" INICIACIÓN TEORICO-PRÁCTICA A LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS II: CONSTITUCIÓN, PRÉSTAMOS Y EMPRÉSTITOS"

***Autor:* Dr. D. Roberto Gómez López**
Profesor de la Universidad de Granada (Dpto. Economía Financiera y Contabilidad)
Profesor Tutor del Centro Asociado de Málaga y Ronda

PROLOGO:

Nuevamente ante la finalización de este manual, me encuentro cansado por el esfuerzo de estos últimos momentos, pero ilusionado porque creo que ayudaré a muchos alumnos a tener un intrumento de estudio y aprendizaje de la mateira. Llegó a ustedes ante la convicción de que estimo haber realizado un trabajo que aportará contenidos educativos que permitirán conocer mejor el mundo de la matemáticas financieras, que de habitual, tanta dificultad crea al que se adentra por primera vez al mismo, quizá porque hay que conocer su lenguaje e instrumentación, para poder entenderlo.

La razón que justifica la realización de estos manuales o trabajos, ambos frutos de la docencia que estoy desarrollando en la Universidad de Granada, en particular en el Departamento de Economía Financiera y Contabilidad así como en la UNED de los centros asociados de Málaga y Ronda (Departamento de Economía y Administración de Empresas), queda justificada por el interés como docente de dotar al alumno con el que trabajo de un elemento a través del cual se pueda desarrollar el curos académico, y por tanto el aprendizaje de la presente materia, desde una perspectiva de planteamientos teóricos que se van reforzando con desarrollos prácticos.

Tanto los contenidos teóricos, así como los ejercicios prácticos, en lo que toca principalmente a la resolución y planteamiento de los mismos, ha sido trabajado y planteado por el docente que presenta este manual, indicando en particular que la parte práctica, en algunos casos, han sido enunciados que se utilizan y se han desarrollado por el equipo de trabajo del área de matemáticas financieras al que pertenezco en los indicados departamentos. Especial mención en tal sentido, quizá por su calidad pedagógica y por el especial conocimiento de las personas que han trabajado en la realización de algunos de ellos se determina en lo que respecta al departamento de la Universidad de Granada.

No he querido perder mis raices docentes de la UNED, por lo que he indicado algunas referencias en donde docentes de la sede central de Madrid muestran un trabajo interesantes también y enriquecedor a estos manuales, donde se ponen a disposición del alumno diversidad de problemas con sus respectivas soluciones, así como interesantes cuestionarios, también resueltos.

Finalizadas estas precisiones, entiendo que necesarias, para poder comprender el sentido y trabajo desarrollado, me es necesario recordar algunos detalles importantes sin los cuales este material no habría llegado a tomar forma. En primer lugar nombrar a ***mi familia, en donde mis padres Manuel y Antonia, así como mis hermanos Victor y Antonio, mi cuñada María José y mis sobrinas Maria José y Patricia Gómez López,*** han sido y son permanentemente los que me apoyan en todo momento, respectando y asumiendo la gran cantidad de ausencias y aislamiento que produce el tener una actividad solitaria y constante cuyo fruto está más a favor de una causa de amor hacia la docencia, por la privación de tiempo libre y disfrute en general que se plantea en cualquiera de estas misiones, en la mayoría de los casos poco aprecida por la sociedad en general.

Hay amigos y compañeros que han sido apoyos morales, sin los que el talante de hombre altruista y generoso con los demás no habría sido posible, en tal sentido tengo que nombrar a mis amigos y compañeros de los Guindos, en particular a la Escuela de Baloncesto de Málaga, en donde siempre se me ha entendido, apreciado y querido, con una especial mención, a mi ***amigo Nicolás García Chinchilla, y a Enrique Moyano Carballo***, quien con mucha paciencia y colaboración ha creado la web donde se encuentran las diversas investigaciones y publicaciones, solventando los numeroso y continuados problemas informáticos

En la parte docente, no puedo olvidar, puntualmente a mis jefes del departamento de Economía Financiera y Contabilidad que me han dado apoyo y comprensión en mi relación docente con la Universidad de Granada, especial mención he de realizar al profesor y Director del Departamento Don Antonio María López Hernández, quién desde el inicio ha apostado por mí, al permitirme asumir docencia en este departamento.

En definitiva, agradecer a todo el que me apoya y confía en mi. ***Gracias de corazón. Roberto.***

PROGRAMA SINTÉTICO

Tema 8.- Operaciones de capital

Tema 9.- Operaciones de préstamo

Ejercicios.- Préstamos
Relación.- Operaciones de Constitución y Préstamos

Tema 10.- Operaciones de empréstito

Ejercicios.- Empréstitos
Relación.- cuarta
Exámenes

Programa analítico

Tema 8.- Operaciones de capital

8.1. Conceptos generales
8.2. Constitución de un capital con imposición constante
8.3. Constitución de un capital con imposición geométrico
8.4. Constitución de un capital con imposición aritmética
8.5. Constitución de un capital con cuotas de constitución constantes
8.6. Características constantes: tantos efectivos

Tema 9.- Operaciones de préstamo

9.1. Conceptos generales
9.2. Amortización con reembolso único
9.3. Pago periódico de interese o sistema americano
9.4. Amortización mediante una renta constante o sistema francés
9.5. Amortización mediante una renta geométrica
9.6. Amortización mediante una renta aritmética
9.7. Amortización con cuotas de amortización constantes
9.8. Operaciones se préstamo con intereses fraccionados
9.9. Fondo de amortización
9.10. Sistema alemán
9.11. Características comerciales, tanto efectivos y TAE
9.12. Valor, usufructo y nuda propiedad de un préstamo

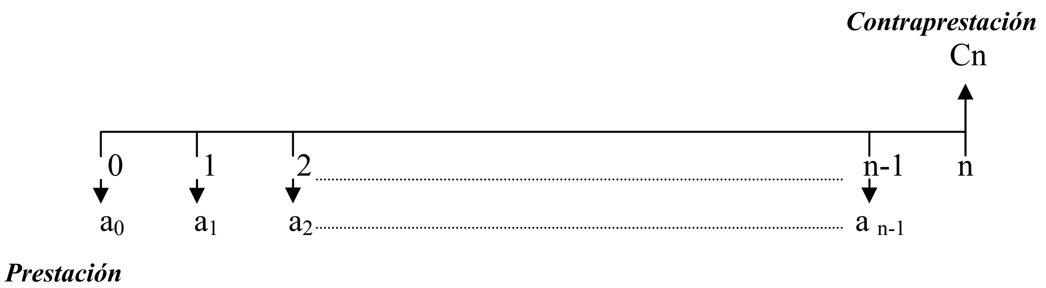
Tema 10.- Operaciones de empréstito

TEMA 8: *OPERACIONES DE CONSTITUCIÓN*

8.1. Conceptos generales

Las operaciones de constitución son operaciones financieras compuestas en las que la prestación múltiple (nos referimos a los capitales entregados por el ahorrador) y la concentración es única (nos referimos al capital constituido en t_n y que le será devuelto al ahorrador). Está operación está formada por los distintos ingresos con sus intereses generados durante el tiempo que dure la operación. En la mencionada operación financiera un elemento fundamental son los términos impositivos o constitutivos o también llamados imposiciones, los cuales quedan definidos como los capitales financieros que forman la prestación.

Gráficamente podemos representar tal operación de la siguiente manera:



Las cuestiones que se plantean en estas operaciones normalmente son de dos tipos:

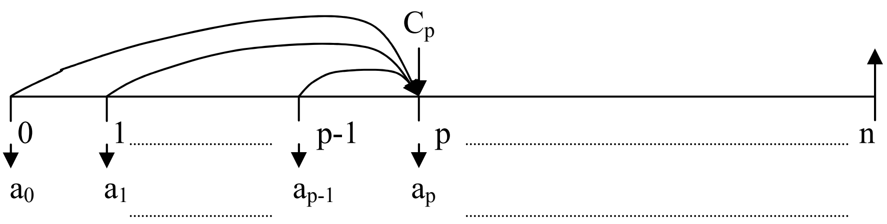
a) Conocidas las imposiciones a realizar, calcular el capital a constituir.
b) Conocido el capital que se desea constituir, calcular las imposiciones.

Observaciones:

El capital constituido en el momento "p": en tal situación el capital a obtener será C_p , el cual se definirá como la suma financiera de los ingresos realizados hasta la fecha.

Método retrosprectivo

Gráficamente podríamos indicar que la situación sería:



Método recurrente

Analíticamente podríamos destacar lo siguiente:

$$C_p = (C_{p-1} + a_{p-1}) \cdot (1+i) = \underline{C_{p-1} = C_{p-1} \cdot i} + \underline{a_{p-1} a_{p-1} \cdot i} \rightarrow R^-$$

$$\overline{C_{p-1}(1+i)} + a_p$$

$$C_p = C_{p-1} \cdot (1+i) + a_p \rightarrow R^+$$

Cuota de constitución: expresa el incremento de la cuantía del capital constituido en el periodo (p_{-1} , p).

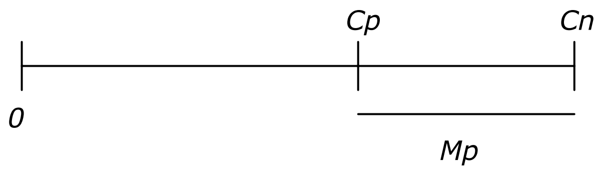
$$\Delta C_p = C_p - C_{p-1} = \begin{cases} \text{Si } R^- \rightarrow A\ C_p = (C_{p-1} + a_{p-1}) \cdot (1+i) - C_{p-1} \\ \quad = \cancel{C_{p-1}} + a_{p-1} + C_{p-1} \cdot i + a_{p-1} \cdot i - \cancel{C_{p-1}} = \\ \quad =(C_{p-1} + a_{p-1}) \cdot i + a_{p-1} \\ \\ \text{Si } R^+ \rightarrow A\ C_p = C_{p-1}(1+i) + a_p - C_{p-1} = \\ \quad = \cancel{C_{p-1}} + C_{p-1} \cdot i + a_p - \cancel{C_{p-1}} = \\ \quad = C_{p-1} \cdot i + a_p \end{cases}$$

RECORDAR

$$a_p = a_{p-1}(1+i) = a_{p-1} + a_{p-1} \cdot i$$

<u>Capital pendiente de constitución:</u> es la cuantía que queda por satisfacer desde el instante en el que nos posicionamos en C_p hasta el valor final de la contraprestación C_n.

Analíticamente se presentaría de la siguiente forma:



$$M_p = C_n - C_p$$

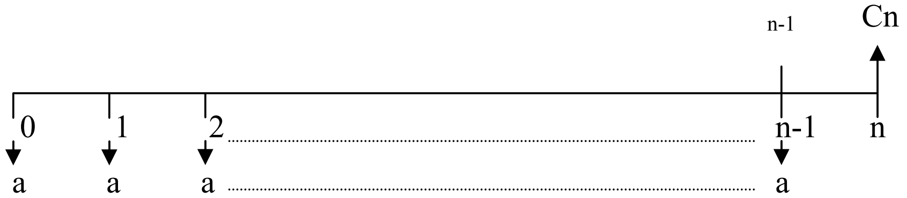
<u>Cuadro de constitución:</u> la expresión analítica que recoge los distintos valores a lo largo del periodo objeto de estudio de las magnitudes más representativas o definidoras de la operación financiera objeto de estudio

En cuanto a su representación:

K	Imposiciones	Intereses	Cuota de Constitución	Capital const.	Mp
1	a_0	$a_0 \cdot i$			
2	a_1	$i \cdot (C_o + a_1)$			
...	a_2	...			
...	...	...			
n	a_n	$i\,(C_o + a_{n-1})$			

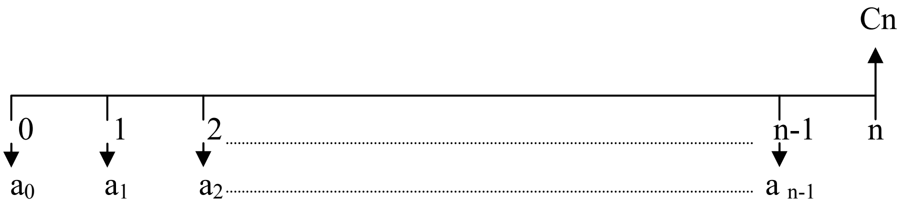
8.2. Constitución de un capital con imposiciones constantes

a_k = constante = a



$$C_n = a \cdot a_{\overline{n|}\,i}\,(1+i)\cdot(1+i)^n = a \cdot S_{\overline{n|}\,i}\cdot(1+i) \Rightarrow a = \frac{C_n}{S_{\overline{n|}\,i}\cdot(1+i)}$$

8.3. Constitución de un capital con imposiciones geométricas



q

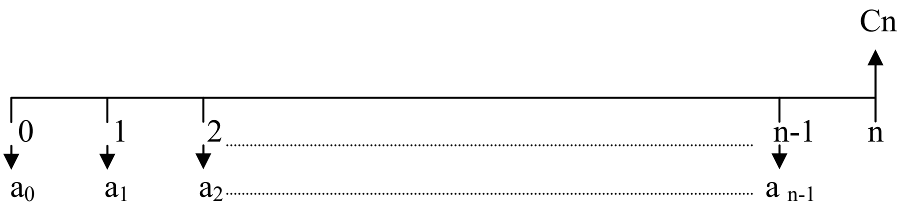
$$C_n = A_n'' \underbrace{(1+i)}_{\text{Prepagable}} \cdot \underbrace{(1+i)^n}_{\text{desde el momento 0 al n (final)}}$$

RECORDAR

Renta Prepagable Geométrica

$$A_n'' = C_1 \cdot \frac{1-q_n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

8.4. Constitución de un capital con imposiciones aritméticas



d

$$C_n = A_n' \cdot \underbrace{(1+i)}_{\text{Término Prepagable}} \cdot \underbrace{(1+i)^n}_{\text{Valor de la renta (en n)}}$$

RECORDAR

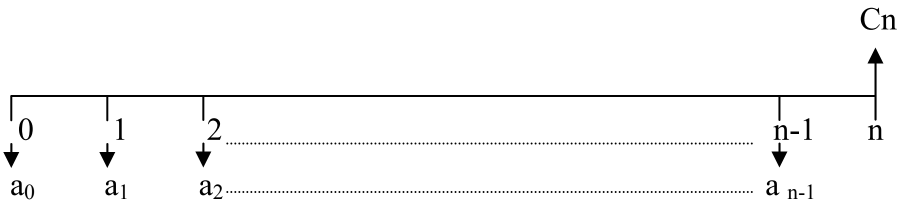
Renta Prepagable Aritmética

$$A_n = C_1 \cdot a_n i + \frac{d}{i} \cdot a_n i - \frac{n \cdot d}{i}(1+i)^{-n}$$

ó

$$A_n = \left[C_1 + \frac{d}{i} - n \cdot d\right] a_n i - \frac{n \cdot d}{i}$$

8.5. Constitución de un capital con cuotas de constitución constantes



a → $\frac{C_n}{n}$ A (Cuotas de constitución)

\+

→ Intereses

$$a_1 = \frac{A}{(1+i)}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{A \cdot i}{1+i}$$

$$I_1 = A - a_1$$

$$I_2 = A - a_2$$

TEMA 9: *OPERACIONES DE PRÉSTAMO*

9.1. Conceptos generales

En una operación de préstamo una persona (prestamista) entrega a otra (prestatario) una cierta suma de dinero C_0, que ésta se compromete a reembolsar en determinadas condiciones, pagando además, durante el tiempo de vigencia de la operación el interés convenido que puede ser fijo o variable.

Existen diferentes maneras por las cuales un prestatario puede devolver un préstamo con sus intereses, procesos que se denominan "Sistema o métodos de amortización del préstamo", entre los que cabe destacar:

1. ***Sistema de amortización de un solo pago***: el capital recibido se devuelve de una sola vez. Atendiendo al pago de los intereses se puede distinguir dos casos:

   a) *Préstamo simple o elemental:* el pago del capital prestado más los intereses, se realiza al final del período de amortización.
   b) *Amortización americano o pago único:* pago periódico de intereses y reembolso del capital en el momento de la cancelación del préstamo.

2. ***Sistema de amortización mediante rentas:*** son préstamos amortizables, mediante una distribución de pagos que forma una renta y que incluye parte de la devolución del capital prestado (intereses de la deuda pendiente). Podemos distinguir:

   a) *Prestamos amortizables, mediante rentas constantes:* los términos amortizables son constantes (C_1, C_2, ...C_n = C). Destacar:

      a.1) Método francés o progresivo.
      a.2) Método Alemán.

   b) *Préstamos amortizables mediante rentas variables,(en progresión aritmética o geométrica).*

3. ***Método de cuotas de amortización constante.***
4. ***Amortización con fraccionamiento de intereses.***

9.2. Amortización con reembolso único

Este tipo de préstamo se caracteriza por que la amortización del mismo se produce a su vencimiento mediante la entrega de una sola cuantía que comprenderá al principal del préstamo y sus intereses correspondientes.

