  y  $\bar{u}_3(z) = 1/\bar{z}$ .

Afirmamos que los valores hiperelípticos no son puntos fijos de ninguna simetría  $\bar{u}_i$ , lo que claramente implica el resultado: puesto que los valores hiperelípticos son permutados por las simetrías  $\bar{u}_i$  tenemos que o todos ellos son fijos por alguna simetría o ninguno de ellos es fijo. Supongamos que todos ellos son fijos. Puesto que hay ocho valores hiperelípticos y sólo seis puntos fijos comunes a dos simetrías  $\bar{u}_i$ , hay un punto (de hecho dos) que es un punto fijo de una única simetría. El punto hiperelíptico  $p$  correspondiente a este valor es fijo por una única simetría  $\tilde{u}_i$  de  $M_3$ . Como la curva  $C$  de puntos fijos de  $\tilde{u}_i$  que pasa a través de  $p$  es simétrica con respecto a la involución hiperelíptica llegamos a una contradicción porque el punto más próximo en  $C$  a  $p$  fijo por otra simetría  $\tilde{u}_j$  y su simétrico por  $g$  no se ajustan a la configuración de la figura 2. Esta contradicción prueba la afirmación y, por tanto, el apartado (iii) de la proposición.  $\square$

**Nota.** Las superficies  $(M_g, J)$ , con  $J \in \Sigma_g$ , se pueden obtener identificando adecuadamente una unión de polígonos hiperbólicos de  $g+3$  lados cuyas aristas se cortan ortogonalmente. Puesto que las familias de cuadriláteros, pentágonos y hexágonos hiperbólicos en estas condiciones depende de uno, dos o tres parámetros reales tenemos que nuestras familias de superficies de Riemann dependen de hecho de este número de parámetros, que coinciden con la dimensión del espacio de Teichmüller de estructuras conformes simétricas sobre  $M_g$ .

## 2. Aplicaciones armónicas

Denotaremos por  $A_i$  a la simetría con respecto al plano  $x_i = 0$ . Diremos que una aplicación  $\phi : M_g \rightarrow \mathbb{S}^2$  es *simétrica* si  $\phi \circ \tilde{u}_i = A_i \circ \phi$  para  $i = 1, 2, 3$ .

El resultado principal de esta sección es:

**TEOREMA 6.3.** *Sea  $J \in \Sigma_g$ , con  $g = 1, 2, 3$ . Existe una aplicación armónica simétrica  $\phi : M_g \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que:*

- (I)  *$E(\phi) \leq E(\nu)$  para toda aplicación simétrica  $\nu : M_g \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Si se da la igualdad, entonces  $\nu$  se obtiene como composición de  $\phi$  con simetrías respecto de algunos de los planos  $A_i$ .*
- (II) *O bien las líneas nodales de  $\phi_i$  coinciden con el conjunto de puntos fijos de  $u_i$ , o bien  $\phi_1 \equiv 0$ . Esta última posibilidad solo puede darse si el género de  $M_i$  es uno y  $\phi$  es la proyección de la aplicación de Gauss de un cilindro circular recto de  $\mathbb{R}^3$ .*
- (III) *Si  $\nu : M_g \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación  $J$ -armónica tal que el conjunto nodal de  $\nu_i$  coincide con el conjunto de puntos fijos de  $u_i$ , entonces, salvo composición con algunas simetrías  $A_i$ , se tiene que  $\nu = \phi$ .*
- (IV)  *$|\text{grado}(\phi)| = \text{género}(M_g) - 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La existencia y regularidad de la aplicación se sigue del trabajo de Lemaire [49]. Indicamos brevemente su demostración. Sea  $\phi_n \in H^1(M, \mathbb{S}^2)$  una sucesión minimizante para la energía en la clase de las aplicaciones simétricas. Al menos siempre existe una aplicación simétrica en  $M$ : en el caso de que el género de  $M$  sea tres, basta considerar la aplicación  $z$ ; en los casos de géneros uno y dos, dicha aplicación se construirá en la proposición 6.10. Reemplazando  $\phi_n$  por la

aplicación:

$$\left. \begin{array}{ll} (\phi_1, \phi_2, |\phi_3|), & \text{en } \Omega_3^+, \\ (\phi_1, \phi_2, -|\phi_3|), & \text{en } \Omega_3^-, \end{array} \right\}$$

y así sucesivamente, obtenemos una nueva sucesión minimizante de aplicaciones simétricas tales que  $(\phi_n)_i \geq 0$  en  $\Omega_i^+$  y  $(\phi_n)_i \leq 0$  en  $\Omega_i^-$ . Puesto que  $E_J(\phi_n)$  es acotada, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente, que denotaremos igual, en  $H^1(M, \mathbb{S}^2)$  a una aplicación  $\phi$ . Puesto que podemos suponer que dicha sucesión también converge en  $L_2(M, \mathbb{S}^2)$  y que converge puntualmente, tenemos que  $\phi$  es una aplicación simétrica tal que  $(\phi)_i \geq 0$  en  $\Omega_i^+$  y  $(\phi)_i \leq 0$  en  $\Omega_i^-$ , que minimiza la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.

Por tanto se sigue del trabajo de Lemaire [49] que  $\phi$  es una aplicación armónica diferenciable que verifica la ecuación:

$$(6.7) \quad \Delta\phi + |\nabla\phi|^2 \phi = 0.$$

Como  $\phi_i \geq 0$  en  $\Omega_i^+$ , se sigue del principio del máximo para operadores elípticos que, o bien  $\phi_i > 0$ , o bien  $\phi_i \equiv 0$  en  $\Omega_i^+$ . Si  $p$  es un punto fijo de  $g_i = \tilde{u}_{i+1} \circ \tilde{u}_{i+2}$  tenemos que  $\phi_i(p) = \pm 1$  y, por tanto, podemos suponer que  $\phi_i > 0$  en  $\Omega_i^+$  y, por simetría, tenemos que  $\phi_i < 0$  en  $\Omega_i^-$ . Cuando  $g \geq 2$  podemos siempre encontrar un punto en estas condiciones. Cuando  $g = 1$  podemos encontrar puntos fijos de  $g_2$  y de  $g_3$  y se tiene que  $\phi_2$  y  $\phi_3$  no son idénticamente cero. Sin embargo, puesto que no hay puntos fijos de  $g_1$  no podemos excluir la posibilidad  $\phi_1 \equiv 0$ . En este caso la imagen de  $\phi$  está contenida en el ecuador  $x_1 = 0$  de  $\mathbb{S}^2$  y  $\phi$  debe ser la aplicación de Gauss de un cilindro circular recto de  $\mathbb{R}^3$ . Esto prueba (ii).

Ahora probamos (i). Si  $E(\phi) = E(\nu)$  para alguna aplicación simétrica  $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ , entonces las líneas nodales de  $\nu_i$  también son líneas nodales de  $\phi_i$ . Como  $\phi_i$  es positiva en  $\Omega_i^+$  y negativa en  $\Omega_i^-$ , es la primera función propia del problema de Dirichlet del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en los abiertos  $\Omega_i^+$  y  $\Omega_i^-$ , y tenemos, por la caracterización variacional del primer valor propio del problema de Dirichlet en  $\Omega_i^\pm$ , que  $\int_{\Omega_i^\pm} \{|\nabla\nu_i|^2 - |\nabla\phi|^2 \nu_i^2\} \geq 0$ , y se tiene que:

$$(6.8) \quad \int_M |\nabla\nu_i|^2 - |\nabla\phi|^2 \nu_i^2 \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

sumando en  $i$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^3 \int_M |\nabla\nu_i|^2 - |\nabla\phi|^2 \nu_i^2 = \int_M \{|\nabla\nu|^2 - |\nabla\phi|^2\} \\ &= E(\nu) - E(\phi) = 0, \end{aligned}$$

y, por tanto, la igualdad se da en (6.8). Entonces  $\nu_i$  es también una primera función propia de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en  $\Omega_i^+$ . Puesto que siempre hay un punto  $p \in \Omega_i^+$  fijo por  $g_i$ , para  $i = 2, 3$  tenemos que  $\nu_i = \pm\phi_i$  en  $\Omega_i^+$  para  $i = 2, 3$  y, por continuación única, en todo  $M$ . Esto implica que  $\phi_1 = \pm\nu_1$  y prueba la afirmación de unicidad en (i).

Para probar (iii), solo hay que tener en cuenta que las coordenadas de  $\nu_i$  son las primeras funciones propias del operador  $\Delta + |\nabla\nu|^2$  en  $\Omega_i^\pm$ , lo que implica como en la demostración del apartado (i) que  $E(\nu) \leq E(\phi)$  y, por tanto, que  $E(\nu) = E(\phi)$ .

Para probar (iv) consideremos el punto  $(-1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$ . Los puntos en el conjunto  $\phi^{-1}\{(-1, 0, 0)\}$  son los puntos fijos comunes de  $\tilde{u}_2$  y  $\tilde{u}_3$ . Se sigue del principio

del máximo en la frontera que  $(-1, 0, 0)$  es un valor regular de  $\phi$  y, de nuestra descripción de las superficies  $M_i$ , que  $\text{signo}(d\phi)_p = -1$  para todo  $p \in \phi^{-1}\{(-1, 0, 0)\}$ . Contando el número de puntos en  $\phi^{-1}\{(1, 0, 0)\}$ , ver figura 1, probamos (iv).  $\square$

Si  $J \in \Sigma_g$ , denotaremos por  $\phi_J$  a la única aplicación armónica simétrica  $\phi : (M_g, J) \rightarrow \mathbb{S}^2$  que es un mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas y tal que  $(\phi_J)_i < 0$  en  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$  siempre que  $(\phi_J)_1 \not\equiv 0$  o tal que  $(\phi_J)_i < 0$  si  $i \neq 1$  en caso contrario. Con esta elección  $\phi_J$  siempre tiene grado no negativo.

**Nota.** Podemos obtener simetrías adicionales de las aplicaciones  $\phi_J$  por medio del siguiente argumento. Sea  $\phi_J : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Si  $g : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo  $J$ -conforme o anticonforme y  $A$  es una isometría de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $E_J(A^{-1} \circ \phi \circ g) = E(\phi)$  y, si  $A^{-1} \circ \phi \circ g$  es una aplicación simétrica entonces  $A^{-1} \circ \phi \circ g$  es igual a  $\phi$  salvo composición con algunas aplicaciones  $A_i$  y, por tanto,  $g$  extiende a una simetría de la aplicación de Gauss.

Si consideramos la subfamilia  $w^2 = (z^2 + a^2)(z^2 + 1)(z^2 + (1/a)^2)$ , con  $0 < a < 1$ , entonces se puede comprobar fácilmente que:

$$\begin{aligned} u_4(z, w) &= \left(\frac{1}{z}, \frac{\bar{w}}{\bar{z}^3}\right), \\ u_5(z, w) &= \left(\frac{1}{z}, -\frac{\bar{w}}{\bar{z}^3}\right), \end{aligned}$$

extienden a las simetrías  $A_4$  y  $A_5$  con respecto a los planos  $x_1 = x_2$  y  $x_1 = -x_2$ , respectivamente.

Las aplicaciones  $\phi_J$  son anticonformes solo en un caso especial:

**PROPOSICIÓN 6.4.** *Sea  $J \in \Sigma_g$ . Entonces  $\phi_J$  es antiholomorfa si y solo si  $g = 3$  y  $(M_3, J)$  es una superficie hiperelíptica. En este caso, la proyección hiperelíptica  $z$  es la proyección estereográfica de  $\phi_J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $(M_g, J)$ , con  $J \in \Sigma_g$ . Si  $\phi$  es antiholomorfa, componiendo con una isometría de  $\mathbb{S}^2$  que invierta la orientación, obtenemos una aplicación holomorfa a  $\mathbb{S}^2$  de grado  $g-1$ . Puesto que una aplicación holomorfa de grado cero es constante y no hay aplicaciones holomorfas de grado uno en superficies de Riemann de género dos, concluimos que  $g = 3$  y  $(M_3, J)$  es hiperelíptica.

Si  $(M_3, J)$  es hiperelíptica, entonces  $(M_3, J)$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a}^2))$  y, claramente, la proyección hiperelíptica  $z$  verifica  $z \circ \tilde{u}_1 = -\bar{z}$ ,  $z \circ \tilde{u}_2 = \bar{z}$  y  $z \circ \tilde{u}_3 = 1/\bar{z}$ , donde  $u_1(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w})$ ,  $u_2(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$  y  $u_3(z, w) = (1/\bar{z}, \bar{w}/\bar{z}^4)$ . Esto implica que la composición de  $z$  con la proyección estereográfica es una aplicación anticonforme  $\phi : (M_3, J) \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que las regiones nodales de las coordenadas de  $\phi$  son los complementos de las curvas de puntos fijos de  $\tilde{u}_i$ , y terminamos aplicando el apartado (iii) del teorema 6.3.  $\square$

Estudiamos ahora la dependencia diferenciable de las aplicaciones con respecto a las estructuras conformes.

Por el teorema 6.3 tenemos una aplicación bien definida:

$$\Sigma_g \longrightarrow C_{sim}^{r,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2),$$

que envía  $J \in \Sigma_g$  a la aplicación armónica  $\phi_J$ , donde  $C_{sim}^{k,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2)$  es el espacio de aplicaciones simétricas  $M_g \rightarrow \mathbb{S}^2$  cuyas diferenciales de orden menor o igual que

$k$  satisfacen una condición de Hölder con respecto a  $\alpha$ . Con la topología asociada  $C_{sim}^{k,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2)$  es una variedad diferenciable modelada sobre un espacio de Banach.

Para estudiar la diferenciabilidad de dicha aplicación necesitaremos la siguiente extensión de un resultado de Eells y Lemaire:

**TEOREMA 6.5 ([15]).** *Supongamos que  $\phi_0 : (M_i, g_0) \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación armónica diferenciable ( $= C^\infty$ ) y que no hay campos de Jacobi simétricos a lo largo de  $\phi_0$ .*

*Entonces, para  $k, r \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $g_0$  en  $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$  y una única aplicación  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow C_{sim}^{r+2,\alpha}(M_i, \mathbb{S}^2)$  de clase  $C^k$  tal que  $\Phi(g_0) = \phi_0$  y  $\Phi(g) : (M_i, g) \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación armónica simétrica.*

Diremos que un campo vectorial  $V$  a lo largo de una aplicación  $\phi : M_g \rightarrow \mathbb{S}^2$  es *simétrico* si  $V \circ \tilde{u}_i = A_i(V)$  para todo  $i = 1, 2, 3$ . Recordamos que un campo  $V$  a lo largo de una una aplicación  $\phi : M_g \rightarrow \mathbb{S}^2$  es *de Jacobi* si verifica la ecuación diferencial:

$$(6.9) \quad -J_{\phi_0}(V) = \text{traza } \nabla_\phi^2 V + \text{traza } R^{\mathbb{S}^2}(d\phi_0, V) d\phi_0,$$

donde  $R^{\mathbb{S}^2}$  es el tensor de curvatura de  $\mathbb{S}^2$ , ver [15].

Para aplicar este resultado a nuestra situación hay que tener en cuenta que la aplicación  $\Sigma_g \rightarrow C_{sim}^{r,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2)$  puede ponerse como composición:

$$\Sigma_g \rightarrow \mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha} \rightarrow C_{sim}^{r,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2),$$

donde la primera aplicación envía  $J$  a la métrica hiperbólica  $\nu_J$  con curvatura constante  $-1$  en  $M_g$  que induce la estructura casi compleja  $J$ . El conjunto  $\Sigma_g$  está dotado de la norma  $C^{r+1,\alpha}$ . Es bien conocido que  $\nu_J$  es una métrica simétrica. La segunda aplicación envía cada métrica  $g \in \mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$  a  $\phi_J$ , donde  $J$  es la estructura casi compleja asociada a  $g$ .

Por tanto, si no existen campos de Jacobi simétricos a lo largo de  $\phi_{J_0}$  podemos encontrar un entorno  $U$  de  $J_0$  en  $\Sigma_g$  y una aplicación diferenciable  $\Phi : U \rightarrow C_{sim}^{r,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2)$  tal que  $\Phi(J_0) = \phi_{J_0}$  y  $\Phi(J)$  es una aplicación  $J$ -armónica y simétrica. Quedaría probar que si  $J \in U$  entonces  $\Phi(J) = \phi_J$ . Resolvemos estas cuestiones en los dos siguientes lemas:

**LEMA 6.6.** *Sea  $J \in \Sigma_g$  con  $g \geq 2$ . Entonces no hay campos de Jacobi simétricos a lo largo de  $\phi_J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $V = \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\phi_J$ , entonces se tiene, por la ecuación (6.9), que  $\int_M \{ |dV|^2 - |\nabla \phi|^2 |V|^2 \} dA = 0$ , donde  $dA$  es el elemento de área asociado a cualquier métrica  $g$  compatible con la estructura conforme  $J$ , la norma  $|dV|^2$  se define como  $|dV|^2 = \sum_{i,j} e_j(f_i)^2$ , y  $\{e_1, e_2\}$  es una base  $g$ -ortonormal en  $T_p M$ . En consecuencia obtenemos que:

$$(6.10) \quad \sum_{i=1}^3 \int_M \{ |\nabla f_j|^2 - |\nabla \phi|^2 f_j^2 \} dA = 0.$$

Si  $V$  es simétrico entonces  $f_i = 0$  en los puntos fijos de  $u_i$ . Esto implica, puesto que  $\phi_i$  es la primera función propia del problema de Dirichlet en  $\Omega_i^\pm$  con valor propio cero del operador  $\Delta + |\nabla \phi|^2$ , que:

$$\int_{\Omega_i^\pm} \{ |\nabla f_j|^2 - |\nabla \phi|^2 f_j^2 \} dA \geq 0,$$

y, por la ecuación (6.10), la igualdad se da en la anterior desigualdad. Entonces  $f_i$  es también una primera función propia de  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  con valor propio 0 para el problema de Dirichlet en  $\Omega_i^+$ . Deducimos que  $f_i = \lambda_i\phi_i$  para algún número real  $\lambda_i$  y, como  $V$  es tangente a  $\mathbb{S}^2$ , tenemos que:

$$0 = \langle \phi, V \rangle = \lambda_1\phi_1^2 + \lambda_2\phi_2^2 + \lambda_3\phi_3^2.$$

Tomando puntos en  $M_g$  fijos por  $g_i$  deducimos que  $\lambda_i = 0$  y, por tanto, que  $V = 0$ .  $\square$

**LEMA 6.7.** *Supongamos que  $g \geq 2$ . Consideremos una aplicación diferenciable  $\Phi : U \subset \Sigma_g \rightarrow C_{sim}^{r+2,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2)$ , donde  $U$  es un entorno abierto conexo de  $J_0$  tal que  $\Phi(J_0) = \phi_{J_0}$ .*

*Entonces  $\Phi(J) = \phi_J$  para todo  $J \in U$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Probaremos que  $\Phi(J)_i > 0$  en  $\Omega_i^+$  para  $J \in U$ . Concluimos entonces aplicando el apartado (iii) del teorema 6.3.

Consideremos el conjunto:

$$A = \{J \in U; \Phi(J)_i > 0 \text{ en } \Omega_i^+\},$$

que es no vacío ya que  $J_0 \in A$ . Veamos que  $A$  es cerrado en  $U$ . Si  $J_n \in A$  y  $J_n \rightarrow J \in U$  entonces  $\Phi(J_n)_i \geq 0$  en  $\Omega_i^+$ . Si  $\Phi(J_n)_i(p) = 0$  para algún  $p \in \Omega_i^+$  entonces, como  $\Phi(J_n)_i$  no puede ser idénticamente cero, una línea nodal de  $\Phi(J_n)_i$  pasa por  $p$  y, por tanto,  $\Phi(J_n)_i$  cambia de signo en un entorno de  $p$ . Esto implica que  $\Phi(J_n)_i$  cambia de signo en un entorno de  $p$  para  $n$  suficientemente grande, lo que nos lleva a contradicción.

Veamos ahora que  $A$  es abierto en  $U$ . Supongamos que existe  $J \in A$  y una sucesión  $J_n \in U \setminus A$  tal que  $J_n \rightarrow J$ . Como  $J_n \notin A$  existe una sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_i^+$  tal que  $\Phi(J_n)_i(p_n) \leq 0$ . Podemos suponer que  $p_n \rightarrow p \in \overline{\Omega_i^+}$  y entonces tenemos que  $\Phi(J)_i(p) \leq 0$ . Como  $J \in A$  obtenemos que  $p \in \partial\Omega_i^+$  y que  $\Phi(J)_i(p) = 0$ . Sea  $n$  un normal a  $F(\tilde{u}_i)$  alrededor de  $p$  apuntando hacia  $\Omega_i^+$ . Como  $\Phi(J)$  es armónica, el principio del máximo en la frontera implica que  $n(\Phi(J)_i) > 0$  y, por tanto, tenemos que  $n(\Phi(J_k)) > 0$  para  $k$  suficientemente grande. Puesto que  $\Phi(J_k)$  es una aplicación simétrica tenemos que  $\Phi(J_k)_i = 0$  en  $F(\tilde{u}_i)$  y  $\Phi(J_k)_i > 0$  cerca de  $p$  en  $\Omega_i^+$  para  $k$  suficientemente grande. Esta contradicción demuestra que  $A$  es cerrado en  $U$ .