Supongamos un capital prestado "C" al tanto efectivo "i", siendo el plazo de reembolso "t", el prestatario deberá rembolsar a la conclusión del año t, el montante alcanzado por el capital Co al tanto i durante t años, el reembolso será $Ct=Co(1+i)^t$

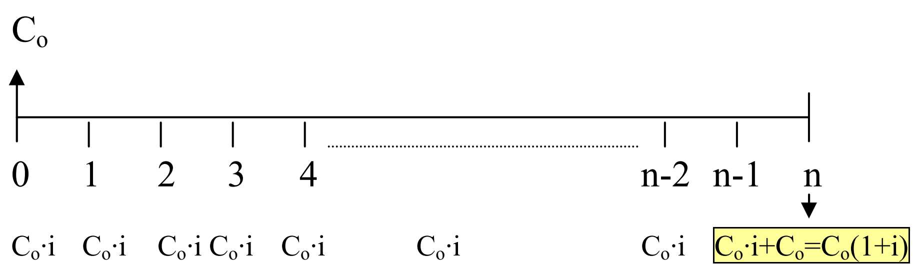
Se define como una operación de amortización en la que la prestación y la contraprestación están formados por una sola cuantía.

9.3. Pago periódico de intereses o sistema americano.

Se caracteriza porque el prestatario debe pagar periódicamente los intereses del capital prestado y amortizarlo de una sola vez al final de la operación.

Esta modalidad de préstamo, el principal del préstamo Co, se reembolsa mediante un solo pago al finalizar el contrato del año t y anualmente se van pagando los intereses Co·i.

El préstamo debe pagar periódicamente los intereses del capital prestado y amortizarlo de una sola vez al final de la operación.



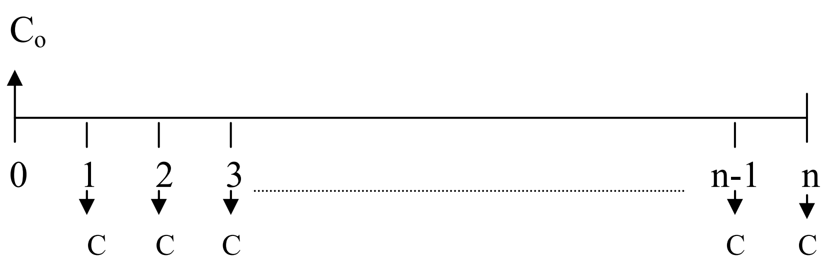
9.4. Amortización mediante una renta constante o sistema francés

Se caracteriza porque los términos amortizativos permanecen constantes, y el tanto de valoración también, ambos, durante toda la vida del préstamo.

De esta forma al principio la mayor parte de la cuota son intereses, siendo la cantidad destinada a amortización muy pequeña. Esta proporción va cambiando a medida que el tiempo va transcurriendo.

Consiste en amortizar un capital prestado Co mediante términos amortizativos constantes (C) y siendo el tanto de interés también constante.

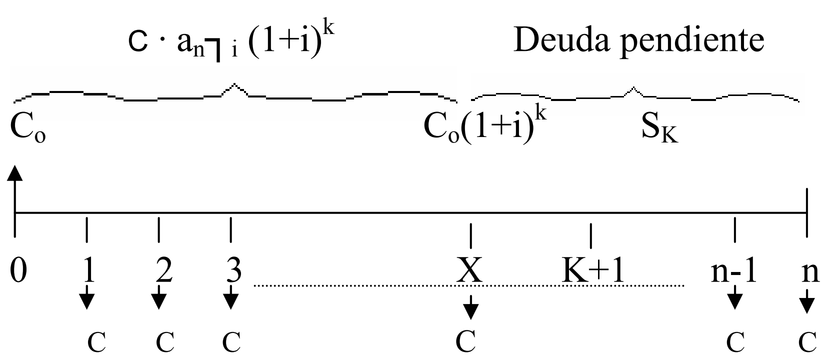
Gráficamente lo podemos representar de la siguiente forma:



__Equivalencia financiera.__

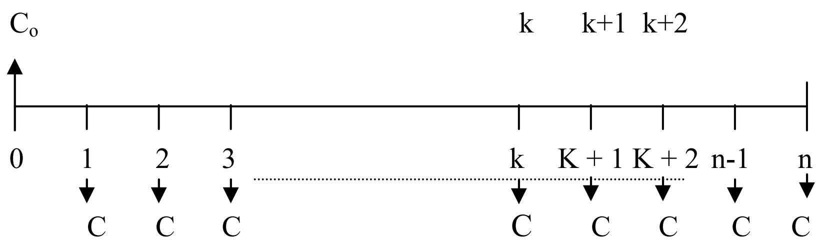
$$Co = C \cdot a_{\overline{n}|\,i} \Rightarrow C = \frac{C_o}{a_{\overline{n}|\,i}}$$

__El saldo del préstamo o deuda pendiente o capital vivo al principio del periodo__ K +1 __es:__



$$S_k = C_o\,(1+i)^k - \underbrace{c\,a_{\overline{k}|\,i}}_{1_{\overline{k}|\,i}}\;\underbrace{(1+i)^k}_{2}$$

→ ***Rva matemático calculado por el método retrospectivo***



$$S_k = C \cdot a_{\overline{n-k}|\,i}$$

→ ***Rva matemática calculado por el método prospectivo***

La cuota de interés del año K es:

$$\boxed{I_k = S_{k-1} \cdot i} = C\,a_{\overline{n-k+1}|\,i} \cdot i$$

La cuota de amortización del año K es:

$$\boxed{\alpha_k = C - I_k} = \underbrace{\frac{C_o}{a_{\overline{n}|\,i}}}_{C} - \underbrace{C \cdot a_{\overline{n-k+1}|\,i} \cdot i}_{I_k = S_{k-1}\cdot i} =$$

$$\frac{C_0}{a_n i}\left[1 - a_{n-k+1} i \cdot i\right] = \frac{C_0}{a_n i}\left[1 - \frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{i}\,i\right] =$$

$$\frac{C_0}{a_n i}(1+i)^{-(n-k+1)} = \frac{C_0}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}(1+i)^{-(n-k+1)} =$$

$$\frac{C_0}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}(1+i)^{-n}(1+i)^{-(-k+1)} =$$

Aclaración 2

$$\frac{C_0}{\frac{1(1+i)^n - (1+i)^{-n}(1+i)^n}{i}}(1+i)^n(1+i)^{-n}(1+i)^{k-1} =$$

Aclaración 1

$$\frac{C_0}{\frac{(1+i)^n-1}{i}}(1+i)^{k-1}=\frac{C_0}{S_n i}(1+i)^{k-1}$$

Aclaración 1

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}=\frac{(1+i)^n-(1+i)^{-n}(1+i)^n}{i\cdot(1+i)^{-n}}=\frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot(1+i)^{-n}$$

Aclaración 2

$$(1+i)^n(1+i)^{-n}=(1+i)^{n-n}=(1+i)^0=1$$

Aclaración 3

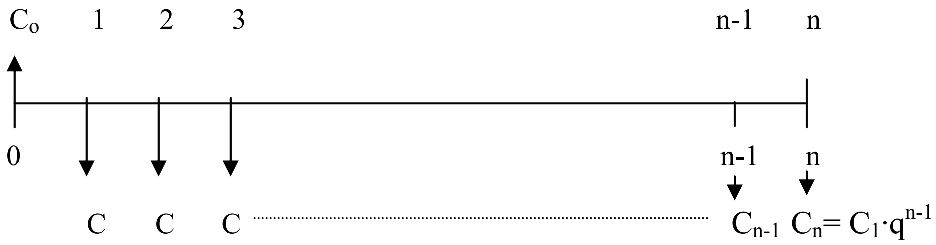
$$\frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot\frac{1}{(1+i)^n}=\frac{(1+i)^n}{i\cdot(1+i)^n}$$

9.5. Amortización mediante una renta geométrica

Se caracteriza porque los términos amortizativos varían en progresión geométrica, y el tanto de valoración y la razón de la progresión permanecen constantes, durante toda la operación.

De esta razón va a depender la variación que se irá produciendo en las cuotas. Así, a mayor razón menor es la cuota inicial y mayor será la final.

Además se pone de manifiesto que cuanto mayor es la razón de la progresión mayor es el importe de los intereses pagados a lo largo de toda la operación.



$$C_o = A_n''$$

Si $q \neq 1+i \Rightarrow C_o = C_1 \dfrac{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q}$

Si $q = 1+i \Rightarrow C_o = C_1 \dfrac{n}{1+i}$

De estas expresiones se despeja la primera anualidad

Sin el primer término no puedo hacer la progresión geométrica

$q \neq 1+i \Rightarrow C_1 = \dfrac{C_0 \cdot (1+i-q)}{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}$

$q = 1+i \Rightarrow C_1 = \dfrac{C_0 \cdot (1+i)}{n}$

A partir de ella,
$C_2 = C_1 \cdot q$
$C_n = C_1 \cdot q^{n-1}$

Primera cuota de amortización:

$\alpha_1 = C_1 - I_1 = C_1 - C_o \cdot i$

Si comparamos las anualidades, de dos años consecutivos.

$C_k = \alpha_k + I_k \Rightarrow S_{k-1} \cdot i$

$C_{k+1} = \alpha_k + I_{k+1} \Rightarrow S_k \cdot i$

$C_k - C_{k+1} = \alpha_k - \alpha_{k+1} + i \cdot (S_{k-1} - S_K)$

$C_k - C_{k+1} = \alpha_k - \alpha_{k+1} + i \cdot \alpha_k$

$C_k - C_{k-1} = \alpha_k \cdot (1+i) - \alpha_{k+1}$

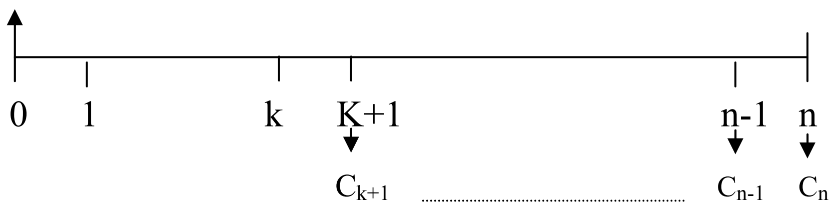
$\alpha_{K+1} = \alpha_k \cdot (1+i) - C_k + C_{k+1}$

$\alpha_{K+1} = \alpha_k \cdot (1+i) - C_k + C_k + C_k \cdot q$

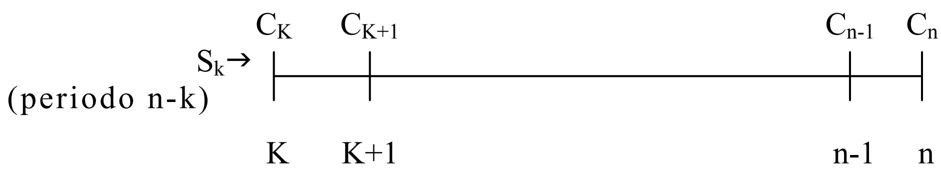
Al ser progresión geométrica => $C_{k+1} = C_k \cdot q$

$$\boldsymbol{\alpha_{k+1} = \alpha_k \cdot (1+i) + C_k \cdot (q-1)}$$

Saldo al principio del periodo K +1:



"Renta geométrica postpagable"



$$\text{Según sea } q \begin{cases} S_k = C_k+1 \cdot \dfrac{1-q^{n-k} \cdot (1+i)^{-(n-k)}}{1+i-q} \rightarrow \text{para } q \neq 1+i \\[2em] S_k = C_k+1 \cdot \dfrac{(n-k)}{1+i} \rightarrow \text{para } q = 1+i \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Método prospectivo

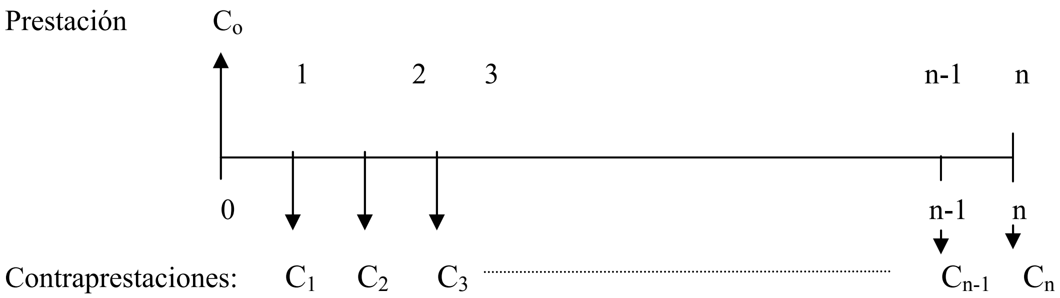
9.6. Amortización mediante una renta aritmética

Consiste en la amortización de un préstamo Co mediante anualidades que varían en progresión aritmética de razón "d".

Se caracteriza porque los términos amortizativos varían en progresión aritmética, y el tanto de valoración y la razón de la progresión permanecen constantes, durante toda la operación.

Es importante el estudio de la razón aplicada. De esta razón va a depender la variación que se irá produciendo en las cuotas. Así, a mayor razón menor es la cuota inicial y mayor será la final.

Además el importe de la razón es proporcional al total de los intereses pagados. Así, tenemos que a mayor razón, mayor es el importe de los intereses pagados y a la inversa. Esto se debe a que una mayor razón hace que al principio amorticemos un menor capital, o que incluso el importe de la cuota no llegue a cubrir el importe de los intereses, con lo que éstos se acumularán al capital y volverán a generar intereses.



$$C_2 = C_1 + d$$

$$\vdots$$

$$C_n = C_{n-1} + d = C_1 + (n-1)\, d$$

Equivalencia financiera:

$$\underbrace{C_o}_{\text{Préstamo}} = \underbrace{C_1 \cdot a_{\overline{n|}\, i} + \frac{d}{i}\, a_{\overline{n|}\, i} - \frac{n \cdot d}{i}}_{\text{Contraprestación}}$$

Primera cuota de amortización:

Para el periodo 1:

$$\alpha_1 = C_1 - I_1 = C_1 - C_o \cdot i$$

En general:

$$C_k + 1 = C_k + d$$

$$\underbrace{A_{k+1} + I_{K+1}}_{C_{k+1}} = \underbrace{\alpha_K + I_k}_{C_k} + d$$

Sabemos

$$C_{k+1} - C_k = d$$

$$\alpha_{k+1} + I_{k+1} - \alpha_k + I_k + d = d$$

Recordatorio

$$I_1 = Co \cdot i$$

$$I_{k+1} = S_k \cdot i$$

$$I_k = S_{k-1} \cdot i$$

*

$S_k \rightarrow$ *Capital en el momento k pendiente de amortizar.*

$S_{k+1} \rightarrow$ *en el momento k +1 pendiente de amortizar*

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k + I_{k+1} - I_{k+1} - I_K = d$$

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k + S_{k \cdot i} - S_{k-1} \cdot i = d$$

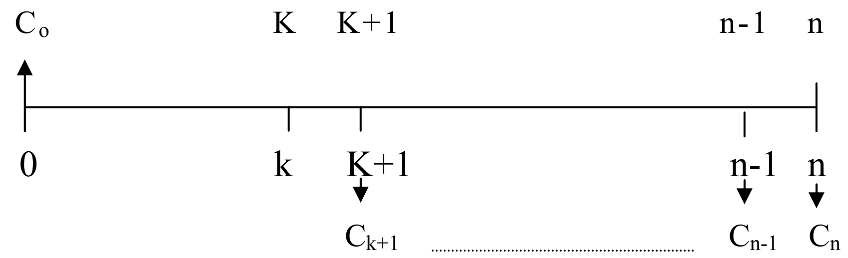
$$\alpha_{k+1} - \alpha_k + i \cdot [S_k - S_{k-1}] = d$$

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k + i \cdot (-\alpha_k) = d$$

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k \cdot (1+i) = d$$

La diferencia es una cuota de amortización.

El capital pendiente de amortizar al final del año K:



$$f \rightarrow C_1 \cdot a_{n\rceil i} + \frac{d}{i} \cdot a_{n\rceil i} - \frac{(n-d)}{i} \cdot (1+i)^{-n}$$

$$S_k = C_{K+1} \cdot a_{n-k\rceil i} + \frac{d}{i} \cdot a_{n-k\rceil i} - \frac{(n-k)-d}{i} \cdot (1+i)^{-(n-k)}$$

Método prospectivo

9.7. Amortización con cuotas de amortización constantes

Es una operación de préstamo en la que el prestatario destina cantidades iguales en todos los periodos para amortizar el capital prestado C_o, es decir,

$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \alpha$; *Luego:* $\boxed{\alpha = \frac{C_o}{n}}$

En este préstamo los intereses se harán efectivos fraccionadamente dentro del período de amortización, mientras que las cuotas de amortización constantes no se fraccionan y se abonan al final del período.