Por la conexión de  $U$  tenemos que  $A = U$  y como  $i$  es arbitrario hemos probado el lema.  $\square$

De los lemas 6.6 y 6.7 y del teorema 6.5 se sigue la diferenciabilidad de la aplicación  $J \mapsto \phi_J$ :

**TEOREMA 6.8.** *Si  $g \geq 2$ , entonces la aplicación  $\Sigma_g \rightarrow C_{sim}^{k,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2)$  que envía  $J \in \Sigma_g$  a la aplicación  $\phi_J$  es diferenciable ( $= C^\infty$ ) para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , y  $0 < \alpha < 1$ .*

**Nota.** La misma demostración prueba que no hay campos de Jacobi simétricos cuando  $g = 1$  y la aplicación armónica  $\phi_J$  no está contenida en un ecuador de  $\mathbb{S}^2$ . No obstante, si  $(\phi_J)_1 \equiv 0$ , consideramos la primera función propia  $u$  para el problema de Dirichlet del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  en  $\Omega_1^-$ , para una métrica simétrica compatible con la estructura conforme, y la extendemos diferenciablemente a todo  $M_1$ . Los argumentos del lema 6.6 prueban que el espacio de campos de Jacobi

simétricos a lo largo de  $\phi_J$  es de dimensión uno y está generado por  $d\phi_J(u \frac{\partial}{\partial x_1})$ . Por tanto, en el caso de género uno, si  $\phi_1 \equiv 0$ , no podemos garantizar la dependencia diferenciable de las aplicaciones  $\phi_J$  con respecto a las estructuras conformes.

Estudiamos ahora las estructuras conformes  $J \in \Sigma_g$ ,  $g \geq 2$ , para las que las aplicaciones  $\phi_J$  son mínimo de la energía. Tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 6.9. *Sean  $g \geq 2$ ,  $F(J) = E_J(\phi_J)$ .*

*Se tiene entonces que los puntos críticos de  $F : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{R}$  son las estructuras conformes  $J$  para las que  $\phi_J$  es antiholomorfa.*

*Más aún,  $F : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  no tiene puntos críticos y los puntos críticos de  $F : \Sigma_3 \rightarrow \mathbb{R}$  son las estructuras conformes  $J \in \Sigma_3$  para las que  $(M, J)$  es hiperelíptica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $J_0 \in \Sigma_g$  y  $\phi_0 = \phi_{J_0}$ . Supongamos que  $dF_{J_0} = 0$ . Sea  $g_0$  una métrica simétrica en  $M$  que induce la estructura conforme  $J_0$ .

Consideremos una variación diferenciable  $g(t)$  de  $g_0$  por métricas simétricas de modo que el soporte de la variación este contenido en un abierto coordenado  $V$  simétrico contenido en el complemento de las curvas de puntos fijos de  $u_i$ . Cada  $g(t)$  induce una estructura conforme  $J(t)$  que está en  $\Sigma_g$ .

De la definición de  $F$  se sigue que  $F(J(t)) \leq E_{J(t)}(\phi_0)$ . Además  $F(J(0)) = E_{J(0)}(\phi_0)$ . Por tanto, las derivadas de dichas funciones coinciden en  $t = 0$  y tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= dF_{J_0}(J'(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(J(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E_{J(t)}(\phi_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M |\nabla \phi_0|_t^2 dA_t \\ &= \int_M \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_{i,j} g^{ij}(t) \langle d\phi_0(e_i), d\phi_0(e_j) \rangle \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dA_0, \end{aligned}$$

donde  $|\nabla \phi_0|_t^2$  y  $dA_t$  son la densidad de energía y el elemento de área con respecto a la métrica riemanniana  $g(t)$ ,  $\{e_1, e_2\}$  es una  $g_0$  base ortonormal en  $V$ ,  $(g^{ij})$  es la matriz inversa de  $(g_{ij})$  y  $g_{ij}(t) = g_t(e_i, e_j)$ . Calculamos la anterior derivada y obtenemos que es igual a:

$$\begin{aligned} \int_M \frac{1}{2} (g'_{11}(0) - g'_{22}(0)) &\left\{ |d\phi_0(e_1)|^2 - |d\phi_0(e_2)|^2 \right\} (p) \\ &- 2g'_{12}(0) \langle d\phi_0(e_1), d\phi_0(e_2) \rangle (p) dA_0. \end{aligned}$$

Como  $g'_{11}(0) - g'_{22}(0)$  y  $g'_{12}(0)$  se pueden elegir arbitrariamente, obtenemos que  $|d\phi_0(e_1)|^2 - |d\phi_0(e_2)|^2$  y  $\langle d\phi_0(e_1), d\phi_0(e_2) \rangle$  son iguales a cero en  $V$ . Se sigue fácilmente por continuidad que  $\phi_0$  es conforme o anticonforme.  $\square$

Podemos acotar la energía de las aplicaciones de Gauss uniformemente por medio del siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 6.10.

- (I) *Si  $J \in \Sigma_1$ , entonces  $0 < E_J(\phi_J) < 16\pi$ ,*
- (II) *Si  $J \in \Sigma_2$ , entonces  $8\pi < E_J(\phi_J) < 24\pi$ .*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la desigualdad:

$$(6.11) \quad E(\phi) \geq 2 \operatorname{area}(\phi) = 2 \int_M |\operatorname{Jac}(\phi)|,$$

ver [49], donde la igualdad se da si y sólo si  $\phi$  es conforme o anticonforme. Puesto que la integral de la derecha en (6.11) está acotada inferiormente por

$$\operatorname{area}(\mathbb{S}^2) \operatorname{grado}(\phi) = 4\pi(g-1),$$

tenemos que  $E(\phi) \geq 8\pi(g-1)$ . Si la igualdad se da en esta desigualdad tenemos también igualdad en (6.11) y esto implicaría que  $\phi$  es conforme o anticonforme, lo que no es posible por la proposición 6.4. Esto prueba la cota inferior.

Para obtener la cota superior consideremos las funciones meromorfas:

$$\begin{aligned} f(z, w) &= \frac{iw}{(z-i)(z-ia)} \quad \text{en } w^2 = (z^2+1)(z^2+a^2), \\ f(z, w) &= \frac{-iw}{(z-i)(z-ia)(z-ib)} \quad \text{en } w^2 = (z^2+1)(z^2+a^2)(z^2+b^2). \end{aligned}$$

Hacemos notar que las primeras funciones tienen grado dos y las segundas grado tres, y verifican:

$$f \circ h_1 = -\bar{f}, \quad f \circ h_2 = \bar{f}, \quad f \circ h_3 = \frac{1}{\bar{f}}.$$

Por tanto, la composición con la inversa de la proyección estereográfica proporcionaría una aplicación simétrica anticonforme  $\eta$  cuya energía es  $16\pi$  en el primer caso y  $24\pi$  en el segundo. Esto prueba que  $E(\phi) \leq 16\pi$  en el caso de género uno y que  $E(\phi) \leq 24\pi$  en el caso de género dos. Si la igualdad se da en cualquiera de estas desigualdades, por el apartado (i) del teorema 6.3, la aplicación  $\phi$  se obtendría de  $\eta$  por composición con alguna simetría de  $\mathbb{S}^2$  y entonces  $\phi$  sería una aplicación conforme o anticonforme, lo que no es posible de nuevo por la proposición 6.4.  $\square$

### 3. Inmersiones asociadas

El resultado principal de esta sección es la integración de las aplicaciones armónicas para obtener superficies con curvatura media constante:

TEOREMA 6.11. *Sea  $J \in \Sigma_g$ . Existe una única inmersión conforme sin ramificación  $\psi_J : (M, J) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma_J$ , donde  $\Gamma_J$  es un subgrupo discreto de traslaciones de rango  $g$  generado por vectores ortogonales, tal que las aplicaciones de Gauss de  $\psi_J$  es  $\phi_J$  y las simetrías  $A_i$  de la aplicación de Gauss extienden a simetrías de  $\psi_J$ .*

*En estas condiciones, la inmersión  $\psi_J$  es única salvo dilataciones.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que la aplicación  $\phi = \phi_J$  es armónica y no antiholomorfa. Sea  $g$  la proyección estereográfica de  $\phi_J$ . El teorema 1.11 nos garantiza que si, para  $H \neq 0$  la imagen  $\Gamma_J$  de la aplicación  $H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \operatorname{Re} \int_{\gamma} (1-g^2, i(1+g^2), 2g) \frac{-2\bar{d''}g}{H(1+|g|^2)^2},$$

es un subgrupo discreto de traslaciones, entonces existe una inmersión conforme y ramificada  $\psi_J : (M, J) \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  con curvatura media constante  $H$ . La inmersión  $\psi_J$  es libre de puntos de ramificación porque estos son los ceros de  $(d\phi)^{1,0} = g_z dz$ , y el número de estos ceros es igual a  $-\chi(M) + \operatorname{grado}(\phi)\chi(\mathbb{S}^2) = 0$ , ver [16].

Sólo tenemos que calcular los períodos de la inmersión. Por el trabajo de Kenmotsu [45] o por el de Hoffman y Osserman [36] las simetrías de la aplicación de Gauss extienden a simetrías de la una forma de Weiertrass  $\Phi$  y tenemos que  $\tilde{u}_i^* \Phi = A_i(\Phi)$ .

En el caso de género uno, la base de homología  $\gamma_1, \gamma_2$  en  $M_1$  dada por la figura 4:

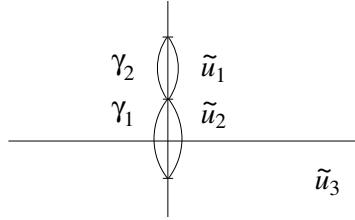


FIGURA 4. Base de homología en  $M_1$

verifica  $\tilde{u}_3^* \gamma_1 = -\gamma_1$ ,  $\tilde{u}_1^* \gamma_1 = -\gamma_1$  y  $\tilde{u}_2^* \gamma_2 = -\gamma_2$ . Así obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \Phi &= (0, 0, 0), \\ \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \Phi &= (0, \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \Phi_2, 0), \end{aligned}$$

y  $\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \Phi_2 \neq 0$ , puesto que  $\psi_J(\gamma_2)$  es una curva contenida en un plano  $x_1 = \text{constante}$  que es un grafo sobre el eje  $x_1$ .

En el caso de género dos consideramos la base de homología  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  en  $M_2$  dada por la figura 5.

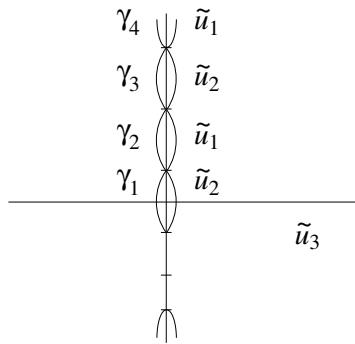


FIGURA 5. Base de homología en  $M_2$

Dicha base verifica:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^* \gamma_1 &= -\gamma_1, & \tilde{u}_2^* \gamma_2 &= -\gamma_2, & \tilde{u}_3^* \gamma_1 &= -\gamma_1, \\ \tilde{u}_1^* \gamma_3 &= -\gamma_3, & \tilde{u}_2^* \gamma_4 &= -\gamma_4, & \tilde{u}_3^* \gamma_4 &= -\gamma_4, \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \Phi &= \operatorname{Re} \int_{\gamma_4} \Phi = (0, 0, 0), \\ \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \Phi &= (0, \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \Phi_2, 0), \\ \operatorname{Re} \int_{\gamma_3} \Phi &= (\operatorname{Re} \int_{\gamma_3} \Phi_1, 0, 0).\end{aligned}$$

Empleando el mismo argumento que en el caso de género uno obtenemos que

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \Phi_2 \neq 0, \text{ y } \operatorname{Re} \int_{\gamma_3} \Phi_1 \neq 0.$$

Si el género de  $M$  es tres consideramos la base de homología  $\gamma_1, \dots, \gamma_6$  en  $M_3$  dada por:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \begin{cases} (t, w(t)), & t \in [-\infty, -1], \\ (e^{i\pi t}, w(e^{i\pi t})), & t \in [-1, 0] \\ (t+1, w(t+1)), & t \in [0, \infty], \end{cases} \\ \gamma_3(t) &= \begin{cases} (it, w(it)), & t \in [-\infty, -1], \\ (e^{i\pi t/2}, w(e^{i\pi t/2})), & t \in [-1, 1], \\ (it, w(it)), & t \in [1, \infty], \end{cases} \\ \gamma_5(t) &= \begin{cases} (-it, w(-it)), & t \in [-\infty, 0], \\ (t, w(t)), & t \in [0, \infty], \end{cases} \\ \gamma_2(t) &= (e^{it}, w(e^{it})), \quad t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_4(t) &= (t, w(t)), \quad t \in [-\infty, \infty], \\ \gamma_6(t) &= (it, w(it)), \quad t \in [-\infty, \infty],\end{cases}\end{aligned}$$

que verifica:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1^* \gamma_1 &= -\gamma_1, & \tilde{u}_2^* \gamma_2 &= -\gamma_2, & \tilde{u}_3^* \gamma_4 &= -\gamma_4, \\ \tilde{u}_1^* \gamma_2 &= -\gamma_2, & \tilde{u}_2^* \gamma_3 &= -\gamma_3, & \tilde{u}_3^* \gamma_5 &= -\gamma_5, \\ \tilde{u}_1^* \gamma_4 &= -\gamma_4, & \tilde{u}_2^* \gamma_6 &= -\gamma_6, & \tilde{u}_3^* \gamma_6 &= -\gamma_6,\end{aligned}$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \Phi &= \operatorname{Re} \int_{\gamma_4} \Phi = \operatorname{Re} \int_{\gamma_6} \Phi = (0, 0, 0), \\ \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \Phi &= (\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \Phi_1, 0, 0), \\ \operatorname{Re} \int_{\gamma_3} \Phi &= (0, \operatorname{Re} \int_{\gamma_3} \Phi_2, 0), \\ \operatorname{Re} \int_{\gamma_5} \Phi &= (0, 0, \operatorname{Re} \int_{\gamma_5} \Phi_3).\end{aligned}$$

Veamos que  $\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \Phi_1 \neq 0$ . La curva  $\psi(\gamma_1)$  es la unión de dos curvas en los planos  $x_2 = \alpha$  y  $x_3 = \beta$  que son grafos sobre la intersección de los dos planos. Si  $\psi(\gamma_1)$  fuese una curva cerrada en  $\mathbb{R}^3$  entonces la curvatura de Gauss en los puntos donde  $\phi_1 = \pm 1$  sería no negativa. Pero el cálculo en la demostración del teorema 6.3 demuestra que el Jacobiano de  $\phi_J$  en esos puntos es negativo. Esta contradicción prueba que  $\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \Phi_1 \neq 0$  y los otros casos pueden tratarse del mismo modo.

Puesto que la aplicación de Gauss determina la inmersión salvo traslaciones y homotecias [36], hemos probado la unicidad en este caso.

Tratamos ahora el caso antiholomorfo. Sabemos que  $M$  es conforme a la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2)$ , con  $\operatorname{Re}(a) > 0$ ,  $\operatorname{Im}(a) > 0$  y  $|z| < 1$  y que la proyección estereográfica de la aplicación

de Gauss  $\phi_J$  es  $z$ . La uno-forma holomorfa  $\omega = dz/w$  induce una inmersión multi-valuada  $\bar{\psi}_J$  por medio de la representación de Weierstrass, ver [52]. Las simetrías  $\tilde{u}_i$  de la aplicación de Gauss extienden a simetrías de la uno-forma de Weierstrass  $\Phi = (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega$ , que verifica  $\tilde{u}_i^* \Phi = A_i(\bar{\Phi})$ . Los períodos pueden calcularse como en el caso de género tres no minimal. Las simetrías de la aplicación de Gauss extienden a simetrías de la inmersión  $\psi_J$ .

Para ver la unicidad de  $\psi_J$  salvo traslaciones y homotecias sólo tenemos que probar la de  $\omega$  salvo un factor real positivo. Si existiera otra uno forma holomorfa  $\tilde{\omega}$  tal que el par  $(z, \tilde{\omega})$  determinara otra inmersión minimal sin ramificación con la misma aplicación de Gauss tendríamos que  $\tilde{\omega} = \lambda e^{i\theta} \omega$ , con  $\theta \in [0, \pi)$ . Podemos suponer que  $\lambda = 1$  aplicando una homotecia a la nueva inmersión. La uno-forma de Weierstrass de la nueva inmersión es  $e^{i\theta} \Phi$ . Si las simetrías de la aplicación de Gauss extendieran a simetrías de la nueva inmersión tendríamos que  $\tilde{u}_i^*(e^{i\theta} \Phi) = A_i(\overline{e^{i\theta} \Phi})$  para todo  $i$ , y esto implicaría que  $e^{2i\theta} \tilde{u}_i^* \Phi = A_i(\bar{\Phi})$ . Como  $\tilde{u}_i^*(\Phi) = A_i(\bar{\Phi})$ , deducimos que  $\theta = 0$ , lo que prueba la unicidad de  $\psi_J$ .  $\square$

Es fácil probar que las inmersiones  $\psi_J$  son de hecho embebimientos:

TEOREMA 6.12. *La inmersión  $\psi_J$  construida en el teorema anterior es un embebimiento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^+$ . Es suficiente probar que  $\psi(\bar{\Omega})$  es embebida y que  $\psi(\Omega)$  es un grafo sobre los tres planos coordenados de  $\mathbb{R}^3$ . Esto implica que  $\psi(\bar{\Omega})$  está en un octante de  $\mathbb{R}^3$  determinado por planos ortogonales y, puesto que la inmersión se obtiene reflejando  $\psi(\bar{\Omega})$  por las simetrías con respecto a los tres planos coordinados, obtenemos que  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  es un embebimiento.

Consideremos el campo vectorial  $X_j = \nabla \psi_j / |\nabla \psi_j|^2$  en  $M \setminus \{g_i(p) = p\}$ , que es ortogonal a  $\tilde{u}_j(p) = p$  y tangente a  $\tilde{u}_i(p) = p$  con  $j \neq i$  cuando está definido. Sea  $\varphi_t^j$  el grupo uniparamétrico local de difeomorfismos definido por  $X_j$  y  $p \in \Omega$ . Sea  $I$  el máximo intervalo alrededor de 0 sobre el que está definida la trayectoria  $\varphi_t^j(p)$  y contenida en  $\bar{\Omega}$ . Afirmamos que si  $a \in \bar{I} \setminus \text{int}(I)$  entonces o bien  $a \in I$  y  $\varphi_a^j(p)$  está en una curva de puntos fijos de  $\tilde{u}_j$  en  $\bar{\Omega}$  o bien  $a \notin I$  y entonces  $\varphi_t^j(p)$  se acerca a un máximo o mínimo local de  $\psi_j$  cuando  $t \rightarrow a$ . Supongamos que  $t_n \rightarrow \partial I$ . Podemos suponer que  $\varphi_{t_n}^j(p) \rightarrow q \in \bar{\Omega}$ . El punto  $q$  no puede estar en  $\Omega$ , porque la trayectoria se extendería a un intervalo mayor. Si  $q \in \partial\Omega$  entonces  $q$  no puede ser un punto fijo de exactamente una de las simetrías  $\tilde{u}_j$ , con  $j \neq i$ , porque las curvas de puntos fijos de  $\tilde{u}_j$  donde  $X_j$  está definido son curvas integrales de  $X_j$ . Por tanto las únicas posibilidades son  $\tilde{u}_j(q) = q$  o  $g_j(q) = q$ . Supongamos que  $g_j(q) = q$ . Puesto que la curvatura de Gauss de  $M$  en  $q$  no es cero, deducimos que el hessiano de  $\psi_j$  calculado en coordenadas locales no es degenerado en  $q$  y, por el lema de Morse,  $\psi_j$  tiene un máximo o un mínimo en  $q$  o un punto silla. Se puede descartar la posibilidad de un punto silla porque en este caso las curvas integrales de  $\nabla \psi_j$  en  $\Omega$ , que son reparametrizaciones de las curvas integrales de  $X_j$ , no se acercan a  $q$ . De estas observaciones se sigue la afirmación.

Hacemos notar que hay como mucho un máximo o un mínimo en  $\psi_j$  en  $\bar{\Omega}$  y la trayectoria  $\varphi_t^j(p)$  no pueden tender a estos puntos en los extremos del intervalo. En los extremos de  $I$  la trayectoria no puede estar en la misma curva de puntos fijos de  $\tilde{u}_j$  puesto que  $X_j$  es ortogonal a dicha curva y nunca es cero.

Llamemos  $C$  a la curva de la frontera de  $\Omega$  que consiste en puntos fijos de  $\tilde{u}_j$  que no son fijos por otra simetría  $\tilde{u}_i$ ,  $i \neq j$ . Puesto que para cada  $p \in \Omega$  la trayectoria

$\varphi_t^j(p)$  corta a  $C$ , de la discusión anterior deducimos que existe un intervalo  $J$  de números reales tal que:

$$\bigcup_{t \in J} \varphi_t^j(C) = \overline{\Omega} \setminus \{\tilde{u}_j(p) = p; j \neq i\}.$$

Puesto que  $\psi_j(\varphi_t^j(p)) = \psi_j(p) + t$ , los cortes  $\Pi_j^t \cap \overline{\Omega} \setminus \{\tilde{u}_j(p) = p; j \neq i\}$ , donde  $\Pi_j^t$  son los planos  $x_j = t$ , son curvas conexas difeomorfas por  $\varphi_t^j$  a  $C$ . Estas curvas son grafos sobre los planos coordinados  $\Pi_i^0$ , con  $i \neq j$ , porque  $\phi_i \neq 0$  a lo largo del corte. Esto implica que  $\psi(\Omega)$  es embebida.