Capital pendiente de amortizar al final del periodo "K" (después de hacer efectivo el término amortizativo Ck)

$$S_k = C_o - \alpha \cdot k = \alpha \cdot n - \alpha \cdot k = \alpha\,(n-k)$$

---*"Vamos a comprobar que las anualidades decrecen en progresión aritmética":*

$$-\quad\begin{array}{l} C_{k+1} = \alpha + I_{k+1} \\ C_k = \alpha + I_k \\ \hline \end{array}$$

S_k = Capital pendiente de amortizar

$$C_{k+1} - C_k = I_{k+1} - I_k$$

$$C_{k+1} - C_k = S_k \cdot i - S_{k-1} \cdot i$$

$$C_{k+1} - C_k = (S_k - S_{k-1}) \cdot i$$

$$C_{k+1} - C_k = -\alpha \cdot i$$

$$C_{k+1} = -\alpha \cdot i + C_k$$

S_{k-1} S_k

$S_{k+1} = C_k - \alpha_k \rightarrow S_k - S_{k-1} = -\alpha_k$

$$C_{k+1} = C_k - \alpha \cdot i$$

Las anualidades siguen una progresión aritmética decreciente de razón $d = -\alpha \cdot i$

---*"Vamos a comprobar que las cuotas de interés, también varían con la misma ley de recurrencia".*

$$I_{K+1} = S_k \cdot i = (S_{k-1} - \alpha) \cdot i = S_{k-1} \cdot i - \alpha \cdot i = I_k - \alpha \cdot i$$

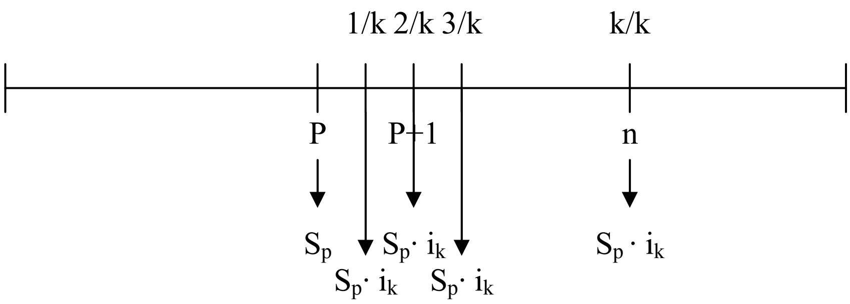
$$I_{k+1} = I_k - \alpha \cdot i$$

9.8. Operaciones de préstamo con intereses fraccionados

No es método de amortización distinto, sino una variación que puede ocurrir con cualquier sistema de amortización.

Se produce al amortizar los préstamos, cuando en vez de pagar la cuota de interés al final de cada periodo (por ej.: anualmente) se van pagando fraccionadamente a lo largo del mismo (por ej.: trimestralmente) con un interés i_k de frecuencia equivalente al tanto efectivo anual i .

$$\boxed{i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$



<u>Demostración:</u>

$$\boxed{S_p \cdot i_k \cdot a_{\overline{k|}\,i_k} \cdot (1+i_k)^K} = S_p \cancel{i_k} \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-k}}{\cancel{i_k}} \cdot (1+i_k)^k = S_p \cdot [(1+i_k)^k - 1] =$$

$$= S_p \cdot [(\cancel{1}+i)-\cancel{1}] =$$

Igualdad $\longrightarrow$ $= \boxed{S_p \cdot i}$

Esta expresión demuestra que, efectivamente, es equivalente realizar los pagos de intereses por K-ésimo de año que realizar un pago único al final del año.

Este fraccionamiento, por tanto, no afectará a:

- Las cuotas de amortización que se pagan al final de cada periodo $\alpha p+1$.

- Al capital pendiente de amortizar Sp

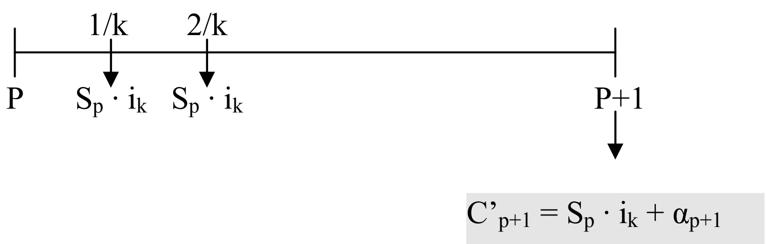
Si será indicativo el matizar que sí afectará a los términos amortizativos cuya expresión analítica quedará de la siguiente manera:

$$\boxed{C'_K = \alpha_k + S_{k-1} \cdot i_k} \qquad \underline{\alpha_k = C'_k - S_{k-1} \cdot i_k}$$

<u>Gráficamente :</u>

- Si **no hay fraccionamiento** de intereses:

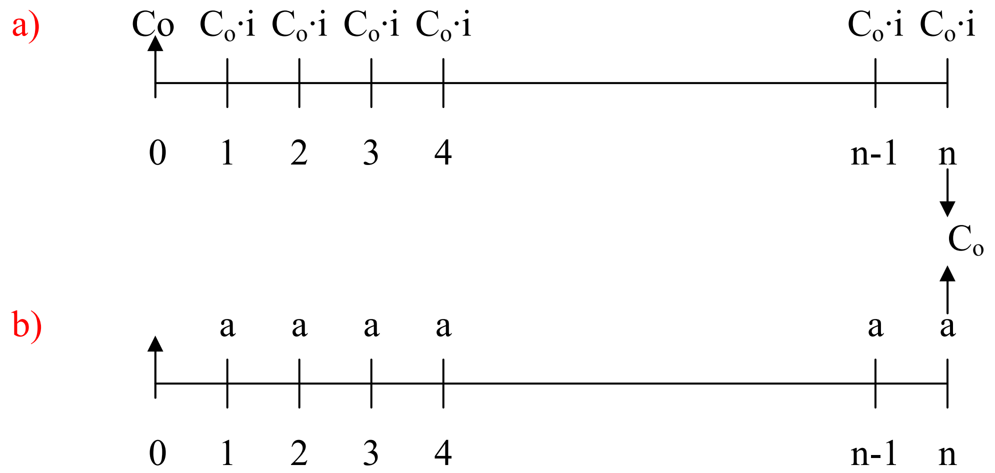
- Si **hay fraccionamiento** de intereses:



9.9. Fondo de amortización

La anualidad a satisfacer por el prestatario es la suma de:

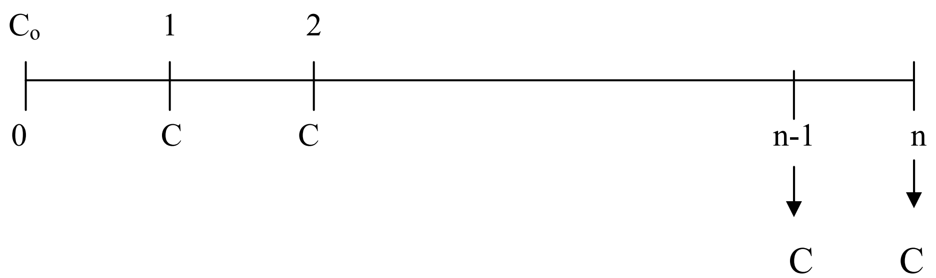
a) Los intereses del capital al tanto de interés nominal para préstamos en el plazo considerado, Co · i.
b) Una cuota constante, "a" necesaria para poder reconstruir en n años el capital Co, mediante su colocación al tanto i' que rija para inversiones complementarias.



$C_o = a \cdot a_{n\rceil\, i'}\ (1+i)^n = a \cdot A_{n\rceil\, i'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a = \dfrac{C_o}{\Delta_{n\rceil\, i'}}}$

La anualidad será: C = $C_o \dfrac{C_o}{\Delta_{n\rceil\, i'}} \qquad = C_o \cdot i + a$

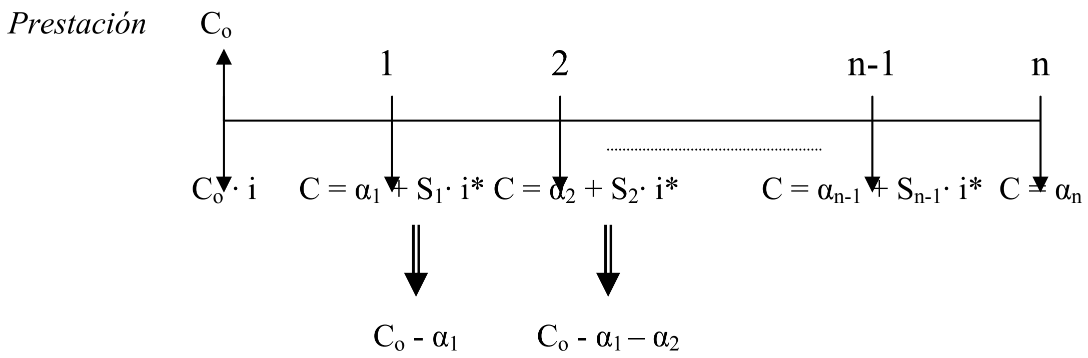


$C_o = C \cdot a_{n\rceil\, ie} \rightarrow a_{n\rceil\, ie} = \dfrac{C_o}{C} \rightarrow$ ¿ *i efectivo* ?

9.10. Sistema alemán

Este método consiste en amortización un capital (Co, to) con unos términos amortizativos constantes y tipo de interés constante con la particularidad de que la cuota de interés de cada periodo se pago al principio del periodo correspondiente. Este conlleva varias características destacables:

a) La cuota de interés que el prestatario paga cada periodo se calcula sobre el capital pendiente de amortizar del periodo y no del periodo anterior (sistema francés).
b) En el momento de conceder el préstamo, el prestamista retiene del capital prestado C_o los intereses correspondientes al primer periodo (Co · i*).
c) El término amortizativo del último periodo está formado sólo por la última cuota de amortización α_n.



$C_o - C_o\, i^* = c \cdot a_{\overline{n}|}\, i$, siendo $i = \dfrac{i^*}{1-i} = \dfrac{d}{1-d}$, $i^* = \dfrac{i}{1+i} = c$

$$i^* = \frac{i}{1+i} = d$$
$$(1+i) = (1-d)$$

Recordatorio

Cuota de amortización: varias a comprobar que surge una progresión geométrica de razón (1-i*)

$$C = \alpha_k + S_k\, i^*$$
$$C = \alpha_{k+1} + S_{k+1} \cdot i^*$$

$$C = \alpha_k - \alpha_{k+1} + S_k + i^* - S_{k+1} \cdot i^*$$

$$C = \alpha_k - \alpha_{k+1} + S_k + i^* - (S_k - \alpha_{k+1}) \cdot i^*$$

$$C = \alpha_k - \alpha_{k+1} + S_k + i^* - S_k \cdot i^* + \alpha_{k+1} \cdot i^*$$

$$\boxed{\alpha_{k+1}\,(1-i^*) = \alpha_k}$$

$$\alpha_n = C$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_n \cdot (1-i^*)$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1} \cdot (1-i^*) = \alpha_n\,(1-i^*)^2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 \cdot (1-i^*) = \alpha_n\,(1-i^*)^{n-1}$$

Como sabemos $C_o = \xi_{i=1}^{n}\, \alpha_i = \alpha_n\, [\underbrace{(1-i^*)^{n-1} + ... + (1-i^*)^2 + (1-i^*) + 1}]$

*S*uma de una progresión geométrica de razón $(1-i^*)^{-1}$

En tal sentido precisamos que

$$S \left\{ \begin{array}{l} a_1 = (1-i^*)^{n-1} \\ \\ a_n = (1-i^*)^{n-n} = 1 \end{array} \right.$$

Suma de los términos de un progresión geométrica de razón $= (1-i)$

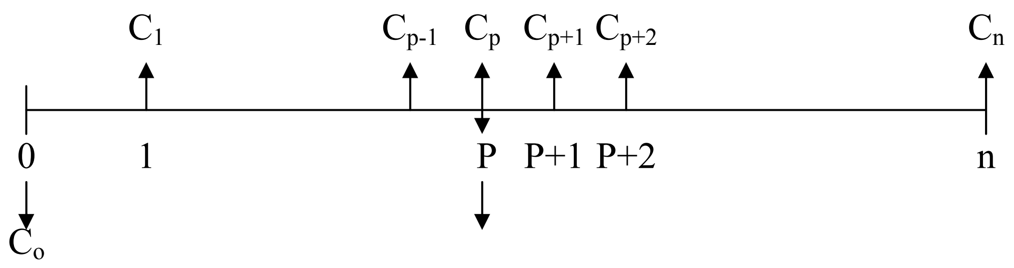
$$S = \frac{A_1 - a_n \cdot r}{1 - r} = \frac{[(1-i^*)^{n-1} - 1\,(1-i^*)^{-1}] \cdot (1-i^*)}{[1-(1-i^*)^{-1}] \cdot (1-i^*)} = \frac{(1-i^*)^n - 1}{(1-i^*) - 1} =$$

$$= \frac{(1-i^*)^n - 1}{i^*} = \frac{1-(1-i^*)^n}{i^*}$$

$$C_o = \alpha_n \cdot \frac{1-(1-i^*)^n}{i^*} \Rightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{1-(1-i^*)^n}{i^*} = C}$$

$A_n = C \longrightarrow$ Condición modelo alemán 3ª

9.12. Valor, usufructo y nuda propiedad de un préstamo



Valor: de todas las anualidades pendientes, actualizar al principio del periodo (p+1) ó final del periodo (p) al tipo de interés vigente en le mercado.

$$\text{Valor}_P = \xi_{K=P+1}^{n} C_k (1+i_M)^{-(k-p)} \longrightarrow I_k + \alpha_k$$

Usufructo: valor de todas las cuotas de interés pendientes valorados al tipo de mercado.

$$_p = \xi_{k=p+1}^{n} I_k (1+i_M)^{-(k-p)}$$

Nuda propiedad: representa el valor actualizado de las cuotas de amortización pendientes, valoradas al tipo de interés de mercado.

$$_p = \xi_{k=p+1}^{n} \alpha_k (1+i_M)^{-(k-p)}$$

$$\boxed{V_p = U_p + N_p}$$

EJERCICIOS DE OPERACIONES DE CONSTITUCIÓN Y PRÉSTAMOS

1) Se contrata un préstamo de 200000 Eu, al 6% durante 8 años con la condición de poder pagarlo con pago total anticipado. Supuesto que se cancele 3 años antes del vencimiento cuando el interés en el mercado de del 5%. Hallad el importe de la cancelación.

$C_o = 200.000$

$i = 6\%$

$i' = 5\%$

$t = 8$

$$A = \frac{Co(1+i)^T}{(1+i)^{T-W}} \quad ; \quad \frac{200000(1.06)^8}{(1.05)^3} = \boxed{\mathbf{275365.18}}$$

2) Se obtiene un préstamo de 60.000 € a 10 años y al 6%. Calcula el pago único que hay que hacer a la cancelación.

$C_o = 60.000$
$i = 6\%$
$t = 10$

$$C_t = C_o\,(1 + i)^t$$
$$C_t = 60.000\,(1'06)^{10}$$
$$C_t = \boxed{107.450'8618}$$

3) Al cabo de 4 años se amortizó un préstamo con el pago de 24.310 € si el tanto anual es del 5%. Hallar el principal del préstamo.

$C_t = 24.310$
$t = 4$
$i = 5\%$

$$C_t = C_o\,(1 + i)^t$$
$$24.310 = C_o\,(1'05)^4$$
$$C_o = \boxed{19.999'99}$$

4) Hace 4 años que una institución financiera nos concedió un préstamo de 500000Eu, al 8 % para se amortizado al cabo de 9 años, con reembolso único de capital e interese. Si hoy el tanto de interés del mercado es de 8 % . Calcular:

A) La cantidad que habrá que entregar para cancelar totalmen4e el préstamo en el día de hoy.
B) La cantidad que había que pagar al finalizar el préstamo, si en el día de hoy hubiese entregado 250000.
C) La cuantía pendiente de amortizar en el momento de entregar 250000Eu.

$C_o = 500.000$
$i = 8\%$
$t = 9$
$t\text{-}w = 5$
$i' = 8\%$

$$C_t = C_o\,(1 + i)^w$$

A) $C_t = 500000\,(1.08)^4 = \boxed{680244.44}$

B) $R\,(1 + i')^{t-w} + S = C_o\,(1 + i)^t$

$$250000(1.08)^5 + S = 500000(1.08)^9;$$
$$367332.92 + S = 999502.31$$
$$S = \boxed{632170.29 \text{ euros}}$$

C) $632170\ (1.08)^5 = \boxed{430244.48 \text{ euros}}$

5) Calcula el tanto de interés anual al que se prestó un capital de 70.000€ hace 3 años para amortizar mediante reembolso único de capital e interés sabiendo que en el día de hoy el importe de su cancelación total asciende a 93.170 el tanto de mercado actual coincide con el tanto de interés al que se concerta el préstamo.

I= ¿
$C_o = 70.000$
$A = 93.170$
$W = 3$

$$A\,(1 + i')^{t-w} = C_o\,(1 + i)^t$$
$$93.170\,(1 + i)^{t-3} = 70.000\,(1 + i)^t$$
$$\frac{93170 \cdot (1+i)^{t-3}}{70.000} = (1+i)^t$$
$$1'331\,(1 + i)^{t-3} = (1 + i)^t$$

$$1'331 = \frac{(1+i)^t}{(1+i)^{t-3}}$$

$$1'331 = \frac{1}{(1+i)^{-3}}$$

$$1'331 = (1 + i)^3$$

$$i = 0'1$$

$$\boxed{i = 10\ \%}$$

6) Calcular la cuantía que menor de entregar como devolución de un préstamo de 20.000 € al 8% de 6 años de duración que se concertó con una amortización única si quisiéramos cancelarla anticipadamente a los 4 años siendo el interés en este momento del 7%.