Para terminar la demostración probaremos que  $\psi(\partial\Omega)$  tiene una proyección inyectiva sobre cada plano coordinado  $\Pi_j^0$ . Pero es fácil ver que la proyección de  $\psi(\partial\Omega)$  sobre  $\Pi_j^0$  está en la frontera de la proyección de  $\psi(\Omega)$  sobre  $\Pi_j^0$  y esto implica que la proyección es inyectiva.  $\square$

Una representación aproximada de las superficies  $\psi(\Omega)$ , con  $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i^-$ , viene dada en la figura 6:

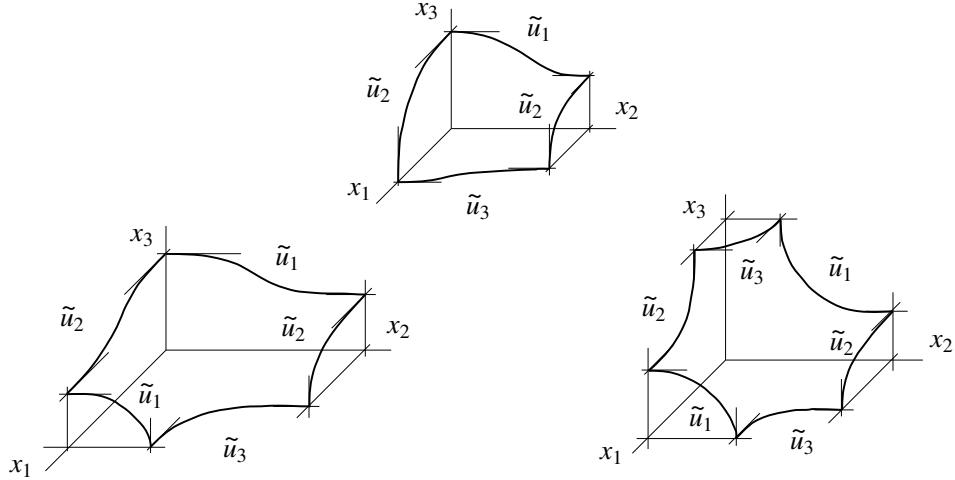


FIGURA 6.  $\psi(\overline{\Omega})$

#### 4. Límites de las familias $\Sigma_i$

En esta sección estudiamos el comportamiento de los embebimientos  $\psi_J$  cuando  $J$  se aproxima a la frontera del espacio de estructuras casi complejas.

Comenzamos estudiando el comportamiento de la familia  $\Sigma_2$ . Discutiremos la degeneración de las estructuras conformes estudiando el movimiento de los valores de ramificación del revestimiento hiperelíptico que determina la superficie de Riemann.

Tratamos en primer lugar el caso  $a \rightarrow 0$  y  $b$  fijo. Para  $a < \frac{1}{2}$  consideramos un disco  $D_a \subset \mathbb{C}$  de radio  $2a$  centrado en 0. La aplicación  $w_a = -(z - ia)/(z + ia)$  envía  $ia \rightarrow 0$  y  $-ia \rightarrow \infty$ . La preimagen  $A_a$  de  $w_a(D_a)$  por la aplicación  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es

conforme a  $z^{-1}(D_a)$ . Las simetrías  $u_i$  en  $w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)$  se transforman en las simetrías en  $\overline{\mathbb{C}}$  con respecto a los tres círculos ortogonales  $\text{Re}(z) = 0$ ,  $\text{Im}(z) = 0$  y  $|z| = 1$ . Además  $\bigcup_{i=1}^3 A_a = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{+1, -1\}$ .

Consideramos las aplicaciones de Gauss definidas en  $A_a$  y las denotamos por  $\phi_a$ . Como  $E(\phi_a)$ , calculada con la estructura conforme usual de  $\overline{\mathbb{C}}$ , es acotada por la proposición 6.10 podemos extraer, por el teorema 5.2, una subsucesión, que denotaremos igual, que converge uniformemente  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus (X \cup \{+1, -1\})$  a una aplicación armónica  $\phi$ . En los puntos del conjunto finito  $X \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{+1, -1\}$  no hay convergencia. Puesto que para todo  $p \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{+1, -1\}$  tenemos que al menos una coordenada de  $\phi_a$  tiene signo para todo  $a$ , concluimos que  $X$  es vacío. La aplicación  $\phi$  extiende a una aplicación que denotaremos igual  $\phi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$  por los resultados de Sacks y Uhlenbeck [77] puesto que tiene energía acotada. El grado de  $\phi$  es  $-1$  porque el único punto  $p$  donde  $\phi(p) = (0, 0, -1)$  es  $p = 0$  y es un punto regular cuyo Jacobiano puede calcularse como en la demostración del teorema 6.3.

Por el teorema 5.5 existe una sucesión de números reales positivos  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que una subsucesión de  $\{\lambda_n \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{+1, -1\}$  a una inmersión minimal completa ramificada  $\psi$  con aplicación de Gauss  $\phi$ . Los puntos de ramificación y los finales de  $\psi$  solo pueden estar en  $\pm 1$  y, por simetría, ambos son puntos de ramificación o finales. concluimos que los puntos  $\pm 1$  son finales de  $\psi$ . Por los resultados de Osserman [60],  $\psi$  debe ser una catenoide.

Por otra parte tenemos que las regiones  $z^{-1}(M_a \setminus D_a)$  convergen al toro  $T_b \equiv w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + b^2)$ . Las aplicaciones  $\phi_a$  definidas en  $z^{-1}(M_a \setminus D_a)$  convergen uniformemente en subconjuntos compactos de  $T_b$  (hay convergencia en todos los puntos por un argumento similar al anterior) a una aplicación armónica  $\phi_b$ . Por el teorema 5.5 obtenemos que reescalando adecuadamente las inmersiones obtenemos convergencia a una superficie de Delaunay que puede ser un cilindro llano.

El caso  $a$  fijo y  $b \rightarrow \infty$  se puede tratar del mismo modo.

Cuando  $a \rightarrow 1$  y  $b$  es fijo obtenemos que las regiones  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura 7 convergen a esferas y las aplicaciones armónicas límite en tales regiones tienen grado  $-1$ ,  $0$  y  $0$ , respectivamente.

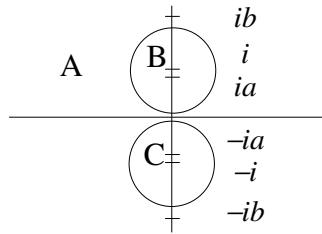


FIGURA 7

Consideraremos el límite en la región  $A$ . Para  $a$  suficientemente pequeño sea  $D_a \subset \mathbb{C}$  la unión de dos discos de radio  $2a$  centrados en los puntos  $\pm i$ . Consideraremos la aplicación  $w = -(z - ib)/(z + ib)$  y la preimagen  $A_a$  de  $w(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_a)$  por la aplicación  $z \mapsto z^2$ . Tenemos que  $A_a$  es conforme a  $z^{-1}(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_a)$  y que  $\bigcup_a A_a = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm \lambda, \pm 1/\lambda\}$ , donde  $\lambda^2 = (b - 1)/(b + 1)$ . Las aplicaciones armónicas sobre  $\overline{\mathbb{C}}$  convergen a una

aplicación armónica  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$  cuya proyección estereográfica es  $z$ . Por el teorema 5.5 tenemos que, reescalando las inmersiones, estas convergen a una superficie minimal  $\psi$  con finales o puntos de ramificación en  $\pm\lambda, \pm 1/\lambda$ . Por simetría, todos los puntos son de ramificación o finales y, puesto que no existen esferas minimales ramificadas en variedades llanas, concluimos que son finales. De nuevo por simetría concluimos que o bien  $\psi$  no tiene períodos o bien es una superficie minimal simplemente periódica. Puesto que no hay superficies minimales con aplicación de Gauss de grado  $-1$  y cuatro finales en  $\mathbb{R}^3$ , ver [60], concluimos que  $\psi$  es una superficie minimal simplemente periódica, y se sigue de [34] que  $\psi$  es la inmersión correspondiente a una superficie de Scherk simplemente periódica.

El caso  $b \rightarrow 1$  y  $a$  fijo se puede tratar del mismo modo.

Cuando  $a \rightarrow 0$  y  $b \rightarrow 1$  las regiones  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de la figura 8 convergen a cinco esferas puesto que la región  $z^{-1}(D)$  tiene dos componentes conexas. Los grados de las aplicaciones armónicas que se obtienen en el límite sobre cada una de estas regiones, por un procedimiento similar al de los casos anteriores, es  $-1$  sobre la región  $B$  y  $0$  en las demás regiones. La inmersión límite sobre la región  $B$  es de nuevo una catenoide. El caso  $a \rightarrow 1$  y  $b \rightarrow \infty$  puede tratarse exactamente igual que este último.

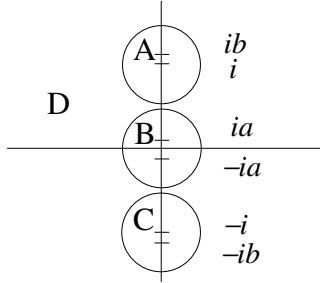


FIGURA 8

Cuando  $a \rightarrow 0$  y  $b \rightarrow \infty$  las regiones  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura 9 convergen a tres esferas y las aplicaciones armónicas convergen a aplicaciones con grados  $-1$ ,  $+1$  y  $-1$ , respectivamente. Obtenemos como límites de las inmersiones dos catenoides y una esfera totalmente umbilical.

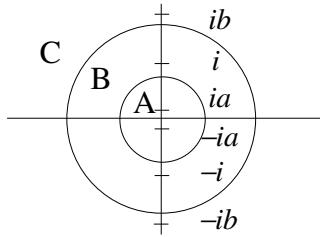


FIGURA 9

Cuando  $a, b \rightarrow 1$  tenemos que las regiones  $A$ ,  $B$  de la figura 10 convergen a dos toros y que la región  $C$  converge a una esfera. La aplicaciones armónicas límite

tienen grado 0 sobre los toros y  $-1$  sobre la esfera. El límite de las inmersiones en  $C$  es de nuevo una catenoide.

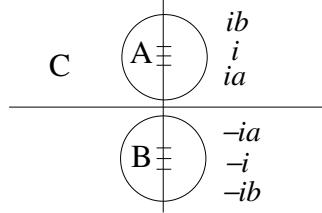


FIGURA 10

Consideremos ahora los límites de la familia  $\Sigma_1$ . Sabemos que la inmersión  $\psi_J$  correspondientes a  $J \in \Sigma_1$  es o bien un tubo embebido alrededor de una geodésica cerrada o la pieza simplemente periódica más pequeña de un onduloide. Cada  $M \in \Sigma_1$  es la superficie de Riemann del polinomio  $w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)$ , con  $0 < a < 1$ . Todas las superficies de Riemann  $(M_1, J)$ , con  $J \in \Sigma_1$ , pueden ser realizadas como inmersiones de tubos alrededor de geodésicas en cocientes de  $\mathbb{R}^3$ . Cuando  $a \rightarrow 0$  la energía de las aplicaciones de Gauss de estos tubos converge a  $\infty$  y, por tanto, para  $a$  suficientemente pequeño, la inmersión asociada a la aplicación armónica de mínima energía es un onduloide.