$C_o = 20.000$

$A = 7\%$

$i' = 8\%$

$t = 6$

$w = 4$

$$A\ (1 + i')^{t-w} = C_o\ (1 + i)^t$$

$$A\ (1 + 0'07)^{6-4} = 20.000\ (1 + 0'08)^6$$

$$\boxed{A = 27.720'75}$$

7) 8. Qué cuantía tendríamos que entregar para cancelar el préstamo anterior al finalizar el mismo, si en el cuarto año hubiérmos entregado 8.000 €

$A = 27.720'486$
$C_o = 20.000$
$i = 8\%$
$i' = 7\%$
$S = ¿$
$t = 6$
$w = 4$
$R = 8.000$

$$R\ (1 + i)^{t-w} + S = C_o\ (1 + i)^t$$
$$8000\ (1'07)^{6-4} + S = 20.000\ (1'08)^6$$

$$S = 22.578'286$$

8) Hallar el interés que produce un préstamo de 38.640 € cancelado mediante pagos únicos al cabo de 5 años si el tanto anual es del 3%.

$C_o = 38.640$
$i = 3\%$
$I = ¿$
$t = 5$

$$C_t = C_o\,(1 + i)^t$$
$$C^t = 38640\,(1 + 0´03)^5$$
$$C^t = 44794´35$$

$$I = C_t - C_o$$
$$I = 44794´35 – 38640$$
$$\boxed{I = 6154´3502}$$

9) Se contrata un préstamo de 100.000 € durante 10 años con la condición de poder cancelarlo con pago total anticipado. Si el tanto de interés es del 5% y la cancelación se realiza 4 años antes del vencimiento. Calcula el pago efectuado.

$C_o = 100.000$
$t = 10$
$i = 5\%$
$t – w = 10 – 6$

$$A\,(1 + i´)^{t-w} = C_o\,(1 + i)^t$$
$$A\,(1 + 0´05)^{10-6} = 100.000\,(1 + 0´05)^{10}$$
$$\boxed{A = 134.009´56}$$

10) Un préstamo de 50.000 € contratado a 6 años al 8% se cancela 3 años antes del vencimiento, cuando el interés del mercado es del 5%. Hallar el importe de la cancelación.

$C_o = 50.000$
$t = 6$
$w = 6 - 3$
$i = 8\%$
$i´=5\%$
$A =?$

$$A\,(1 + i´)^{t-w} = C_o\,(1 + i)^t$$
$$A\,(1 + 0´05)^3 = 50.000\,(1 + 0´08)^6$$
$$\boxed{A = 68.540´085}$$

11)Un préstamo de 200.000 € contratado al 6% durante 8 años recancela de la siguiente forma. Un primer pago de 90.000 € 3 años antes del vencimiento y un segundo pago al vencimiento final. Hallar el importe del segundo pago.

$C_o = 200.000$
$i = 6\%$
$t = 8$
Pagos = 1º 90.000 , 5 años y 2º ¿ 8 años

$$R\,(1 + i')^{t-w} + S = C_o\,(1 + i)^t$$
$$90.000\,(1 + 0'06)^8 + S = 200.000\,(1'06)^8$$
$$S = 211.578'17$$

R: el reembolso parcial de un termio valorado al finalizar el plazo.
S: la cuantía en el momento del vencimiento del préstamo.

12)Supuesto el problema anterior pero conociendo que el efectivo del primer pago el tanto estaba al 4%. Hallar el importe del 2º pago.

$$R\,(1 + i')^{t-w} + S = C_o\,(1 + i)^t$$
$$90.000\,(1 + 0'04)^8 + S = 200.000\,(1 + 0'06)^8$$
$$\boxed{S = 217.531'85}$$

13)Se contrata un préstamo de 150.000 € al 8% para amortizarse con reembolso único de capital e intereses al cabo de 10 años. Hallar:

a) El importe que pagará el pretatario al cancelar el préstamo a los 10 años.
b) La cuantía que exigirá el prestamista para cancelar el préstamo finalizado el 6º año, si el tipo de cuota fuese del 7%.
c) Cuantía elegida por el pretamista al finalizar el contrato si al finalizar el 6º año el prestatario hubiese entregado 75.000 €.
d) Pendiente amortizar en el momento de entregar los 75.000 €.

a)

$C_o = 150.000$
$i = 8\%$
$t = 10$

$$C_t = C_o\,(1 + i)^t$$
$$C_t = 150.000\,(1 + 0'08)^{10}$$
$$C_t = 323838'75$$

b)

$$A\,(1 + i')^{t-w} = C_o\,(1 + i)^{\,t}$$
$$A\,(1 + 0'07)^{10-6} = 323838'75$$
$$A = 247055'03$$

c)

S = ?

$$75.000\,(1 + 0'07)^{10-6} + S = C_o\,(1 + i)^t$$
$$S = 225529'05$$

d)

$$B = S\,(1 + i)^{-t-w}$$
$$B = 225529'05\,(1'08)^{-w}$$
$$B = 165770'58$$

14) Un préstamo de 100.000 € concertado por 10 años al 6% con pago periódico de intereses y reembolso único se desea cancelar una vez pagado el interés del 4º año, sabiendo que el interés en el mercado en dicho año es del 4%, cuánto comportaba la amortización?.

$C_o = 100.000$
$t = 10$
$i = 6\%$
$A = ¿$
$i' = 4\%$
$t\text{-}w = 10 - 4 = 6$
$w = 4$

$$a = C_o + C_o\,(1 + i') \cdot A_{\,t\text{-}w \rceil\, i'}$$

$$A = 100.000 + 100.000(0'06 - 0'04) \cdot \frac{1 - u^{t-w}}{i'}$$

$$A = 100.000 + 2000\frac{1 - (1 + 0'04)^{-6}}{0'04}$$

$$\boxed{A = 110484'27}$$

15) Si en el ejercicio anterior en la conclusión del 4º año se hubiesesn entregado 10.000 € que cuantía queda por amortizar?.

$C_o = 100.000$
$t = 10$
$w = 4$
$i = 6\%$
$i' = 4\%$
$R = 10.000$
$B = ¿$

$$B = C_o - \frac{R\,(1 + i')^{t-w}}{1 + i\,S_{\,t\text{-}w\rceil\, i'}}$$

$$B = 100000 - \frac{10000(1+0'04)^{10-4}}{1+0'06\cdot\left(\frac{(1+0'04)^{10-4}-1}{0'04}\right)}$$

$$B = 100000 - \frac{12653'19}{1'0979705}$$

$$\boxed{B = 90940'938}$$

16)Se amortiza un préstamo de 300.000 € para amrtizar en 6 años con pago periódico de intereses al 5% . Calcular la anualidad sabiendo que se va a establecer una cuota de amortización para recuperar el capital siendo el interés del fondo del 3%. Establecer así mismo el cuadro de amortización correspondiente al fondo.

$C_o = 300.000$
$T = 6$
$I = 5\%$
$I' = 3\%$

$$k = \frac{(1'03)^6 - 1}{0'03} = 200.000$$

$k = 46379'25$
Amort =

1) $K \cdot S_n\, i' = C_o$

$$K = \frac{C_o}{S_n i'} = \frac{300000}{6'4684} = 46379'25$$

2) Interés del fondo: 46379´25 x 0´03 = 1391´38
3) 46379´25 + 1391´38 = 47770´63
4) 47770´63 + 46379´25 = 94149´88

$$S_n i' = \frac{(1+0'03)^6 - 1}{0'03} = \frac{0'1940}{0'03} = 6'4684$$

AÑO	FONDO AL PRIN	INTERESES DEL FOND	CTA. AMORT	AUMENTO DEL FOND	FONDO AL FINA
1			46.379´25	46.379´25	46.379´25
2	46.379´25	1391´38	46.379´25	47.770´63	94.149´88
3	94.149´88	2824´50	46.379´25	49.208´75	143.353´63
4	143.353´63	4300´61	46.379´25	50.679´86	194.033´49
5	194.033´49	5821´00	46.379´25	52.200´26	24.633´75
6	246.233´75	7387´01	46.379´25	53.766´26	300.000'00

17)Una persona contrata un préstamo de 500.000 € acordando el pago anual de interés al 9% y amortización mediante reembolso único al cabo de 10 años. Para hacer frente a pago anual de intereses retiran cada año el 80% de los ingresos que obtiene de una finca. Al cabo de 4 años vende la finca y cancela totalmente el préstamo siendo en este momento el tanto del mercado del 8%. Calcular:

a) Los ingresos anuales que percibe de la finca.

b) El precio al que vendió la finca si después de saldar el préstamo le robaron 6019 €.

a)

$C_o = 500.000$
$i = 9\ \%$
$t = 10$

$$I = C_o \cdot i$$
$$I = 500.000 \cdot 0'09$$
$$I = 45.000$$

$$\downarrow$$

80% ingresos de finca

si 100 ———— X
80 ———— 45.000

Ingresos anuales de la finca: $\boxed{X = 56.250}$

b)

4 años____ w
$i' = 8\%$
sobró = 6019

$$A = C_o + C_o\,(i \cdot i')\, a_{\overline{t-w|}}\ i'$$

$$A = 500000 + 500000(0'09 \cdot 0'08) \cdot \frac{1-(1'08)^{10-4}}{0'08}$$

$$A = 500.000 + 5.000 \cdot 4'6228797$$
$$A = 523114'4$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vendió la finca} = A + \text{sobró} \\ \text{Vendió la finca} = 523114'4 + 6019\end{array}}$$

Vendió la finca = 529133'4

18)Un préstamo de 40.000 € hizo de amortizarse a los 6 años por el sistema americano siendo el tanto de interés del 6%. Confeccionar el cuadro de amortización correspondiente al fondo si el tanto al que se colocó el fondo de amortización es al 4%.

AÑO	FONDO AL PRIN	INT. EL FONDO	CUOTA DE AMO	AUMENTO DEL FOND	FONDO AL FINA
1			6.030´48	6.030´48	6.030´48
2	6.030´48	241´22	6.030´48	6.271´70	12.302´18
3	12.302´18	492´03	6.030´48	6.522´56	18.824´74
4	18.824´74	752´99	6.030´48	6.783´46	25.608´20
5	25.608´20	1.024´32	6.030´48	7.054´81	32.663´03
6	32.663´03	1.306´52	6.030´48	73´07	40.000

$C_o = 40.000$
$t = 6$
$i = 6\%$
$i' = 4\%$

$$k = \frac{(1'04)^4 - 1}{0'04} 40000 \qquad k = 6030'48$$

$$k = \frac{C_o}{S_n i} = \frac{40000}{6'633} = 6030'45$$

$$6030'48 \cdot 0'04 = 241'22$$

$$S_n i = \frac{(1 + 0'04)^6 - 1}{0'04} = \frac{0'265319}{0'04} = 6'633$$

19)Hace 3 años el señor A concedió al señor B un préstamo de 670.000 € conviniendo ladevolución del mismo a los 15 años y un abono anual de intereses del 9% en el día de hoy "B" entrega al prestamista 400.000 € si en este momento el tanto de interés del mercado es del 8%. Calcular la cantidad que entregará B en el momento de finalizar el préstamo a A.

$C_o = 670.000$
$n = 15$
$i = 9\%$
$w = 3$
$k = 400.000$
$i' = 8\%$

$$B + Bi \cdot S_{\overline{t-w}|} i' + R\,(1 + i')^{t-w} = C_o + C_o \cdot S_{\overline{t-w}|} i'$$

$$B + B \cdot 0'09 \cdot \frac{(1'08)^{18} - 1}{0'08} + 400000(1'08)^{12} = 670000 + 60300 \frac{(1'08)^{18} - 1}{0'08}$$

$$B + B\, 3'3705219 + 1007268 = 2928249'7$$

$$4'3705219\, B = 1920981'7$$

$$B =$$

20)Qué importe trimestral debería de abonarse en el fondo al 10% nominal capitalizable trimestralmente para hacer frente a la cuota de amortización de un préstamo de 550.000 que amortizado por el sistema americano finaliza dentro de 14 años.

K = ¿

$J_k = 10\%$

$C_o = 550.000$

T = 14

$$i_k = \frac{J_k}{k} = \frac{10}{4} = 2'5$$

$$k \cdot S_n^{(n)} = C_o$$

$$k \cdot \frac{550000 \cdot 0'025}{(1'025)^{56} - 1}$$

$$k = \frac{13750}{2'985}$$

$$\boxed{k = 4604'83}$$

21)La primera cuota de amortización de un préstamo concedido durante 7 años al 3% es de 52.202´54. Si se amortizó por el sistema americano confecciona el correspondiente cuadro de amortización.

t = 7

i = 3%

k = 52202´54

$$k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = C_o$$

$$52202'54 \frac{(1'03)^7 - 1}{0'03}$$

$C_o = 399999'98$

PERIODO	FONDO PRINCIP	INT. FONDO	CUOTA	AUMENTO FONDO	FONDO FINAL
1			52.202´54	52.202´54	52.202´54
2	52.202´54	1.566´08	52.202´54	53.768´62	105.971´16
3	105.971´16	3.179´13	52.202´54	55.381´67	161.352´88
4	161.352´83	4.840´58	52.202´54	57.043´12	218.395´95
5	218.395´95	6.551´88	52.202´54	58.754´42	277.150´37
6	277.150´37	8.814´51	52.202´54	60.517´05	337.667´42
7	337.667´42	10.130´02	52.202´54	62.332´56	399.999´98

22)Un préstamo de 800.000 € concertado a 12 años al 6% con pago periódico de intereses y reembolso único de capital se liquida mediante la entrega en el último periodo de 755934 € como resto de capital a amortizar. Determinar la cuantía entregada al finalizar el cuarto año como reembolso parcial del mismo sabiendo que el tipo de interés en el mercado en este momento es de 4%.

$C_o = 800.000$
$i = 6\%$
$t = 12$
$i' = 4\%$
$w = 4$
$B = 755934$

$$S_{t-w}i' = \frac{(1+i')^{t-w} - 1}{i'}$$

$R = ¿$

$$B = C_o - \frac{R(1+i')^{t-w}}{1 + i \cdot S_{t-w}i'}$$

$$755934 = 800000 - \frac{R(1'04)^{12-4}}{1 + 0'06\dfrac{(1'04)^{12-4} - 1}{0'04}}$$

$$755934 = 800000 - \frac{R(1'04)^{8}}{1'5528536}$$

$- 68428'046 = - R\,(1'04)^8$

$$\boxed{R = 49999'703}$$

23)A cuánto ascendió un préstamo para que la amortización se constituyera en un fondo con una cuota trimestral de 4121´11 € si se sabe que el tanto de interés es de 14%, la operación duró 12 años y se amortizó de una sola vez al final pagándose anualmente los intereses.

$i = 14\%$
$t = 12$
$k = 4121'11$
$C_o = ¿$
$i_k = 3'33\ \%$

$$k \cdot S_n = C_o$$

$$4121'11 \cdot \frac{(1'233)^{12} - 1}{0'0333} = C_o$$

$$\boxed{C_o = 472500}$$

24)Calcula el término de la renta necesaria para amortizar un préstamo de 2000 € al 4% durante 15 años.

$C_o = 2000$ $\qquad k = \frac{C_o \cdot i'}{(1+i')^n - 1}$

$t = 15$ $\qquad k = \frac{2000 \cdot 0'04}{(1'04)^{15} - 1}$

$i = 4\%$ $\qquad k = 99`882201$

$$\text{Anualidad} = k + C_o \cdot i$$

$$99`882201 + 2000 \cdot 0'04$$

$$\boxed{\text{Anualidad} = 179`8822}$$

25)Se compra una casa que vale 150.000 € acordándose efectuar el pago de la siguiente forma: 10% a la firma del contrato, el 15% a la entrega del inmueble, el resto en un préstamo hipotecario por 20 años al 6% para pagarlo mediante una renta. Hallar el importe del término de la renta.

$C_o = 150.000$
10% a la firma
15% a la entrega inmueble
75% préstamo
$t = 20$
$i = 6\%$

$$150000 \cdot 0'75 = 112.500 \text{ préstamo}$$

$$A = \frac{C_o}{a_n}$$

$$A = \frac{112500}{\frac{1-(1'06)^{-20}}{0'06}}$$

$$\boxed{A = 9808'2627}$$

26)Nos conceden un préstamo al 5% para amortizarlo mediante una renta de 5 términos constante de 23097 €/ cada mes. Hallara el importe del préstamo.