Los mismos argumentos que en el caso de género dos prueban que, cuando  $a \rightarrow 0$ , obtenemos como superficies límites una esfera y una catenoide.

Consideremos ahora los límites de superficies minimales. Las superficies de Riemann  $(M_3, J)$ , con  $J \in \Sigma_3$ , tales que  $\psi_J$  es una inmersión minimal son conformes a las superficies de Riemann de los polinomios  $w^2 = (z^2 - a^2)(z^2 - \bar{a}^2)(z^2 - (1/a)^2)(z^2 - (1/\bar{a})^2)$ . Podemos encontrar dos tipos de degeneración.

Si  $a \rightarrow e^{i\theta}$  y  $e^{i\theta}$  es distinto de  $\pm 1$  y  $\pm i$  entonces obtenemos en el límite dos superficies de Scherk simplemente periódicas cuya representación de Weierstrass viene dada por:

$$w^2 = (z - e^{i\theta})(z + e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(z + e^{-i\theta}), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$g(z, w) = z, \quad \omega(z, w) = \frac{dz}{w^2}.$$

Este límite puede compararse con el obtenido por Karcher en [42] para las superficies  $\mathcal{P}$ .

Si  $a \rightarrow e^{i\theta}$  y  $e^{i\theta}$  es igual a  $\pm 1$ ,  $\pm i$  obtenemos en el límite dos catenoides.

## 5. Caracterización de los ejemplos

Un *retículo ortogonal*  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  es un subgrupo discreto de traslaciones generado por vectores ortogonales. Componiendo con una isometría de  $\mathbb{R}^3$  podemos considerar únicamente retículos  $\Gamma$  generados por vectores proporcionales a vectores de la base ortonormal usual de  $\mathbb{R}^3$ . Una superficie embebida  $M \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica* si  $S_i(M) \subset M$ , donde  $S_i$  es la proyección a  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  de una simetría respecto de un plano  $x_i = \text{constante}$  en  $\mathbb{R}^3$ .

**TEOREMA 6.13.** *Sean  $\Gamma$  un retículo ortogonal, y  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  un embebiimiento simétrico con curvatura media constante de una superficie compacta, conexa*

y orientable con género positivo. Sea  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  su aplicación de Gauss. Supongamos que  $\phi_i(p) = 0$  si y solo si  $p$  es un punto fijo de  $S_i$ .

Entonces, se tiene que:

- (I)  $\text{género}(M) = g \leq 3$  y  $M$  es conforme a  $(M_g, J)$ , para algún  $J \in \Sigma_g$ .
- (II) La aplicación de Gauss  $\phi$  es mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.
- (III) La inmersión  $\psi$  levanta a un revestimiento de  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , y el levantamiento coincide con la inmersión  $\psi_J$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  la inclusión. Llamemos  $u_i$  a la restricción de  $S_i$  a  $M$ . Entonces tenemos que  $\psi \circ u_i = S_i \circ \psi$  y que  $\phi \circ u_i = A_i \circ \phi$ . Por hipótesis  $\phi_i(p) = 0$  si y solo si  $u_i(p) = p$ . Las aplicaciones  $u_i$  son simetrías que comutan con puntos fijos para la estructura de superficie de Riemann inducida por la métrica Riemanniana de  $M$ .

Consideramos los subgrupos de transformaciones conformes de  $M$  dados por  $G_i = \{\text{Id}, g_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y  $G = \{\text{Id}, g_1, g_2, g_3\}$ , donde  $g_i = u_{i+1} \circ u_{i+2}$ , con  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Los puntos fijos de  $g_j$  son los puntos fijos comunes de  $u_{j+1}$  y  $u_{j+2}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_3$ . Los cocientes  $M/G_i$  y  $M/G$  son superficies de Riemann con género  $\gamma_i$  y  $\gamma$ , respectivamente. Como en la proposición 6.1 probamos que:

$$(6.12) \quad g + 2\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

Calculemos ahora  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Denotaremos por  $\nabla\psi_j$  a los campos vectoriales en  $M$  inducidos por las coordenadas multivaluadas  $\psi_j$  de la inmersión  $\psi$ . Es fácil ver que:

- (I) Los ceros de  $\nabla\psi_j$  son aislados y coinciden con los puntos fijos de  $g_j$ . Estos puntos son máximos y mínimos locales y puntos de silla de  $\psi_j$ .
- (II) El índice del campo vectorial  $\nabla\psi_j$  es igual a  $+1$  en los máximos y mínimos locales de  $\psi_j$  y  $-1$  en los puntos silla.
- (III) El campo vectorial  $\nabla\psi_j$  induce un campo vectorial en  $M/G_j$  con índice  $+1$  en las imágenes de los puntos de índice  $+1$  y con índice cero  $0$  en las imágenes de los puntos de índice  $-1$ .

Para probar (i) hay que tener en cuenta que  $(\nabla\psi_j)_p = 0$  si y sólo si  $\phi(p) = \overset{(i)}{(\dots, \pm 1, \dots)}$  y esto es equivalente a  $g_j(p) = p$ . Entonces  $p$  es un punto crítico aislado de  $\psi_j$ , que no es degenerado porque la curvatura de Gauss no es cero en dichos puntos por una aplicación del principio del máximo. Por el lema de Morse  $\psi_j$  sólo puede tener en  $p$  o bien un máximo o mínimo local o bien un punto de silla.

El apartado (ii) se sigue de la anterior descripción de los puntos críticos de  $\psi_j$  y (iii) porque en un entorno de  $p$ , la aplicación  $M \rightarrow M/G_i$  se comporta como  $z \mapsto z^2$ .

En cualquier caso, tenemos que la proyección del campo  $\nabla\psi_j$  a  $M/G_j$  sólo tiene puntos de índice no negativo, de modo que  $\gamma_i \leq 1$ . Si  $g = \text{género}(M) = 2, 3$  entonces obtenemos por la ecuación (6.3) que  $\gamma = 0$ . Si  $g = 1$ , puesto que al menos dos curvas de puntos fijos de distintas involuciones  $u_i$  se intersecan, tenemos que  $M/G_i$  es conforme a  $\mathbb{S}^2$  para algún  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Esto implica que la aplicación holomorfa  $M \rightarrow M/G_i$  tiene puntos de ramificación y, por tanto,  $\gamma_i$  debe ser  $0$  y, en

consecuencia,  $\gamma = 0$ . Por la ecuación (6.3) podemos suponer que:

$$\begin{aligned} \text{Si } g = 1 &\quad \text{entonces } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (0, 1, 0), \\ \text{si } g = 2 &\quad \text{entonces } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 1, 0), \\ \text{si } g = 3 &\quad \text{entonces } (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Si  $g = 1$  entonces la  $M \rightarrow M/G_2$  no tiene puntos de ramificación y, por tanto, las curvas de puntos fijos de  $u_1$  y  $u_3$  no se cortan. Del mismo modo las curvas de puntos fijos de las demás involuciones siempre se cortan. Esto implica que  $M$  es conforme a  $(M_1, J)$  con  $J \in \Sigma_1$  por la proposición 6.1.

Si  $g = 2$  entonces, como la aplicación de Gauss  $\phi$  de  $M$  es sobreyectiva, las  $\overset{(i)}{\text{preimágenes}}$  de los vectores  $(\dots, 1, \dots)$  son puntos fijos de  $u_{i+1}$  y  $u_{i+2}$  y, por tanto,  $M$  es conforme a  $(M_2, J)$  para algún  $J \in \Sigma_2$  por la proposición 6.1.

Consideremos ahora el caso de género tres. Sea  $\Omega \subset M$  el conjunto abierto donde las coordenadas de  $\phi$  son negativas. Por la proposición 6.1 el conjunto  $\overline{\Omega}$  es un hexágono. El grado de  $\phi$  es  $-2$  por el teorema de Gauss–Bonnet y, por tanto, en los vértices del polígono  $\partial\Omega$  hay exactamente dos puntos donde  $\phi$  toma los valores  $(\dots, -1, \dots)$ . Consideremos un punto  $p$  en  $\partial\Omega$  donde  $\phi(p) = (-1, 0, 0)$  y  $\{v, w\}$  es una base ortonormal positivamente orientada de vectores tangentes a las curvas de puntos fijos de  $u_i$ , con  $i \neq 1$ . Un cálculo directo del Jacobiano de  $\phi$  en  $p$  implica que  $v$  es tangente a  $\{u_3(q) = q\}$  y que  $w$  es tangente a  $\{u_2(q) = q\}$ . Un argumento similar implica que si  $\phi(p) = (0, -1, 0)$  y  $\{v, w\}$  es una base ortonormal positivamente orientada de vectores tangentes a las curvas de puntos fijos de  $u_i$ ,  $i \neq 2$ , entonces  $v$  es tangente a  $\{u_1(q) = q\}$  y  $w$  es tangente a  $\{u_3(q) = q\}$ , y si  $\phi(p) = (0, 0, -1)$  y  $\{v, w\}$  es una base ortonormal positivamente orientada de vectores tangentes a las curvas de puntos fijos de  $u_i$ ,  $i \neq 3$ , entonces  $v$  es tangente a  $\{u_2(q) = q\}$  y  $w$  es tangente a  $\{u_1(q) = q\}$ . Esto implica que las curvas de puntos fijos están distribuidas como en la figura 2 y, por tanto, podemos aplicar la proposición 6.1 para concluir que  $M$  es conforme a  $(M_3, J)$  para algún  $J \in \Sigma_3$ .

Para probar (ii) basta aplicar el apartado (iii) del teorema 6.3.

La afirmación (iii) se sigue de que si  $\Gamma' = \psi_*(H_1(M, \mathbb{Z}))$  entonces  $M$  levanta a  $\mathbb{R}^3/\Gamma'$  y tenemos que  $\Gamma' = \Gamma_J$ .  $\square$

**Nota.** Este resultado de unicidad implica que las compañeras con curvatura media constante estudiadas por Karcher [42] de las superficies minimales  $\mathcal{P}$  de A. Schoen están en nuestra familia de ejemplos triplemente periódicos.

Las piezas más pequeñas de género dos de la familia de superficies  $\widetilde{M}_t^{0,\pi/4}$  del teorema 3.3 de [29] están en nuestra familia de ejemplos y presentan simetrías adicionales con respecto a las proyecciones de los planos  $x_1 = \pm x_2$  de  $\mathbb{R}^3$ . Estas superficies se corresponden con los ejemplos asociados a las superficies de Riemann de los polinomios  $w^2 = (z^2 + 1)(z^2 + a^2)(z^2 + (1/a)^2)$ , con  $0 < a < 1$ , considerados en la nota que aparece tras el teorema 6.3.