$i = 5\%$ $\qquad C_o = A \cdot a_n$

$n = 5$ $\qquad C_o = 23097 \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$A = 23097$ $\qquad C_o = 23097 \cdot \frac{1-(1'05)^{-5}}{0`05}$

$C_o = ¿$ $\qquad \boxed{C_o = 99997'923}$

27) Una sociedad contrata un préstamo con una entidad financiera en la siguiente condiciones:
Importe del préstamo 400.000 €, duración 10 años, tipo de interés 15%, devolución mediante anualidades constantes.
Determinar:
a) El importe de la anualidad. (A)
b) Cuota de amortización del cuarto periodo (k_4)
c) Cuota de interés del tercer periodo (I_3)
d) Total amortizado en los 5 primeros años. C_p
e) El total pagado en concepto de intereses.
f) Cuantía pendiente de amortizar al principio del 7º año.
g) Realizar el correspondiente cuadro de amortización comprobando el resultado obtenido.

a)

$$C_o = A \cdot a_n$$

$$400000 = A \cdot \frac{1-(1'15)^{-10}}{0'15}$$

$$\boxed{A = 79700'825}$$

b)

$$A_1 = C_o \cdot i + k_1$$

$$79700'825 = 400000 \cdot 0'15 + k_1$$

$$k_4 = k_1\ (1+i)^3$$

$$k_4 = 19700'03\ (1'05)^3$$

$$\boxed{k_4 = 29962'5}$$

c)

$$I = R_{p-1} \cdot i$$

$$I_3 = C_o \frac{(1+i)^4-(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n-1} \cdot i$$

$$I_3 = 400000 \frac{(1'15)^{10}-(1'15)^2}{(1'15)^{10}-1} \cdot 0'15$$

$$\boxed{I_3 = 53646'485}$$

d)

$$C_5 = C_o \frac{(1+i)^p-1}{(1+i)^n-1}$$

$$C_5 = 400000 \frac{(1'15)^5-1}{(1'15)^{20}-1}$$

$$\boxed{C_5 = 132830'47}$$

e)

A = 79700´83
X 10 anual

797008´3 total pagado
-
400000 principal

397008`3 intereses

f)

$$R_p = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$R_p = 400000 \frac{(1'15)^{10} - (1'15)^6}{(1'15)^{10} - 1}$$

$$\boxed{R_p = 227544'13}$$

g)

PERIOD	CAPITAL PRIN	ANUALIDAD	INTER	CAPITAL AMORT	CAPITAL TOTAL AMOR	CAPITAL PEND AMORT
1	400.000'00	79.700´83	60.000'00	19.700´83	19.700´83	380.299´17
2	380.299´17	79.700´83	57.044´88	22.655´96	42.356´79	357.643´20
3	353.643´22	79.700´83	53.646´48	26.054´35	68.441´14	331.588´06
4	381.588´86	79.700´83	49.738´33	29.962´50	98.373´64	30.626´36
5	301.626´36	79.700´83	45.243´95	34.456´88	132.830´52	267.169´48
6	267.169´48	79.700´83	40.075´42	39.625´41	172.455´93	277.540´04
7	227.544´07	79.700´83	34.131´61	45.569´22	218.075´15	8.974´85
8	181.974´85	79.700´83	27.296´33	52.406´60	270.429´75	129.570´25
9	12.970´25	79.700´83	19.435´54	60.265´29	330.695´04	69.304´96
10	69.304´96	79.700´83	10.395´74	69.305´09	400.000	- - - -

28) Se concede un préstamo para amortizar mediante una renta de 10 términos sabiendo que el tanto de interés es el 5% anual, la primera cuota de amortización 23851´4. Hallar:

c) La quinta cuota de amortización
d) El importe del préstamo.
e) El importe del término de la renta.

$C_o = ¿$
$K_1 = 23851'4$
$t = 10$
$i = 5\%$

a)

$$k_5 = k_1\,(1+i)^4$$
$$k_5 = 23851'4\,(1+0'05)^4$$
$$\boxed{k_5 = 28991'53}$$

b)

$$C_0 = ¿$$
$$C_o = k_1 \cdot S_n$$
$$C_o = 23851'4 \cdot \frac{(1'05)^{10} - 1}{0'05}$$
$$\boxed{C_o = 300000'25}$$

c)

$$A = ¿$$
$$A = C_0 \cdot i + k_1$$
$$A = 300000 \cdot 0'05 + 23851'4$$
$$\boxed{A = 38851'4}$$

29) Hemos entregado 14313´24 € habiendo con ello amortizado un préstamo concedido al 6% anual en 12 años. Calcula el principal del préstamo.

$i = 6\%$

$t = 12$

$C_o = ¿$
$S = 14313'24$
$A = S/12$
$A = 1192'77$

$$C_o = A \cdot S_n$$
$$C_0 = 1192'77 \cdot \frac{1-(1'06)^{-12}}{0'06}$$
$$\boxed{C_o = 9999'0075}$$

30)Se concede un préstamo de 560.000 € al 5% por pago mediante una renta de 2 términos. Hallar el importe de la anualidad indicando además los intereses que se han pagado durante la vigencia del mismo.

$C_0 = 560000$

$i = 5\%$

12 término

$A = ¿$

$$C_o = A \cdot a_n$$

$$560000 = A \cdot \frac{1-(1'05)^{-12}}{0'05}$$

$$\boxed{A = 63182'23}$$

$$(A \cdot 12) - C_o = I$$

$$63182'23 \cdot 12 - 560000 = I$$

$$\boxed{I = 198186'76}$$

31)Para amortizar un préstamo de 100.000 € al 4% se entregaron 10655´20 € anuales. Cuántos años duró la amortización.

$C_o = 100.000$

$i = 4\%$

$A = 10655'20$

$t = ¿$

$$C_o = A \cdot a_n$$

$$100000 = 10655'20 \frac{1-(1'04)^{-t}}{0'04}$$

$$9'385089 = \frac{1-(1'04)^{-t}}{0'04}$$

$$0'3754035 = 1 - (1`04)^{-t}$$

$$0'6245964 = (1'04)^{-t}$$

$$\log 0'6345964 = - t \log 1'04$$

$$\boxed{t = 12}$$

32)Concedido un préstamo durante 10 años al 3% se amortiza mediante una renta sabiendo que el valor del término de la renta es de 11723 €. Confecciona el correspondiente cuadro de amortización.

PERIODO	CAPITAL AL PRIN	ANUALI	INTER	CAPITAL AMORT	CAPITAL TOTAL AMORT	CAPITAL PEND AMORT
1	100000	11723	3000	8723	8723	91277
2	91277	11723	2738´31	8984´69	17707´69	82292´31
3	82292´31	11723	2468´77	9254´23	26961´92	73038´08
4	73038´08	11723	2191´14	9533´86	36493´78	63506´22
5	63506´22	11723	1905´19	9817´81	46311´59	53688´41
6	53688´41	11723	1610´65	10112´35	56423´94	43576´06
7	43576´06	11723	1307´28	10415´72	66836´66	33160´34
8	33160´34	11723	994´81	10728´19	77564´85	22432´15
9	22432´15	11723	672´96	11050´04	88614´89	11382´11
10	11382´11	11723	341´46	11040´65	99655´54	341´4637

T = 10 $\qquad C_o = a \cdot A_n$

I = 3% $\qquad C_o = 11723 \dfrac{1-(1'03)^{-10}}{0'03}$

A = 11723 $\qquad C_o = 100.000$

C_O = ¿

33) Un préstamo de 200.000 € se concede con convencimiento que los tres primeros años se pagarán solo los intereses correspondientes a partir de entonces se amortizan mediante 5 pagos constantes anuales. Si un tonto de valoración es del 8% determinar la cuantía que se pagará anualmente y el cuadro de amortización correspondiente.

$C_o = 200000 \qquad 200000 \cdot 0'08 = 160.000$

3 años $\qquad$ 3 primeros años

5 pagos $\qquad C_o = A \cdot a_n$

i = 8% $\qquad 200000 = A \cdot \dfrac{1-(1'08)^{-5}}{0'08}$

$A = 50091'29$

PERIODO	CAPIT PRINC	ANUAL	INTER	CAPIT AMORT	CAPIT TOTAL AMORT	CAPIT PEND AMORT
1	200.000	50.091´29	16.000	34.091´29	84.091´29	165.908´71
2	16.590´71	50.091´29	13.272´7	3.6818´6	70.909´89	129.090´11
3	129.090´11	50.091´29	10.327´21	39.764´08	110.673´97	89.326´03
4	89.326´03	50.091´29	7.146´08	42.945´21	153.619´18	46.380´82
5	46.390´82	50.091´29	3.710´47	46.380´82	200.000	

34) Se concede un préstamo de 50.000 € para ser amortizado al 10% en 7 años mediante anualidades constantes. Determinar el importe de la anualidad en el caso de que durante los dos primeros años no se pague ninguna cantidad.

$C_o = 50000 \qquad C_o = A \cdot a_n$

i = 10% $\qquad 50000 = A \cdot \dfrac{1-(1'1)^{-5}}{0'1} \cdot (1'1)^{-2}$

t = 7 $\qquad \boxed{A = 15959'748}$

A = ¿

2 años 1º no paga

35)Para la compra de un piso se ofrece los siguientes modalidades:

- Pagar al contado 500.000 €
- Pagar en el momento de la compra 100.000 € y durante 10 años una renta mensual de 4.000 € venciendo un primer término transcurrido un mes del momento de la compra.
- Pagar al contado 150.000 € al cabo de un año 50.000 € cada uno venciendo el primer paga a los dos años del momento de la compra.

Si el tanto de valoración es del 10% anual. Modalidad es mejor.

a)

500.000

b)

100000

$C_o = A \cdot a_n$

t = 10 = 120 meses

$$C_o = 4000 \cdot \frac{1-(1'008)^{-120}}{0'008}$$

a = 4000 mensual

$C_o = 307820'9$

i = 10%

$C_o - 100000 = \boxed{407820'9}$

$i_k = 0'8\%$

c)

150000

$$C_o = 39000\frac{1-(1'1)^{-8}}{0'1}(1'1)^{-1}$$

50000

$$C_o + 150000 + \frac{50000}{}$$

t = 8

$\boxed{384601'93}$

a = 39000

36)Confecciona el cuadro de amortización de un préstamo que se amortiza mediante una renta de acuerdo con los siguientes datos. Plazo 10 años, el tanto de interés 6% y la última cuota de amortización es de 12817´74. Principal 100.000.

PERIOD	***CAPIT PRINC***	***ANUAL***	***INTER***	***CAPIT AMORT***	***CAPIT TOT AMORT***	***CAPIT PEND AMORT***
1	100.000'000	13.586´796	6.000'0000	7.586´8006	7.586´8006	92.413´199
2	92.413´199	13.586´796	5.544´7920	8.042´0040	1.528´8050	84.371´195
3	84.371´195	13.586´796	5.062´2717	8.524´5243	24.153´3290	75.846´671
4	75.846´671	13.586´796	4.550´8002	9.035´9958	33.189´3250	66.810´675
5	66.810´675	13.586´796	4.008'6405	9.578´1555	42.767´4800	57.232´520
6	57.232´520	13.586´796	3.433´9512	10.152´8450	52.920´3250	47.079´680
7	47.079´680	13.586´796	2.824´7800	10.762´0200	63.682´3500	36.317´650
8	36.317´650	13.586´796	2.179´0600	11.407´7400	75.090´0900	24.909´900
9	24.909´910	13.586´796	1.494´5900	12.092´2100	87.182´3000	12.817´700
10	12.817´700	13.586´796	769´0620	12.817´7400	100.000'0000	

$t = 10$ $\qquad k_{10} = k_1 (1+i)^{10-1}$

$i = 6\ \%$ $\qquad 12817'74 = k_1 (1+0'06)^9$

$K_{10} = 12817'74$ $\qquad k_1 = 7586'8006$

$$K_1 \cdot S_n = C_o$$

$$7586'006 \frac{(1'06)^{10} - 1}{0'06} = C_o$$

$$C_o = 10000$$

$$C_o = a \cdot a_n$$

$$100000 = a \frac{1 - (1'06)^{-10}}{0'06}$$

$$\boxed{a = 13586'796}$$

37)Una entidad bancaria nos concede un préstamo de 100.000 € al 9% para amortizarlo durante 20 anualidades, venciendo la primera transcurrido un año de dicho cesión. Calcular.

a. La anualidad
b. Capital pendiente de amortizar al finalizar el año 12.
c. Capital amortizado al final del año 12.
d. Cuota de amortización del año 12
e. Intereses totales.
f. Cuadro de amortización

a)

$C_o = 100000$ $\qquad C_o = a \cdot a_n$

$i = 9\%$ $\qquad 100000 = a \cdot \frac{1 - (1'09)^{-20}}{0'09}$

$t = 20$ $\qquad \boxed{a = 10954'648}$

b)

$$R_p = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$R_p = 100000 \frac{(1'09)^{20} - (1'09)^{12}}{(1'09)^{20} - 1}$$

$$\boxed{R_p = 60631'992}$$

c)

$$C_{12} = C_o \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$C_{12} = 100000 \frac{(1'09)^{12} - 1}{(1'09)^{20} - 1}$$

$$\boxed{C_{12} = 39368'008}$$

d)

$$I_p = C_o \frac{(1'09)^n - (1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$I_p = 100000 \frac{(1'09)^{10} - (1'09)^{12-1}}{(1'09)^{20} - 1} \cdot 0'09$$

$$\boxed{I_p = 5910'8236}$$

e)

$A = C_0 \cdot i + k_1$

$10954'648 = 100000 \cdot 0'09 + k_1$

$k_1 = 1954'648$

$k_{12} = k_1 \, (1+i)^{12-1}$

$k_{12} = 1954'648 \, (1+i)^{11}$

$\boxed{k_{12} = 5043'8253}$

f)

$A \cdot 12 = \text{total } C_T$

$10954'648 \cdot 12 = C_T$

$C_T = 219092'96$

$C_T - C_o = I$

$219092'96 - 100000 = I$

$\boxed{I = 119092'96}$

38)Un préstamo de 600.000 € se va a amortizar mediante 8 pagos anuales constantes venciendo el primero transcurridos 3 años de la concesión. Si el tanto de interés del préstamo es del 9% calcular:

a. Anualidad

$C_o = 600000$ $\qquad$ $C_o = a \cdot a_n$

$n = 8$ $\qquad$ $600000 = a \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} (1+i)^{-d}$

$d = 2$ $\qquad$ $600000 = a \dfrac{1-(1'09)^{-8}}{0'09} (1'09)^{-2}$

$i = 9\%$ $\qquad$ $\boxed{a = 128795'54}$

b. La cuota de interés del año 4.

$C_o \, (1+i)^d = C_o$

$600000 \, (1'09)^2 = C_o$

$C_o = 712860$

$$I_n = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$I_n = 712860 \frac{(1'09)^8 - (1'09)^{2-1}}{(1'09)^8 - 1} \cdot 0'09$$

$$\boxed{I_n = 58339'968}$$

c. La cuota de amortización del 7º año.

$A = C_o \cdot i + k_1$
$128795 = 712860 \cdot 0'09 + k_1$
$k_1 = 64638'14$

$k_7 = k_1\ (1+i)^{7-1-2}$
$k_7 = 64628'14\ (1'09)^4$
$k_7 = 91242'01$

d. La cuantía pendiente de amortizar después de hacer efectivo el 2º pago.

$$R_p = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$R_p = 712680 \frac{(1'09)^8 - (1'09)^8}{(1'09)^8 - 1}$$

$$\boxed{R_p = 577620'43}$$

39) Se concede un préstamo de 700.000 € para ser amortizado mediante una renta de 9 término de 6 %. Hallar:

a. El interés del 4º año.

$C_o = 700000$

$n = 9$

$i = 6\ \%$

$$I_n = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^{p-1}}{(1+o)^n - 1} \cdot i$$

$$I_n = 700000 \frac{(1{,}06)^9 - (1{,}06)^{9-1}}{(1{,}06)^9 - 1} \cdot 0{,}06$$

$$\boxed{I_n = 30364{,}153}$$

b. Cuota de amortización del 6º año.

$C_o = a \cdot a_n$

$$700000 = a \cdot \frac{1-(1{,}06)^{9}}{0{,}06} \qquad a = 102915{,}56$$

$A = C_o \cdot i + K_1$

$102915{,}56 = 700000 \cdot 0{,}06 + k_1$

$k_1 = 60915{,}56$

$k_6 = k_1\,(1+i)^{6-1}$

$k_6 = 60915{,}56\,(1{,}06)^5 \quad ; \quad \boxed{k_6 = 81518{,}76}$

c. El resto por amortizar una vez pagada la 5º anualidad.

$$R_p = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$R_p = 700000 \frac{(1{,}06)^9 - (1{,}06)^5}{(1{,}06)^9 - 1} \quad ; \quad \boxed{R_p = 356613{,}3}$$

d. Total amortizado hasta el 4º año.

$$C_p = C_o \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} \qquad C_p = 700000 \frac{(1{,}06)^4 - 1}{(1{,}06)^9 - 1}$$

$$\boxed{C_p = 266482{,}2}$$

40) Hace 3 años se prestó un capital para ser amortizado mediante una renta de 5 términos al 5 % de interés sabiendo que el total amortizado después de pagar la tercera anualidad que es de 28526,15. Calcular:

a. La cuantía del préstamo.

$n = 5$

$i = 5\ \%$

$C_p = 28526{,}15$

$$C_p = C_o \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$28526{,}15 = C_o \frac{(1{,}05)^3 - 1}{(1{,}05)^5 - 1}$$

$$\boxed{C_o = 50000}$$

b. La anualidad que amortiza el préstamo.

$C_o = a \cdot a_n$

$$50000 = a \cdot \frac{1-(1{,}05)^{-5}}{0{,}05} \quad ; \quad \boxed{a = 11548{,}74}$$

c. Cuota de interés del 3º año.

$$I_n = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1} \quad ; \quad I_3 = 50000 \frac{(1{,}05)^5 - (1{,}05)^{3-1}}{(1{,}05)^5 - 1} \cdot 0{,}05$$

$$\boxed{I_3 = 1572{,}50}$$

d. El resto por amortizar al principio del 3º año.

$$R_p = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1} \quad ; \quad R_p = 50000 \frac{(1{,}05)^5 - (1{,}05)^3}{(1{,}05)^5 - 1}$$

$$\boxed{R_p = 31450{,}083}$$

41) Se concede un préstamo de 10.000 al 16,5 % para amortizar en 10 años en pagos mensuales mediante una renta. Calcular:

a. Capital amortizado después de pagar el 9º plazo.

$C_o = 10000$

$$C_p = C_o \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$C_p = 10000 \frac{(1{,}0128)^9 - 1}{(1{,}0128)^{120} - 1}$$

$$\boxed{C_p = 336{,}7983}$$

$i = 16{,}5\ \%$
$t = 10$
$n = 10 \cdot 12 = 120$
$i_k = 1{,}281\ \%$

b. El capital pendiente de amortizar al finalizar el 6º año.

$C_o \cdot 12 = 72$

$$R_p = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$R_p = 10000 \frac{(1{,}0128)^{120} - (1{,}0128)^{72}}{(1{,}0128)^{120} - 1}$$

$$\boxed{R_p = 5838{,}1207}$$

c. Los intereses del periodo 80.

$$I_{80} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1} \cdot i$$

$$I_{80} = \frac{(1{,}0128)^{120} - (1{,}0128)^{80-1}}{(1{,}0128)^{120} - 1} \cdot 0{,}0128$$

$$\boxed{I_{80} = 86{,}4575}$$

d. Lo total pagado en concepto de intereses.

$C_o = a \cdot a_n$

$$10000 = a \cdot \frac{1-(1.0128)^{-120}}{0{,}0128} \quad ; \quad a = 163{,}5466$$

$a \cdot n = C_T$

$163{,}5466 \cdot 120 = 19625{,}596$

$I = C_T - C_o$

$I = 19625{,}596 - 10000 \quad ; \quad \boxed{I = 9625{,}5962}$

e. Cuota de amortización del periodo 60.

$A = C_o \cdot i + k_1$

$163{,}5466 = 10000 \cdot 0.0128 + k_1$; $k_1 = 35{,}5466$

$k_{60} = k_1\ (1+i)^{60-1}$; $k_{60} = 53{,}5466\ (1{,}0128)^{59}$

$\boxed{k_{60} = 75{,}2828}$

42)Se sabe que la cuota de amortización de un préstamo en el 5º año es de 52638,54, si el tipo de interés que se aplica es del 12 % anual y la cuota de inter5és del 4º año es de 11955,33. Calcular el importe inicial (Co) y la duración del mismo si se amortizó por el método francés con anualidades constantes.

$K_5 = 52638{,}54$ $\qquad k_5 = k_1\ (1+i)^4$

$i = 12\ \%$ $\qquad 52638{,}54 = k_1\ (1{,}12)^4$

$I_4 = 11955{,}33$ $\qquad k_1 = 33452{,}774$

$C_o = k_1 \cdot S_n$

$$I_4 = C_o \frac{(1+i)^n - (1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1} \cdot i$$

$$I_4 = k_1 \cdot S_n \frac{(1+i)^n - (1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1} \cdot i$$

$$11955{,}33 = 33452{,}774 \cdot \frac{(1{,}12)^4 - 1}{0{,}12} \cdot \frac{(1{,}12)^4 - (1{,}12)^3}{(1{,}12)^4 - 1} \cdot 0{,}12$$

$$2{,}9781638 = \frac{(1{,}12)^4 - 1}{0{,}12} \cdot \frac{(1{,}12)^4 - (1{,}12)^3}{(1{,}12)^4 - 1}$$

$1{,}7623077 = 1{,}12^n$; $\boxed{n = 5}$

$C_o = 33452{,}774 \cdot \frac{(1{,}12)^5 - 1}{0{,}12}$; $\boxed{C_o = 212520{,}18}$

43)Se solicita un préstamo de 400.000 € para amortizar en 10 años al 4 % trimestral por el sistema francés con intereses fraccionados. Calcular el importe del primer pago, el total amortizado al principio del 5º año, realizar el cuadro de amortización correspondiente a los 3 primeros años, comprobar a través del cuadro de amortización lo obtenido en los apartados.

$C_o = 400000$ $\qquad A = C_o \cdot i + k_1$

$i_k = 4\ \%$ $\qquad k_1 \cdot= C_o$

$K = 4$ $\qquad k_1 = \frac{400000 \cdot 0{,}16}{(1{,}16)^{10} - 1}$; $\boxed{k_1 = 17875{,}05}$

i = 16,93585 %

$$C_p = C_o \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$C_p = 400000 \frac{(1{,}16)^4 - 1}{(1{,}16)^{10} - 1}$$

$$\boxed{C_p = 91868{,}107}$$

PERIODOS	CAP. PRINCIP	INTERES	PAGO PERIOD.	CUOTA AMORTI.	CAP. TOT. AMORTIZ	CAP. PENDIENTE
1	400.000	16.000	16.000			400.000
2	400.000	16.000	16.000			400.000
3	400.000	16.000	16.000			400.000
4	400.000	16.000	33.875'05	17.875'05	17.875'05	382.124'9
5	382.124'9	15.284'9	15.284'9		17.875'05	382.124'9
6	382.124'9	15.284'9	15.284'9		17.875'05	382.124'9
7	382.124'9	15.284'9	15.284'9		17.875'05	382.124'9
8	382.124'9	15.284'9	36.196'2	20.911'2	38.786'3	361.213'6
9	361.213'6	14.448'5	14.448'5		38.786'3	361.213'6
10	361.213'6	14.448'5	14.448'5		38.786'3	361.213'6
11	361.213'6	14.448'5	14.448'5		38.786'3	361.213'6
12	361.213'6	14.448'5	38.911'7	24.463'2	63.249'5	336.750'4

44) Se concede un préstamo de 60000 € amortizable anualmente por el método de cuotas de amortización constante en 12 años al 8 % anual. Hallar:
a) El importe de la cuota constante de amortización.
b) El término amortizativo del 4º año.
c) La cuota de interés del 9º año.
d) Lo total amortizado después del pago de la cuota de amortización del 10º año.
e) El capital pendiente al principio del 7º año.

a)

$C_o = 60000$ $\quad k = \frac{C_o}{n}$; $k = \frac{60000}{12}$; $\boxed{K = 5000}$

n = 12
i = 8 %

b) $A_n = (C_o - 3k) \cdot i + k$

$A_4 = (60000 - 3 \cdot 5000) \cdot 0{,}08 + 5000$

$\boxed{A_4 = 8600}$

c)

$$R_{n-p} = \frac{C_o}{n}(12-8)$$

$$R_{n-p} = \frac{60000}{12}(12-8)$$

$$R_{n-p} = 20000$$

$$I = 20000 \cdot 0{,}08 \quad ; \quad \boxed{I = 1600}$$

d)

$$C_p = k \cdot p$$

$$C_p = 5000 \cdot 10 \quad ; \quad \boxed{C_p = 50000}$$

e)

$$R_{n-p} = C_o \cdot C_p$$

$$R_{n-p} = 60000 - 5000 \cdot 6 \quad ; \quad \boxed{R_{n-p} = 30000}$$

45) Se concede un préstamo de 600000 € amortizable en el 6º año mediante cuota de amortización constante al 11,5 % de interés anual. Hallar:
a) La cuota de interés del 5º año.
b) El término amortizativo del 4º año.
c) Construir el cuadro de amortización.
d) Intereses totales.

a)

$C_o = 600000$

$n = 6$

$i = 11{,}5\ \%$

$$R_{n-p} = \frac{C_o}{n}(n-p)$$

$$R_{n-p} = \frac{600000}{6}(6-4)$$

$$R_{n-p} = 200000$$

$$I = R_{n-p} \cdot i$$

$$I = 200000 \cdot 0{,}115 \quad ; \quad \boxed{I = 23000}$$

b)

$$k = \frac{C_o}{n}$$

$$k = \frac{600000}{6}$$

$$k = 100000$$

$A_4 = (C_o - 3k) \cdot i + k$; $A_4 = (600000 - 3 \cdot 100000) \cdot 0{,}115 + 100000$

$\boxed{A_4 = 134500}$

c)

$C_T = C_o\,(1+i)^n$

$C_T = 600000\,(1{,}115)^6$; $C_T = 1152923{,}4$

$I = C_T - C_o$

$I = 1152923{,}4 - 600000$

d)

PERIODO	CAP. PRINC	INTERES	PAGA ANUAL	CUOTA AMORT	CAP. TOT.AMORT	CAP. PEND AMORT.
1	600.000	69.000	169.000	100.000	100.000	500.000
2	500.000	57.500	157.500	100.000	200.000	400.000
3	400.000	46.000	146.000	100.000	300.000	300.000
4	300.000	34.500	134.500	100.000	400.000	200.000
5	200.000	23.000	123.000	100.000	500.000	100.000
6	100.000	11.500	111.500	100.000	600.000	

$A_1 = C_o \cdot i + k$

$A_1 = 600000 \cdot 0{,}115 + 100000$; $A_1 = 169000$

46) De un préstamo se tiene los siguientes datos: amortizable en 10 años mediante cuota de amortización constante, intereses del 6º periodo 8400 € , anualidad del 3º periodo 25440. Determinar el principal del préstamo, el tanto de interés al que se concertó, el capital amortizado en los 8 primeros años, el capital pendiente de amortizar al principio del 7º año, los intereses totales.

$n = 10$ $$I = \left[\frac{C_o}{n}(n-p)\right]\cdot i$$

$I_6 = 8400$ $$8400 = \left[\frac{C_o}{10}(10-5)\right]\cdot i$$

$A_3 = 25440$

$A_3 = (C_o \cdot 2k) \cdot i + k$

$$25440 = \left(C_o \cdot 2\frac{C_o}{10} \right) \cdot i + \frac{C_o}{10}$$

$$25440 = \left(C_o - \frac{2 \cdot C_o}{10} \right) \frac{16800}{C_o} - \frac{C_o}{10}$$

$$25440 = \frac{134400 \cdot C_o}{10 \cdot C_o} + \frac{C_o}{10}$$

$25440 \cdot C_o = 134400 C_o + C_o^2$

$C_o (C_o - 120000) = 0 \quad ; \quad C_o = 120000$

$i = \dfrac{16800}{120000} \quad ; i = 0{,}14$

$C_p = k \cdot p$

$$C_p = \frac{C_o}{n} \cdot p$$

$$C_p = \frac{120000}{10} \cdot 8$$

$$\boxed{C_p = 96000}$$

$C_p = k \cdot p$

$C_p = \dfrac{120000}{10} \cdot 6 \quad ; \quad C_p = 72000$

$R_{n-p} = 120000 - 72000 \quad ; \quad R_{n-p} = 48000$

$$I_T = \frac{I_1 + I_4}{2} \cdot n$$

$$I_n = I_1 + -\frac{C_o i}{n}(n-1)$$

$$I_n = C_o i - \frac{C_o i}{n}(n-1)$$

$$I_n = \left[C_o i + C_o i - \frac{C_o i}{n}(n-1) \right] \frac{n}{2}$$

$$I_n = \left[120000 \cdot 0{,}14 \cdot 2 - \frac{120000 \cdot 0{,}14}{10}(9) \right] \frac{10}{2}$$

$$\boxed{I_T = 92400}$$

47)Se concede un préstamo de 80000 € para amortizar en 10 años mediante cuotas de amortización constantes. Calcular: 9%
a) La cuota de amortización del 4º periodo.
b) La anualidad del 6º año.
c) El capital amortizado al comienzo del 10º año.
d) El capital pendiente de amortizar al finalizar el 12º año.
e) Intereses del 7º año.
f) Lo total pagado en concepto de transporte.
f) Lo total pagado.

a)

$C_o = 80000$ $\qquad k = \frac{C_o}{n} \quad ; \quad k = \frac{80000}{16} \quad ; \quad \boxed{k = 5000}$

$n = 16$

$i = 9\ \%$

b) $\qquad A_6 = (C_o \cdot 5k) \cdot i + k$

$A_6 = (80000 - 5 \cdot 5000) \cdot 0{,}09 + 5000$

$\boxed{A_6 = 9950}$

c) $\qquad C_p = k \cdot p$

$C_p = 5000 \cdot 9 \quad ; \quad \boxed{C_p = 45000}$

d) $\qquad R_{n-p} = C_o - C_p$

$R_{n-p} = 80000 - 5000 \cdot 12 \quad ; \quad \boxed{R_{n-p} = 20000}$

e)

$$R_{n-p} = \frac{C_o}{n}(n-p)$$

$$R_{n-p} = \frac{80000}{16}(16-6)$$

$R_{n-p} = 50000$

$I = R_{n-p} \cdot i \quad ; \quad I = 50000 \cdot 0{,}09 \quad ; \quad \boxed{I = 4500}$

f)

$$I_T = \frac{I_1 + I_n}{2} \cdot n$$

$$I_n = I_1 + -\frac{C_o i}{n}(n-1)$$

$$I_n = C_o i - \frac{C_o i}{n}(n-1)$$

$$I_n = \left[C_o i + C_o i - \frac{C_o i}{n}(n-1)\right]\frac{n}{2}$$

$$I_T = \left[80000 \cdot 0{,}09 \cdot 2 - \frac{80000 \cdot 0{,}09}{16}(16-1)\right]\frac{16}{2}$$

$I_T = (14400 - 6750)\ 8 \quad ; \quad \boxed{I_T = 61200}$

g) $C_T = C_o + I_T$

$C_T = 80000 - 61200 \quad ; \quad \boxed{C_T = 141200}$

48)Realizar el cuadro de amortización de un préstamo de 50000 € amortizable en progresión aritmética de razón 200 al 12 % en 6 años.

PERIODO	CAP. PRINCI	INTERESES	PAGO ANUAL	CUOTA AMORTIZ	CUOTA TOT. AMOR	CUOTA PEND.AMORT
1	50.000'00	6.000'00	11.726'8	5.726'88	5.726'88	44.273'12
2	44.273'12	5.312'77	11.926'8	6.614'11	12.340'99	37.659'00
3	37.659'01	4.519'08	12.126'8	7.607'80	19.948'79	30.051'21
4	30.051'21	3.606'15	12.326'8	8.720'73	28.669'52	21.330'48
5	21.330'48	2.559'66	12.526'8	9.967'22	38.636'74	11.363'26
6	11.363'26	1.363'59	12.726'8	11.363'29	50.000'00	

$C_o = A_1 \cdot a_n + S/i \cdot (a_n - nV^n)$

$$50000 = A_1 \cdot \frac{1-(1{,}12)^{-6}}{0{,}12} + \frac{200}{0{,}12}\left[\frac{1-(1{,}12)^{-6}}{0{,}12} - 6(1{,}12)^{-6}\right]$$

$50000 = A_1\ 4{,}1114073 + 1786{,}0343 \quad ; \quad \boxed{A_1 = 11726{,}88}$

$A_1 = C_o \cdot i + k_1$

$11726{,}88 = 50000 \cdot 0{,}12 + k_1 \quad ; \quad k_1 = 5726{,}88$

49)En un préstamo concertado en las condiciones siguientes:

- principal 500000 €
- duración 5 años.
- tanto de interés 11 %
- amortización variable con anualidad en progresión aritmética de razón 10000.

Determinar:

a) La cuantía de los términos amortizativos.
b) Capital pendiente de amortizar al principio del 3º año.
c) Cuota de amortización del 3º año.
d) Total de intereses.

a)

$C_o = 500000$ $\qquad S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$n = 5$

$i = 11\ \%$ $\qquad a_n = a_1 + r(n-1)$

$s = 10000$

$$C_o = A_1 \cdot a_n + S/i\,(a_n - n \cdot V^n)$$

$$500000 = a_1 \cdot \frac{1-(1{,}11)^{-5}}{0{,}11} + \frac{10000}{0{,}11}\left(\frac{1-(1{,}11)^{-5}}{0{,}11} - 5(1{,}11)^{-5}\right)$$

$$500000 = a_1\, 3{,}695 + 66240{,}034 \quad ; \quad \boxed{a_1 = 117362{,}57}$$

b) $\qquad C_p = k_1 \cdot S_p + S/i \cdot (S_p - p)$

$A_1 = C_o i + k_1$

$117362{,}57 = 500000 \cdot 0{,}11 + k_1 \quad ; \quad k_1 = 62362{,}57$

$$C_3 = 62362{,}57 \cdot \frac{(1{,}11)^2 - 1}{0{,}11} + \frac{10000}{0{,}11}\left(\frac{(1{,}11)^2 - 1}{0{,}11} - 2\right)$$

$C_o - C_p = R_p$

$R_p = 500000 - 141585{,}02 \quad ; \quad \boxed{R_p = 358414{,}98}$

c) $\qquad k_3 = k_2\,(1+i) + S$

$k_3 = [k_1\,(1+i) + S]\,(1+i) + S$

$k_3 = [62362{,}57\,(1{,}11) + 10000]\; 1{,}1$

$\boxed{k_3\ )\ 97936{,}922}$

d)

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S = \frac{a_1 + a_n + r(n-1)}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + r(n-1)$$

$$S = \frac{2 \cdot 117362{,}57 + 10000 \cdot 4}{2}$$

$$S = 686812{,}85$$

$$I = C_o - S$$

$$I = 686812{,}85 - 50000 \quad ; \quad \boxed{I = 186812{,}85}$$

50)El total de pagos efectuados para amortizar un préstamo con anualidades varables en progresión aritmético de razón 2717,76 ascendió a 52177,55 sabiendo que el tiempo de amortización fue de 5 años y el tanto de interés del 8 %. Hallar el principal de préstamo.

s= 2717,76

S = 52177,55

n= 5

i= 8 %

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + r(n-1)$$

$$S = \frac{a_1 + a_n + r(n-1)}{2} \cdot n$$

$$52177{,}55 = \frac{20 + 2717{,}76(5-1)}{2} \cdot 5$$

$$a_1 = 5000$$

$$C_o = A_1 \cdot a_n + S/i\,(a_n - nV^n)$$

$$C_o = 5000\frac{1-(1{,}08)^{-5}}{0{,}08} + \frac{2717{,}76}{0{,}08}\left(\frac{1-(1{,}08)^{-5}}{0{,}08} - 5(1{,}08)^{-5}\right) \quad \boxed{C_o = 4000}$$

51)Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 1000000 € que se amortiza en 8 años al 7 % sabiendo que los términos amortizativos varían en progresión aritmética sabiendo que la diferencia entre el 7º y el 3º es de 28000.