**TEOREMA 6.14.** *Sean  $\Gamma$  un retículo ortogonal en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$  un embebimiento estable simétrico no totalmente geodésico de una superficie compacta con género positivo. Sea  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  la aplicación de Gauss.*

*Entonces se tiene:*

- (i)  $\text{género}(M) \leq 3$  y  $M$  es conforme a  $(M_g, J)$ , para algún  $J \in \Sigma_g$ .

- (II) *La aplicación de Gauss  $\phi$  es mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.*
- (III) *La inmersión  $\psi$  levanta a un revestimiento de  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , y el levantamiento coincide con la inmersión  $\psi_J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La superficie  $M$  es conexa por el teorema 2.5, ya que no es totalmente geodésica. Sea  $u_i$  la restricción de  $S_i$  a  $M$ . Si el embebimiento es simétrico se tiene que  $u_i(p) = p$  implica que  $\phi_i(p) = 0$ . Sean  $\Omega_i^\pm$  las componentes conexas de  $M \setminus \{u_i(p) = p\}$ .

Si hay alguna componente  $\phi_i$  idénticamente cero, entonces  $\phi$  es la aplicación de Gauss de un tubo estable embebido alrededor de una geodésica cerrada. En este caso, se tiene que  $E(\phi) \leq E(\eta)$  para cualquier aplicación  $\eta : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  simétrica.

Por tanto, podemos suponer que ninguna componente  $\phi_i$  es idénticamente cero. Si hay un punto  $q \in \Omega_i^+$  tal que  $\phi_i(q) = 0$  entonces, como  $\phi_i$  es una función propia de valor propio cero para el problema de Dirichlet  $\Omega_i^+$  del operador  $\Delta + |\nabla\phi|^2$  que cambia de signo en  $\Omega_i^+$ , deducimos que la primera función propia  $u$  del problema de Dirichlet en  $\Omega_i^+$  tiene valor propio negativo. Esto implica que:

$$\int_M |\nabla u|^2 - |\nabla\phi|^2 u^2 = \int_M -u(\Delta u + |\nabla\phi|^2 u) < 0$$

Entonces la función  $v$  definida en  $M$  por:

$$v = \begin{cases} u, & \text{on } \Omega_i^+, \\ -u \circ u_i, & \text{on } \Omega_i^-, \end{cases}$$

es una función diferenciable con media cero tal que  $\int_M \{|\nabla u|^2 - |\nabla\phi|^2 u^2\} < 0$ , lo que contradice la hipótesis de estabilidad. Por tanto,  $\phi_i$  no tiene ceros en  $\Omega_i^\pm$ . El teorema se sigue entonces del teorema 6.13.  $\square$

**TEOREMA 6.15.** *Sean  $\Gamma$  un retículo de  $\mathbb{R}^3$  generado por vectores ortogonales, y sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3/\Gamma$  un dominio isoperimétrico. Sea  $M = \partial\Omega$  y  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  la aplicación de Gauss de  $M$ . Supongamos que el género de  $M$  es positivo.*

*Entonces se tiene:*

- (I) *género( $M$ )  $\leq 3$  y  $M$  es conforme a  $(M_g, J)$ , para algún  $J \in \Sigma_g$ .*
- (II) *La aplicación de Gauss de  $\phi$  es mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas.*
- (III) *La inmersión  $\psi$  levanta a un revestimiento de  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , y el levantamiento coincide con la inmersión  $\psi_J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La superficie  $M$  es simétrica con respecto a tres superficies totalmente geodésicas que se cortan ortogonalmente por el teorema de simetrización de Hsiang [38]. Puesto que las fronteras de dominios isoperimétricos son superficies estables concluimos aplicando el teorema 6.14.  $\square$

## 6. Comentarios

No todas las superficies que hemos construido en este capítulo son estables. Los teoremas de compacidad para superficies estables de los capítulos 4 y 5 lo prueban cuando el género de  $M$  es mayor que uno. Además, si un toro admite una inmersión como superficie de Delaunay, entonces su aplicación de Gauss es un mínimo de la energía en la clase de las aplicaciones simétricas, y sabemos por los resultados de los capítulos 2 y 5 que estas inmersiones no son estables.

## Bibliografía

- [1] W. Abikoff, The real analytic theory of Teichmüller space, Lecture Notes on Mathematics, **820**, Springer–Verlag, 1976.
- [2] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. reine u angew. Math., **374**, 169–192, 1987.
- [3] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, I, Vestnik Leningrad Univ. Math., **11**, no. 19, 5–17, 1956.
- [4] F.J. Almgren, *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem A.M.S., **4**, 165, 1976.
- [5] J.L. Barbosa, M. do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z., **185**, 339–353, 1984.
- [6] J.L. Barbosa, M. do Carmo, J. Eschenburg, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z., **197**, 123–138, 1988.
- [7] M. do Carmo, Geometría diferencial de curvas y superficies, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1990.
- [8] M. do Carmo, M. Dajczer, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tōhoku Math. J., **34**, 425–435, 1982.
- [9] M. do Carmo, C.K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes*, Bull. A.M.S., **1**, 903–906, 1979.
- [10] B.Y. Chen, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [11] W. H. Chen, *The generalized Weierstrass formula for surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Acta Math. Sinica, **30**, 361–367, 1987. (MR 90f:53009 53A10).
- [12] S.Y. Cheng, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comm. Math. Helv., **51**, 43–55, 1976.
- [13] H.I. Choi, R. Schoen, *The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature*, Invent. Math., **81**, 387–394, 1985.
- [14] C. Delauney, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. pures et appl. **1**, 309–320, 1841.
- [15] J. Eells, L. Lemaire, *Deformation of metrics and associated harmonic maps*, Geometry and Analysis, Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi, Springer–Verlag, 1981.
- [16] J. Eells, J.C. Wood, *Restrictions of harmonic maps of surfaces*, Topology, **15**, 263–266, 1976.
- [17] L.P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1925.
- [18] A. El Soufi, S. Ilias, *Majoration de la seconde valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur una variété compacte et applications*, J. of Func. Anal., **103**, 294–316, 1992.
- [19] H.M. Farkas, I. Kra, Riemann Surfaces, Lecture Notes on Mathematics, 71, Springer–Verlag, 1980.
- [20] D. Fischer–Colbrie, *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*, Invent. Math., **82**, 121–132, 1985.
- [21] D. Fischer–Colbrie, R. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in three manifolds of non negative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math., **33**, 199–211, 1980.
- [22] O. Forster, Lectures on Riemann Surfaces, Lecture Notes on Mathematics, 81, Springer–Verlag, 1981.
- [23] T. Frankel, *On the fundamental group of a compact minimal submanifold*, Ann. Math., **83**, 68–73, 1966.
- [24] K. Frensel, *Stable complete surfaces with constant mean curvature*, Anais Acad. Bras. Cien., **60**, 115–117, 1988.

- [25] F. Gackstatter, *H. Hopf's quadratic differential and a Weiertrass formula for general surfaces and surfaces of constant mean curvature*, Coll. de Phys., **23**, colloque C7, 1990.
- [26] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1983.
- [27] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Math., Wiley-Interscience series, 1978.
- [28] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., **82**, 307–347, 1985.
- [29] K. Groß Brauckmann, *New surfaces of constant mean curvature*, Math. Z., **214**, 527–565, 1993.
- [30] J. Hass, J.T. Pitts, J.H. Rubinstein, *Existence of unstable minimal surfaces in manifolds with homology and applications to triply periodic minimal surfaces*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume Greene, 1992.
- [31] E. Heintze, *Extrinsic upper bounds for  $\lambda_1$* , Math. Ann., **280**, 389–402, 1988.
- [32] J. Hersch, *Quatre proprietes isoperimetriques des membranes sphériques homogenes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **270**, 1645–1648, 1970.
- [33] D. Hoffman, W.H. Meeks, *Embedded minimal surfaces of finite topology*, Ann. Math., **131**, 1–34, 1990.
- [34] D. Hoffman, W.H. Meeks, *Limits of minimal surfaces and Scherk's second surface*, Univ. Massachusetts.
- [35] D. Hoffman, W.H. Meeks, *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*, Invent. Math., **101**, 373–377, 1990.
- [36] D. Hoffman, R. Osserman, *The Gauss map of surfaces in  $\mathbb{R}^n$* , J. Diff. Geom., **18**, 733–754, 1983.
- [37] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*, 2nd ed., Lecture notes in Mathematics, 1000, Springer-Verlag.
- [38] W.Y. Hsiang, *Isoperimetric regions and soap bubbles*, Diff. Geom., edited by B. Lawson and K. Tenenblat, Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, **52**, 229–240, Longman Sci. & Tech., 1991.
- [39] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry on the large*, Comm. Math. Helv., **32**, 181–206, 1957.
- [40] N. Kapouleas, *Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three space*, Ann. Math., **131**, 239–330, 1990.
- [41] N. Kapouleas, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, J. Diff. Geom., **33**, 683–715, 1991.
- [42] H. Karcher, *The triply periodic minimal surfaces of Alan Schoen and their constant mean curvature companions*, Manusc. Math., **64**, 291–357, 1989.
- [43] H. Karcher, *Construction of minimal surfaces*, Univ. Bonn, 1989.
- [44] H. Karcher, *Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples*, Manusc. Math., **62**, 83–114, 1988.
- [45] K. Kenmotsu, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann., **245**, 89–99, 1979.
- [46] N.J. Korevaar, R. Kusner, B. Solomon, *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature*, J. Diff. Geom., **30**, 465–503, 1989.
- [47] R. Kusner, *Conformal geometry and complete minimal surfaces*, Bull. A.M.S., **17**, 291–295, 1987.
- [48] H.B. Lawson, Jr., *Complete Minimal Surfaces in  $\mathbb{S}^3$* , Ann. Math., **92**, 335–374, 1970.
- [49] L. Lemaire, *Applications harmoniques de surfaces riemannianes*, J. Diff. Geom., **13**, 51–78, 1978.
- [50] P. Li, S.T. Yau, *A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math., **69**, 269–291, 1982.
- [51] F.J. López, A. Ros, *Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces*, Comm. Math. Helv., **64**, 34–43, 1989.
- [52] W.H. Meeks, *The theory of triply periodic minimal surfaces*, Indiana Univ. Math J., **39**, no. 3, 877–936, 1990.
- [53] W.H. Meeks, H. Rosenberg, *The maximum principle at infinity for minimal surfaces in flat three manifolds*, Comm. Math. Helv., **65**, 255–270, 1990.