$C_o = 1000000$ $\quad$ $a_7 - a_3\ s(7-3)$

$i = 7\ \%$ $\quad$ $28888 = s4$

$n = 8$ $\quad$ $s = 7000$

$a_7 - a_3 = 28000$

$$C_o = a_1 \cdot a_n + S/i\ (a_n - nV^n)$$

$$1000000 = a_1 \cdot \frac{1-(1{,}07)^{-8}}{0{,}07} + \frac{7000}{0{,}07}\left(\frac{1-(1{,}07)^{-8}}{0{,}07} - 8(1{,}07)^{-8}\right) \quad \boxed{A_a = 145441{,}97}$$

PER	CAP PRINC	INT	PAGO ANUAL	CUOTA AMORT	CUOTA TOT AMORT	CUOTA PEND AMORTI
1	1.000.000	70.000'0	145.441'9	75.441'9	75.441'9	924.558'0
2	924.558.0	64.719'0	152.441'9	87.722'9	163.164'8	836.835'1
3	836.835.1	58.578'4	159.441'9	100.863'5	264.028'3	735.971'6
4	735.971.6	51.518'0	166.441'9	114.923'9	378.952'3	621.047'6
5	621.047.6	43.473'3	173.441'9	12.998'6	508.920'9	491.079'0
6	491.079.0	34.375'5	180.441'9	146.066'4	654.987'4	345.012'5
7	345.012.5	24.150'8	187.441'9	163.291'0	818.278'5	181.721'4
8	181.721.4	12.720'5	194.441'9	181.721'4	1.000.000'0	

52)Realizar el correspondiente cuadro de amortización de un préstamo con la siguiente características.
Principal: 300000.
Duración 3 años.
Amortización mediante cuota de amortización anuales iguales, abono de interese del 14% nominal, capitalizable trimestralmente, por trimestres.

K1= 300000/3=100000

Jk=14 /4=3.5 /100=0.035

$i=(0.035+1)^4-1=0.147523$

PERÍODO	CAP.AL PRINCIPIO	INTERESES	PAGO PERIÓDICO	CAP. AMORT.	CAP TOTAL AMORT	CAP. PENDIENTE DE AMORT.
1	300.000	10.050	10.050	--	--	300.000
2	300.000	10.050	10.050	--	--	300.000
3	300.000	10.050	10.050	--	--	300.000
4	300.000	10.050	110.500	100.000	100.000	200.000
5	200.000	7.000	7.000	--	--	200.000

6	200.000	7.000	7.000	--	--	200.000
7	200.000	7.000	7.000	--	--	200.000
8	200.000	7.000	107.000	200.000		100.000
9	100.000	3.500	3.500	--	--	100.000
10	100.000	3.500	3.500	--	--	100.000
11	100.000	3.500	3.500	--	--	100.000
12	100.000	3.500	103.500	300.000	300.000	--

$C_0 = k \cdot n$; $300000 = k \cdot 3$; $k = 100000$

$A_1 = k + (C_o \cdot i_k)$; $A_1 = 100000 + (300000 \cdot 0{,}035)$; $a_1 = 110500$

53)Supongamos un préstamo de 700000 € para amortizar en 4 años al 15 % en progresión geométrica de razón 0,8, realizar el correspndiente cuadro de amortización.

$$C_o = A_1 \frac{1-q^n v^n}{(1+i)-q}$$

$C_o = 700000$

$$700000 = A_1 \frac{1-(0{,}8)^4(1{,}15)^4}{1{,}15} 0{,}8$$

$n = 4$

$i = 15\ \%$

$A_1 = 319922{,}75$

$q = 0{,}8$

PERIO	CAP PRINC	INTERES	PAGO	CUOTA AMORT	CUOTA TOT AMOR	CUOTA PEN AMORT
1	700.000	105.000'0	319.922'7	214.922'7	214.922'70	485.077'2
2	485.077'2	72.761'5	255.938'2	183.176'6	398.099'30	301.900'6
3	301.900'6	45.285'1	204.750'5	159.465'4	557.564'80	142.435'1
4	142.435'1	21.365'2	163.808'4	142.443'1	700.007'99	

54)Calcular la segunda cuota de amortización de un préstamo de 120000 € de 3 años de duración al 14 % con anualidades variablesen progresión gométrica de razón 0,9015.

$C_o = 120000$

$n = 3$

$q = 0{,}9015$

$i = 14\ \%$

$$C_o = A_1 \frac{1-q^p V^n}{(1+i)-q}$$

$$120000 = A_1 \frac{1-(0{,}9015)^3(1{,}14)^3}{1{,}14-0{,}9015}$$

$A_1 = 56619{,}29$

$A_1 = C_o \cdot i + k_1$; $56619{,}29 = 120000 \cdot 0{,}14 + k_1$; $k_1 = 39819{,}29$

$K_2 = k_1\ (1+i) - A_1\ (1-q)$

$K_2 = 39819{,}29(1{,}14) - 56619{,}29(1-0{,}9015)$ $\boxed{k_2 = 39816{,}99}$

55) De un préstamo concertado en las siguientes condiciones:
principal 500000 €
duración 5 años
tanto de interés 11 %
amortización con términos varables en progresión geométrica de razón 8 % acumulativo.
Determinar:
a) La cuantía de los términos amortizativos.
b) Capital pediente de amortizar al finalizar el 2º año.
c) Cuota de amortización del 3º año.

a)

$$C_o = A_1 \frac{1-q^n V^n}{(1+i)-q}$$

$$500000 = A_1 \frac{1-(1{,}08)^5(1{,}11)^{-5}}{1{,}11-1{,}08}$$

$\boxed{A_1 = 117164{,}34}$

b)

$A_3 = A_2 \cdot q$

$A_2 = A_1 \cdot q$

$A_1 = 117164{,}34$

$A_2\ 126537{,}49$

$A_3 = 136660{,}49$

$$R_{n-p} = A_{p-1} \frac{1-q^{n-p} V^{n-p}}{(1+i)-q}$$

$$R_{n-p} = 136660{,}49 \frac{1-(1{,}08)^{5-2}(1{,}11)^{-5+2}}{1{,}11-1{,}08}$$

$R_{n-p} = 359460,1$
$R_2 = C_o - R_3$
$R_2 = 500000 - 359460,1$; $\boxed{R_2 = 140539,9}$

c) $k_3 = k_2\,(1+i) - A_2\,(1-q)$
$k_2 = k_1\,(1+i) - A_1\,(1-q)$
$A_1 = C_o \cdot i + k_1$
$117164 = 500000 \cdot 0,11 + k_1$; $k_1 = 62164,34$
$k_2 = 62164,34\,(1,11) - 117164,34\,(1-1,08)$; $k_2 = 78375,5$
$k_3 = 78375,5\,(1,11) - 126587,4\,(0,08)$; $\boxed{k_3 = 97119,87}$

56)Construir el cuadro de amortización de un préstamo de un millón de euro, concedido al 12% de interés anticipado para amortizar a los 4 años, anualidades constante , método alemán.

Co = 1000000 i = 12% n =4

$$Co = K1 \; \frac{1 - (1-i)^n}{(1-i)^n \cdot i} \; (1-i)$$

$$1000000 = K1 \; \frac{1 - (1-0.12)^4}{(1-0.12)^4 \cdot 0.12} \; (0.88)$$

K1= 204285.96

A1= (Co-K1) · i + K1

A1 = (10000 - 204285.96) · 0.12 + 204285.96=
A1 = 299771.6448

AÑO	CAPITAL AL PRINCIPIO	INTERE.	ANUAL.	CUOTA DE AMORTIZ.	CAPITAL AMORTI.	CAPITAL PENDIENT.
0	1.000.000	120.000	-----	-----	-------	1.000.000
1	1.000.000	9.548'68	299.772	204.285'960	204285.9	795.714'040
2	795.714'960	67.628'51	299.772	232.143'136	436429.096	563.570'904
3	563.570'904	35.972'62	299.772	263.799'010	700228.106	299.771'890
4	299.771'890	---	299.772	299.771'620	1000000	-------

57)Se concede un préstamo de 150000 € para amortizar el sistema alemán al 10 % de interés en 15 años. Calcular:
a) La cuota de amortización del 6º periodo.
b) El capital amortizado al finalizar el 10º año.
c) El capital pendiente de amortizar al finalizar el 5º año.
d) Lo totalpagado en concepto de intereses.
e) Los intereses correspondientes al 6º año.

a)

$C_o = 150000$
$i = 10\ \%$
$n = 15$

$$C_o = k_1 \frac{1-(1-i)^n}{i(1-i)^n}(1-i)$$

$$150000 = k_1 \frac{1-(0{,}9)^{15}}{0{,}1(0{,}9)^{15}}(0{,}9)$$

$$k_1 = 4321{,}21$$

$$k_6 \frac{k_1}{(1-i)^{6-1}}$$

$$k_6 = \frac{4321{,}21}{0{,}9^5}$$

$$\boxed{k_6 = 7318{,}02}$$

b)

$$C_p = C_o \frac{(1-i)^{n-p}-(1-i)^n}{1-(1-i)^n}$$

$$C_{10} = 150000 \frac{(0{,}9)^{15-10}-(0{,}9)^{15}}{1-(0{,}9^{15})}$$

$$\boxed{C_{10} = 72647{,}25}$$

c)

$$R_{n-p} = C_o \frac{1-(1-i)^{n-p}}{1-(1-i)^n}$$

$$R_{n-p} = 150000 \frac{1-(0{,}9)^{15-5}}{1-(0{,}9)^{15}}$$

$$\boxed{R_{n-p} = 123028{,}77}$$

d)

$$C_o = A_1 \frac{1-(1-i)^n}{i}$$

$$150000 = A_1 \frac{1-0{,}9^{15}}{0{,}1}$$

$A_a = 18889{,}09$

$C_T = C_o \cdot i\ A_1 \cdot n$

$C_T = 150000 \cdot 0{,}1 + 18889{,}09 \cdot 15 \quad ; \quad C_T = 298336{,}47$

$I = C_T - C_o$

$I = 290336{,}47 - 150000 \quad ; \quad \boxed{I = 148336{,}47}$

e)

$$R_{n-p} = C_o \frac{1-(1-i)^{n-p}}{1-(1-i)^n}$$

$$R_{n-p} = 150000 \frac{1-(0{,}9)^{15-6}}{1-(0{,}9)^{15}}$$

$R_{n-p} = 115710{,}74$

$I_p = 115710{,}74 \cdot 0{,}1 \quad ; \quad \boxed{I_p = 11571{,}074}$

58)71. Se otorga un préstamo para amortizar por el método alemán siendo el principal de 500000 €, el tanto de interés anual 6 % y el tiempo de duración 10 años. Calcular:
a) La anualidad que amortiza el préstamo.
b) La cuota de amortización de 4 año.
c) Capital amortizado al principio del 8º año.
d) capital pendiente de amortizar al principio del 6º año.

a)

$C_o = 500000$
$n = 10$
$i = 6\ \%$

$$C_o = A_1 \frac{1-(1-i)^n}{i}$$

$$500000 = A_1 \frac{1-(1-0{,}06)^{10}}{0{,}06}$$

$\boxed{A_1 = 65021{,}63}$

b)

$$C_o = k_1 \frac{1-(1-i)^n}{i(1-i)^n}(1-i)$$

$$500000 = k_1 \frac{1-(1-0{,}06)^{10}}{0{,}06(1-0{,}06)^{10}}(1-0{,}06)$$

$k_1 = 37257{,}05$

$$k_4 \frac{k_1}{(1-i)^{n-1}}$$

$$k_4 \frac{37257{,}05}{(1-0{,}06)^{4-1}}$$

$$\boxed{k_4 = 44856{,}46}$$

c)

$$C_p = C_o \frac{(1-i)^{n-p} - (1-i)^n}{1-(1-i)^n}$$

$$C_p = 500000 \frac{(0{,}94)^{10-7} - (0{,}94)^{10}}{1-(0{,}94)^{10}}$$

$$\boxed{C_7 = 316404{,}91}$$

d)

$$R_{n-p} = C_o \frac{1-(1-i)^{n-p}}{1-(1-i)^n}$$

$$R_{n-p} = 500000 \frac{1-(0{,}94)^{10-5}}{1-(0{,}94)^{10}}$$

$$\boxed{R_{n-p} = 288366{,}6}$$

59) Se emite un empréstito con títulos de 500 € nominales amortizados a la par con un tanto de interés del 4 %. Primero sorteo se amortiza 542 títulos y el último año se amortiza 660 títulos por defecto. Calcular el valor del préstamo y el cuadro de amortización correspondiente a los dos métodos.

$K_1 = 542$
$K_n = 660$
$I = 0{,}04$
$N = 6$
$K_2 = 563{,}68$
$K_3 = 586{,}22$

$k_n = k_1\ (1+i)^{n-1}$
$660 = 542\ (1{,}04)^{n-1}$
$1{,}2177 = (1{,}04)^{n-1}$
$\log 1{,}2177 = n-1 \log 1{,}04$
$n = 6$

$K_4 = 609{,}67$
$K_5 = 634{,}06$
Título = 3596
Capital = 1798000
Nominal = 500

$$\boxed{C_o = k_1 \cdot S_n}$$

$$C_o = 542\frac{(1{,}04)^6 - 1}{0{,}04} \quad ; \quad C_o = 3595{,}07 \_\_\_\_\_ \; 3596$$

$$3596 \cdot 500 = \boxed{1798000}$$

$$C_o = a \cdot a_n$$

$$1798000 = a\frac{1-(1{,}04)^{-6}}{0{,}04} \quad ; \quad a = 342989{,}9$$

AÑO	INTESESES	TITULOS AMORT	TITULOS TO. AMORT	TIT. PEND AMORT	ANUALIDA REAL
1	71.920	542	542	3.054	36.231.000
2	61.080	564	1.106	2.490	30.822.000
3	49.800	586	1.692	1.904	25.193.000
4	38.080	610	2.302	1.294	19.345.000
5	25.880	634	2.936	660	13.257.000
6	13.200	660	3.596		

ANUAL. TEO	ANUAL. DISPON	INTERES	AMORT. TEO	AMORT. REAL	TITULO AMORT
342.989'9	342.989'9	71.920'00	271.069'9	271.000	542'00
342.989'9	343.062'6	61.080'00	281.982'9	281.500	563.60
342.989'9	343.492'1	49.846'40	293.645'7	293.500	586.20
342.989'9	343.141'4	38.081'80	305.059'6	305.000	609.60
342.989'9	343.051'8	25.888'30	317.163'5	317.000	634.06
342.989'9	343.159'9	13.207'05	329.952'9	329.500	660'00

TIT.TOT. AMOR	TIT. PEND	CAP. PEND	RESIDUO	RESIDU CON I
542	3054	1527000	69.9	72.6
1105.6	2492.3	1246160	482.9	502.2
1691.9	1904.09	952046.3	145.7	151.5
2301.5	1294.4	647208.1	59.6	61.9
2935.6	660.35	330176.4	163.5	170.09
3595.6	1			

60)Se realiza un empréstito de 4000000 € durante 10 años al 5 % anual con primas de 100 € por obligación amortizada, el número de obligaciones es de 4000. Calcular el número de títulos amortizados al finalizar el 6º año.

(i´=0,45 %) (n=2184 / 2185)

$C_o = 4000000$
n = 10
P = 100
i = 5 %
Nº titulo = 4000
N = 1000

$$i' = \frac{N \cdot i}{n + p}$$

$$i' = \frac{1000 \cdot 0{,}05}{1000 + 100}$$

i´= 0,45 %

61)Nos conceden un préstamo de 5000000 al 12 % anual en 10 años. Calcular.