- [54] W.H. Meeks, H. Rosenberg, *The global theory of doubly periodic minimal surfaces*, Invent. Math., **97**, 351–379, 1989.
- [55] W.H. Meeks, H. Rosenberg, *The geometry of periodic minimal surfaces*, Comm. Math. Helv., **68**, 538–579, 1993.
- [56] W.H. Meeks, L. Simon, S.T. Yau, *Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature*, Ann. Math., **116**, 621–659, 1982.
- [57] S. Montiel, A. Ros, *Schrödinger operators associated to a holomorphic map*, Proceedings Conference on Global Differential Geometry and Global Analysis, Berlin, 1990, Lecture Notes on Mathematics, 1481, 147–174.
- [58] D. Mumford, *A remark on Mahler's compactness theorem*, Proc. A.M.S., **28**, 289–294, 1971.
- [59] J.C.C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, Vol. 1, Cambridge University Press.
- [60] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications, New York, 2nd edition, 1986.
- [61] B. Palmer, PhD Thesis, Stanford, 1986.
- [62] B. Palmer, *Index and stability of harmonic Gauss maps*, (aparecerá en Math. Z.).
- [63] R. Pedrosa, *On the uniqueness of isoperimetric regions in cylindrical spaces*, PhD Thesis, Berkeley, 1988.
- [64] J. Pérez, A. Ros, *Some uniqueness and nonexistence theorems for embedded minimal surfaces*, Math. Ann., **295**, 513–525, 1993.
- [65] U. Pinkall, I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Ann. Math., **130**, 407–451, 1989.
- [66] J.T. Pitts, *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Mathematical Notes, **27**, Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [67] J.T. Pitts, J.H. Rubinstein, *Equivariant minimax and minimal surfaces in geometric three-manifolds*, Bull. A.M.S., **19**, 303–309, 1988.
- [68] M. Ritoré, *Complete orientable index one minimal surfaces embedded in complete orientable flat three manifolds*, Univ. Granada, 1994.
- [69] M. Ritoré, *Examples of constant mean curvature surfaces obtained from harmonic maps to the two sphere*, Univ. Granada, 1994.
- [70] M. Ritoré, *Harmonic maps and stable periodic constant mean curvature surfaces*, Univ. Granada, 1994.
- [71] M. Ritoré, A. Ros, *Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms*, Comm. Math. Helv., **67**, 293–305, 1992.
- [72] M. Ritoré, A. Ros, *Embedded index one minimal surfaces and stable constant mean curvature surfaces in flat three manifolds*, Univ. Granada, 1994.
- [73] A. Ros, *The Gauss map of minimal surfaces*, Univ. Granada.
- [74] M. Ross, *Schwarz's  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{D}$  surfaces are stable*, Diff. Geom. App., **2**, 179–195, 1992.
- [75] M. Ross, *Complete nonorientable minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Comm. Math. Helv., **67**, 64–76, 1992.
- [76] E. Ruh, J. Vilms, *The tension field of the Gauss map*, Transactions A.M.S., **149**, 1970, 569–573.
- [77] J. Sacks, K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. Math., **113**, 1–24, 1981.
- [78] J. Sacks, K. Uhlenbeck, *Minimal immersions of closed Riemann surfaces*, Transactions A.M.S., **271**, 639–652, 1982.
- [79] E. Schmidt, *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl*, Math. Z., **49**, 1–109, 1943.
- [80] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, J. Diff. Geom., **18**, 791–809, 1983.
- [81] B. Smyth, *The generalization of Delaunay's theorem to surfaces with continuous internal symmetry*.
- [82] R. Schoen, S.T. Yau, *On univalent harmonic maps between surfaces*, Invent. Math., **44**, 265–278, 1978.
- [83] R. Schoen, S.T. Yau, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature*, Ann. Math., **110**, 127–142, 1979.

- [84] A. da Silveira, *Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature*, Math. Ann., **277**, 629–638, 1987.
- [85] L. Simon, Lectures on geometric measure theory, Proc. C.M.A., **3**, Australian Natl. U., 1983.
- [86] M. Soret, Deformations des surfaces minimales, Thésé de Doctorat, Université Paris VII, 1993.
- [87] R. Souam, Stabilité et unicité des surfaces minimales, Thésé de Doctorat, Université Paris VII, 1992.
- [88] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 4, 2 ed., Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
- [89] J.E. Taylor, *The structure of singularities in solutions to ellipsoidal problems with constraints in  $\mathbb{R}^3$* , Ann. Math., **103**, 541–546, 1976.
- [90] E.L. Thomas, D.M. Anderson, C.S. Henke, D. Hoffman, *Periodic area-minimizing surfaces in block copolymers*, Nature, **334**, No. 6184, 598–601, 1988.
- [91] F. Tomi, A. Tromba, *A geometric proof of the Mumford compactness theorem*, Proc. of the DD7 Symposium on PDE, Lecture Notes on Mathematics, **1306**, 174–181, 1986.
- [92] H. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pac. J. Math. **121**, 193–243, 1986.
- [93] B. White, *Curvature estimates and compactness theorems in 3–manifolds for surfaces that are stationary for parametric elliptic functionals*, Invent. Math., **88**, 243–256, 1987.
- [94] J.A. Wolf, Spaces of constant curvature, 1st ed., Publish or Perish, Inc., 1984.
- [95] J.G. Wolfson, *Gromov’s compactness of pseudo–holomorphic curves and symplectic geometry*, J. Diff. Geom., **28**, 383–405, 1988.
- [96] H. Wu, *On the volume of a noncompact manifold*, Duke Math. J., **49**, 71–78, 1982.
- [97] S.T. Yau, *Nonlinear analysis in geometry*, L’enseignement Math., **33**, 109–158, 1987.

# Índice alfabético

- $H^1(M)$ , ver espacio de Sobolev, 4
- $K$ , ver curvatura de Gauss, 1
- $S$ , ver curvatura escalar, 1
- $S_\theta$ , 24
- $T_v$ , 33
- $\Sigma_g$ , 66
- $\mathbb{H}^n$ , ver espacio hiperbólico, 1
- $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$ , 66
- $|\sigma|^2$ , 1
- $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , 38
- $\mathbb{R}^n$ , ver espacio Euclídeo, 1
- $\mathbb{S}^n$ , 1
- $\mathbb{S}^n(r)$ , 1
- $\sigma$ , ver segunda forma fundamental, 1
- $\tau(\phi)$ , ver campo de tensión, 5
- Ric, ver curvatura de Ricci, 1
- $d', d''$ , 5
- $k_i$ , ver curvatura principal, 1
- Aplicación
  - $\phi_J$ , 72
  - armónica, 5
  - simétrica, 70
- Campo
  - de Jacobi, 73
  - de tensión  $\tau(\phi)$ , 5
  - de vectores simétrico, 73
  - variacional de una variación, 2
- Carta isotermica, 2
- Clase
  - $\mathcal{G}$  de subgrupos, 38
  - $\mathcal{K}$  de variedades, 39
- Conjuntos nodales, 19
- Convergencia  $C^k$ , 38
- Cotas locales uniformes de área, 38
- Curvatura
  - de Gauss  $K$ , 1
  - de Ricci Ric, 1
  - media  $H$ , 1
  - principal  $k_i$ , 1
  - total finita, 8
- Curvatura escalar  $S$ , 1
- Diferencial de Hopf, 6, 8
- Dominios isoperimétricos, 9
- Ecuación
  - de Codazzi–Mainardi, 8
  - de Gauss, 1
  - de una aplicación armónica a  $\bar{\mathbb{C}}$ , 5
  - de una aplicación armónica a  $\mathbb{S}^2$ , 5
  - senh–Gordon, 8, 19
- Embebimiento, 1
- Endomorfismo de Weingarten, 1
- Energía de una aplicación, 5
- Entorno isotermo, 2
- Esfera  $\mathbb{S}^n$ , 1
- Esferas estables, 19
- Espacio
  - $C_{sim}^{k,\alpha}(M_g, \mathbb{S}^2)$ , 72
  - $\Sigma_g$ , 66
  - $\mathcal{M}_{sim}^{r,\alpha}$ , 66
  - de Sobolev  $H^1(M)$ , 4
  - Euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , 1
  - hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , 1
  - proyectivo real  $\mathbb{RP}^3$ , 21
- Estructura
  - casi compleja  $J$ , 66
- Estructuras
  - conformes, 53
- Existencia de cartas isotermas, 1
- Finales de una superficie, 8
- Forma índice  $I$ , 4, 19, 53
- Funcional área, 3
- Indice
  - de  $\Omega$ , 5
  - de una inmersión, 5
  - de una inmersión minimal, 27
- Inmersión
  - con curvatura media constante, 1
  - conforme, 2
  - conforme ramificada, 2
  - estable, 4, 11
  - minimal, 1
- Líneas nodales, 19

- Métodos de tipo minimax, 28
- Métricas
  - hiperbólicas
    - convergencia de, 53
  - hiperbólicas, 53
  - simétricas, 66
- Operadores
  - $\Delta + |\nabla\phi|^2$ , 28
  - de índice finito, 11
  - de Schrödinger, 4
- Orientación de  $\mathbb{S}^n$ , 1
- Perfil isoperimétrico, 10
  - de  $\mathbb{RP}^3$ , 24
  - de  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , 25
  - propiedades del, 10
- Primera fórmula
  - de variación del área, 3
  - de variación del volumen, 3
- Principio
  - de reflexión de Alexandrov, 24, 39
  - de simetrización
    - de Hsiang, 10, 86
    - de Steiner, 10
- Principio de dualidad, 9
- Problema isoperimétrico, 9
- Puntos umbílicos, 6
- Representación de Weierstrass, 6
  - para superficies con  $H = 0$ , 7
  - para superficies con  $H \neq 0$ , 7
- Retículo ortogonal, 83
- Segunda fórmula de variación del área, 3
- Segunda forma fundamental  $\sigma$ , 1
- Simetría en una superficie de Riemann, 66
- Soluciones del problema isoperimétrico, 9
- Superficie
  - débilmente embebida, 38
  - de Riemann, 1
  - embebida, 1
  - simétrica, 83
- Superficies
  - $\mathcal{P}$  de Schoen, 85
  - $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  de Schwarz, 34
  - de Scherk, 32, 33
    - doblemente periódicas, 34
    - simplemente periódicas, 32
  - estables
    - compactas, 12
    - en  $\mathbb{RP}^3$ , 23
    - en  $\mathbb{R}^3/S_\theta$ , 24
    - en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , 51
    - no compactas, 12
  - minimales
    - con índice cero, 27
    - con índice uno, 27
    - estables, 27
- Teorema
  - de Blaschke
    - para  $H \geq 0$ , 40
    - para superficies minimales, 42
  - de clasificación
    - de superficies minimales con índice uno y aplicación de Gauss, 34
    - de superficies minimales no compactas con índice uno, 33
  - de compacidad
    - de aplicaciones armónicas, 54
    - de superficies estables, 49
    - de superficies minimales con índice uno, 44
  - de existencia de Almgren, 9
  - de regularidad de Taylor, 9
  - de uniformización, 2
- Toro de Clifford, 21
- Toros
  - estables, 21
- Uno-forma de Weierstrass, 6
- Variación
  - con soporte compacto, 3
  - de una inmersión, 2
  - normal, 2
  - que conserva el volumen, 4
- Variedades
  - elípticas, 19
- Volumen orientado, 3