1) La cuantía a devolver al cabo de los 10 años si se amortiza mediante reembolso único:

$Ct= Co\ (1+i)^t$
$Ct= 5000000(1.12)^{10}$
Ct= 15529241

2)La cuantía que hemos de entregar al 4º año si quisiésemos cancelar totalmente la deuda, SINDO en este 4º año el tipo de interés del 10% y con anterioridad no hubiésemos pagado cantidad alguna.

$A\ (1+i')\ t- w = Co\ (1+i)^{t}$

$A(1.10)^{10-4} = 5000000(1.12)^{10}$

A = 8765852

3)Si al finalizar el 4º año, cuando el tipo de interés es del 10 %, entregamos 2000000 ¿ Qué cuantía entregaremos al finalizar el 10º año suponiendo que no hubiésemos pagado ninguna otra cuantía?

$R/1+i')^{t-w} + S = Co\ (1+i)^{t}$

$2000000(1.10)^{10-4} + S = 5000000\ (1.12)^{10}$

$3543122 + S = 15529241$

$S= 15529241 - 3343122$

$S = 11986119$

4) En el supuesto anterior, ¿ Qué cuantía nos queda pendiente al entregar los 2000000?

$S = B (1+i)^{t-w}$

$11986119 = B\ (1.12)^{10-4}$

$B= 11986119/1.973822685$

$B = 6072541$

5) La cuantía a devolver al finalizar el 10º año si se amortiza mediante reembolso de capital y abono periódico de interese:

Cuantía a devolver en el último año $= Co + Co\ i$

$5000000 + 5000000 \cdot 1.12 = 5600000$

6) La cuantía que hemos de entregar al 4º año si queremos cancelar totalmente la deuda mediante reembolso de capital y pago periódico de interese, siendo en este momento el tanto de interés del 10%.

$A = Co + Co\ (i - i')\ a_{\overline{t-w}|\, i'}$

$$A= 5000000 + 5000000(0.12-0.10) \cdot \frac{1 -(1.10)^{-(10-4)}}{0.10}$$

A=5000000 + 100000 · 4. 355260699

A= 5000000+ 435526

A = 5435526

7)Si al finalizar el 4º año, cuando i' = 10%, entregamos 2000000 ¿Qué cuantía entregaremos al finalizar el 10º año amortización con reembolso de capital y pago periódico de interese?

$B = Co - R\ (1+i')^{t-w} / 1+i \cdot S_{\overline{t-w}|}\ i'$

$B= [5000000 - 2000000\ (1.10)^{10-4}] / 1 +[0.12 \cdot 1.10)^{10-4} -1/0.10]$

B= 5000000 – 1839 748.328

B = 3160252

8) Confecciona el cuadro de amortización correspondiente suponiendo que ingresamos al 10% una cuantía tal que nos permita al cabo de 10 años recupera el principal del préstamo.

Co = K Sn i'

$5000000 = k \cdot (1.10)^{10} -1/ 0.10$

K = 5000000/ 15.9374246

K = 313.727

PERIODOS	FONDO AL PRINCIPIO	INTERESES DEL FONDO	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	AUMENTO DEL FONDO	FON DO AL FINAL
1	---	---	313.727	313.727'0	313.727'0
2	313.727	31.372'70	313.727	345.099'7	658.826'7
3	658.826'7	65.882'67	313.727	379.609'7	1.038.436'3
4	103.843'3	103.843'63	313.727	417.570'6	1.456.007'0
5	1.456.007'0	145.600'00	313.727	459.327'7	1.915.334'7
6	1.915.334'7	191.533'47	313.727	505.260'4	2.420.595'1
7	2.420.595'1	242.059'50	313.727	555.786'5	2.976.381'6
8	2.976.381'6	297.638'16	313.727	611.365'1	3.587.746'7
9	3.587.746'7	358.774'67	313.727	672.501'6	4.260.248'3
10	4.260.248'3	426.024'83	313.727	739.751'8	5.000.000

9) ¿Cuál será la anualidad del supuesta anterior?

$A = Co \cdot i + K$

$A = 5000000 \cdot 0.12 + 313.727$

$A = 600000 + 313727$

$A = 913727$

10) Suponiendo que amortizásemos el préstamo por el método francés, realizar el correspondiente cuadro de amortización:

$Co = A \cdot an$

$5000000 = a \quad 1 - (1.12)^{-10} \quad / 0.12$

$5.650223028\ a = 5000000$

$a = 884\ 921$

Períodos	Capital pendiente al principio	anualidad	Intereses	Cuota de amortización	Capital total amortizado	Capital pendiente de amortizar
1	5.000.000'0	884.921	600.000'0	284.924'0	284.921'0	4.715.079'0
2	4.715.079'0	884.921	565.809'5	319.111'5	604.032'5	4.395.967'5
3	4.395.967'5	884.921	527.516'0	357.405'0	961.437'4	4.038.565'6
4	4.038.562'6	884.921	484.627'5	400.293'5	1.361.730'8	3.638.260'0
5	3.638.269'1	884.921	436.502'3	448.322'7	1.810.057'6	3.129.940'4
6	3.189.940'0	884.921	382.792'8	502.128'1	2.312.187'7	2.687.812'2
7	2.687.812'2	884.921	322.537'5	562.382'5	2.874.571'3	2.125.428'7
8	2.125.428'7	884.921	255.051'4	629.869'5	3.504.440'8	1.495.559'1
9	1.495.559'1	884.921	179.467'0	705.454'0	4.209.894'7	790.108'3
10	790.105'3	884.921	94.812'6	790.108'3	5.000.003'0	----

11) Según la amortización progresiva (Francés) ¿ Cuál ser´el capital pendiente de amortizar al finalizar el 6º año?

$$Rp = Co \frac{(1+i)^{n} - (1+i)^{p}}{(1+i)^{n} - 1}$$

$$Rp = 5000000\, [(1.12)^{10} - (1.12)^{6}] \,/\, [(1.12)^{10} - 1]$$

$$Rp = 5000000 \cdot 0.537562735$$

$$Rp = 2687814$$

12) Según la amortización por el método francés ¿ Cuál será el capital amortizado al finalizar el 3er año?

$$\mathbf{Cp = Co} \frac{(1+i)^{P} - 1}{(1+i)^{n} - 1}$$

$$Cp = 5000000 \frac{(1'12)^{3} - 1}{(1'12)^{10} - 1}$$

$$Cp = 5000000 \cdot 0.192287363$$

$$\mathbf{Cp = 961.437}$$

13) Según el método francés. ¿Cuál serán lo interese correspondientes al 5º período?

$$\mathbf{In\text{-}p} = \mathbf{Co}\ \frac{(1+i)^{n} - (1+i)^{p-1}}{(1+i)^{n} - 1} \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{In\text{-}p} = \mathbf{5000000}\ \frac{(1.12)^{10} - (1.12)^{4}}{(1.12)^{10} - 1}\ \mathbf{0.12}$$

$\text{In-p} = 5000000 \cdot 0.7276539888 \cdot 0.12$

$\text{In-p} = 436.592$

14) Siguiendo el método francés, si suponemos que durante los dos primero años sólo pagamos intereses, ¿ Cuál sería la anualidad?

$$\mathbf{Co} = \mathbf{a}\ \frac{1 - V^{n-2}}{\mathbf{I}}$$

$4.967639767\ a = 5000000$

$a = 1006514$

15) Siguiendo la amortización por el método francés, si suponemos que durante los dos primeros años no pagamos nada ¿ Cual será la anualidad?

$Co \longrightarrow Co\,(1+i)^{2} \longrightarrow \text{Principal}$

$Co\,(1+i)\ 2 = a\ \ [1 - (1+i)^{-(n-2)}]\ /\ i$

$5000000(1+i))\ 2 = a\ [1 - (1+i)^{-(n-2)}\ /\ 0.12]$

$4.967639767\ a\ \ 0\ \ 6272000$

$a = 1.262.571$

16) Suponiendo amortización por el métodos de cuotas constante, realizar el cuadro de amortización.

K = Co / n

K = 5000000/10

K= 10

PERÍODO	CAPITAL AL PRINCI.	INTERESES	ANUALID	CUOTA DE AMORTI	CAPITAL TOTAL AMORTIZ.	CAPITAL PENDIENTE DE AMORTIZAR
1	5.000.000	600.000	1.100.000	500.000	500.000	4.500.000
2	4.500.000	540.000	1.040.000	500.000	1.000.000	4.000.000
3	4.000.000	480.000	980.000	500.000	1.500.000	3.500.000
4	3.500.000	420.000	920.000	500.000	2.000.000	3.000.000
5	3.000.000	360.000	860.000	500.000	2.500.000	2.500.000
6	2.500.000	300.000	800.000	500.000	3.000.000	2.000.000
7	2.000.000	240.000	740.000	500.000	3.500.000	1.500.000
8	1.500.000	180.000	680.000	500.000	4.000.000	1.000.000
9	1.000.000	120.000	620.000	500.000	4.500.000	500.000
10	500.000	60.000	560.000	500.000	5.000.000	-------

17) El capital pendiente de amortizar al finalizar el 6º año siguiendo el método de cuotas constante.

$C_{n-s} = K\ (n-s)$

$C_{10-6} = 500000(10-6)$

$C_{10-6} = 2000000$

18)El importe total de intereses en el método de cuotas constante.

$$S = \frac{a_1 - an}{2} \quad n$$

a_1=1100000

$a_{10} = a_1 - Coi/n\ (10-1)$

$$a_{10} = \frac{[1100000 - 5000000 \cdot 0.12] \cdot 10}{10}$$

$a_{10} = 1100000 – 540000$

$a_{10} = 560000$

$$S = \frac{1100000 + 560000}{2} \quad 10$$

S = 8300000

It= S - Co ç

It= 8300000 - 5000000

It = 3300000

19)Suponiendo amortización por el método de anualidades variables en progresión aritmética de razón 5000, realiza el cuadro de amortización.

$$Co = a_1 \cdot a_{\overline{n|}} + r/i\ [a_{\overline{n|}} - nV^n]$$

$$5000000 = a_1 \cdot \frac{1-(1.12)^{-10}}{0.12} + \frac{5000}{0.12} \left[\frac{1-(1.12)^{-10}}{0.12} - 10\ (1.12)^{-10}\right]$$

5000000= a1 · 5.650223028 + 5000/012 · 2.430490662

5.6500223028 a1= 5000000 - 101270.4443

$a_1 =$ 4898729.556/5.650223028

$a_1 =$ 866997.5

PERIO	CAPITAL AL PRINCIPIO	INTERESES	ANUALIDAD	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL TOTAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE DE AMORTIZAR
1	5.000.000'0	60.000'00	866.997.5	266.997'5	266.997'5	4.766.002'4
2	4.733.002'4	567.960'30	871.997.5	304.037'3	571.034'8	4.428.965'2
3	4.428.965'2	531.475'82	876.997.5	345.521'7	916.556'5	4.083.443'4
4	4.083.443'4	490.013'20	881.997.5	391.984'3	1.308.540'8	3.691.459'1
5	3.691.459'1	442.975'10	886.997.5	444.022'4	1.752.563'2	3.247.436'7
6	3.247.436'7	389.692'40	891.997.5	502.305'1	2.254.868'3	2.745.131'6
7	2.745.131'6	329.415'79	896.997.5	567.581'7	2.822.450'0	2.177.549'9
8	2.177.549'9	261.305'99	901.997.5	640.691'5	3.463.141'6	1.536.858'3
9	1.536.858'3	184.423'00	906.997.5	722.574'5	4.185.746'1	814.283'0
10	814.283'8	97.714'06	911.997.5	814.283'4	4.999.999'6	----------

20) El capital pendiente de amortizar al finalizar el 6º año según el método de anualidades variables en progresión aritmética.

$$R_{n-p} = a_{p+1} \; a_{\overline{n-p|}} + r/i \; [\, a_{\overline{n-p|}} \; - (n-p)V^{\,-n-p}]$$

$$R_{10-6} = a_7 \cdot a_{\overline{10-6|}} + r/i \; [a_{10-6} \; - \overline{(n-p}|)V^{-(10-6)}\,]$$

$A_7 = a1 \; + r \; (7-1)$

$A_7 = 866997.5$

$$R_{10-6} = 896997.5 \cdot \frac{1-(1.12)^{-4}}{0.12} + \frac{5000}{0.12} \left[\frac{1-(1.12)^{-4}}{0.12} - 4(1.12)^{-4} \right]$$

$R_{10-6} = 896997.5 \cdot 3.037349347 + 5000/0.12 \cdot 0.495277033$

$R_{10-6} = 2724494.938 + 20636.54304$

$R_{10-6} = 22745131$

21) El capital total amortizado al finalizar el 3er año según el método de anualidades variables en progresión aritmética.

$C_p = K1 \cdot S_{\overline{p}|} + r/i \; [S_{\overline{p}|} - p]$

$$\mathbf{C_3 = 266997.5 \cdot \frac{(1.12)^3 - 1}{0.12} + 5000/0.12 \; [(1.12)3\text{-}1 \quad -3]}$$

$C_3 = 266997.5 \cdot 3.3744 + 5000/0.12 \cdot .3744$

$C_3 = 900956.5496 + 15600$

$C_3 = 916556.55$

22)Los intereses correspondientes al 5º periodo según el método de anualidades variables en progresión aritmética.

$I_5 = R_{n-p} \cdot i$

$R_{n-p} = a_{p+1} \cdot a_{\overline{n-p}|} + r/i \; [a_{\overline{n-p}|} - (n-p)\, V^{n-p}]$

$R_{10-4} = a_5 \cdot a_{\overline{10-4}|} + r/i \; [a_{\overline{10-4}|} - (10-4)\, V^{10-4}]$

$A_5 = a_1 + r(5-1)$

$\mathbf{A_5 = 86697.5 + 5000 \cdot 4}$

$\mathbf{A_5 = 886997.5}$

$$R_{10-4} = 886997.5 \cdot \frac{1-(1.12)^{-6}}{0.12} + \frac{5000}{0.12} \left[\frac{1-(1.12)^{-6}}{0.12} - 6\,(1.12)^{-6} \right]$$

$R_{10-4} = 886997.5 \cdot 4.111407324 + 500/0.12 \cdot 1.071620596$

$R_{10-4} = 3646808.244 + 44650.85819$

$R_{10-4} = 3691459.102$

$I_5 = 3691459.102 \cdot 0.12$

$I_5 = 442975$

23) Lo total pagado en concepto de intereses según el método de anualidades variables en progresión aritmética.

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$a_1 = 866997.5$

$a_{10} = a_1 + r\,(10-1)$

$a_{10} = 866997.5 + 5000 \cdot 9$

$a_{10} = 911997.5$

$$S = \frac{866997.5 \quad +911997.5}{2} \cdot 10$$

$S = 8894975.5$

$I_t = S - Co$

$I_t = 8894975.5 - 5000000$

$I_t = 3894976$

24)El capital pendiente de amortizar al finalizar el 6º año según el método de anualidades variables en progresión geométrica.

$$R_{n-p} = a_{p+1} \cdot \frac{1- q^{n-p}\ V^{n-p}}{(1+i) - q}$$

$$R_{10-6} = a_7 \cdot \frac{1 - (0.95)^4\ (1.12)^{-4}}{}$$

(1.12)- (0.95)

$a_7= a_1\ q^{7-1}$
$a_7= 1052993\ \cdot 0.95^{6}$
$a_7= 774046.6152$

$R_{10-6} = 774046.6152\ \cdot 2.837450313$

$R_{10-6} = 2196319$

25) El capital total amortizado al finalizar el 3er año según el método de anualidades variables en progresión geométricas.

$Cp = Co – R\ n\text{-}p$

$$R_{10-3}= a_4 \frac{1 - (0.95)^7\ (1.12)^{-7}}{1.12 - 0.95}$$

$a_4 = a_1\ q^{4-1}$
$a_4=1052993\ \cdot 0.95^{3}$
$a_4= 902809.8734$

$R_{10-3}= 902809.8734$
$R_{10-3}= 3633053.887$

$C_3= 5000000- 3633053.887$
$C_3= 1366946$

26)Los interese del 5º período según el método de anualidades variables en progresión geométrica.

$I_p= i\ \ 3\ \ R_{n-p}$

$$R_4 = a_{p+1} \cdot \frac{1 - q^{n-p}\ \ V^{n-p}}{(1+i)) –q}$$

$a_5= a4 \cdot q$
$a_5= 902809.8734\ \cdot 0.95$

$a_5 = 857669.3797$

$$R_4 = 875669.3797 \cdot \frac{1-(0.959)^{10-4} \ (1.12)^{-10+4}}{1.12-0.95}$$

$R_4 = 857669.3797 \cdot 3.691644537$

$R_4 = 3166210.48$

$I_5 = 3166210.48 \cdot 0.12$

$I_5 = 379945$

27) Lo total pagado en concepto de intereses según el método de anualidades variables en progresión geométrica.

$$I_t = a1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} - Co$$

$$I_t = 1052993 \cdot \frac{(0.95)^{10} - 1}{0.95-1} - 5000000$$

$I_t = 1052993 \cdot 8.025261215 - 5000000$

$I_t = 8450543.883 - 5000000$

$I_t = 3450543.8$

28)El capital pendiente de amortizar al finalizar el 6º año por el método alemán.

$\mathbf{R_{n-p} = Co - C_p}$

$$C_p = Co \frac{(1-i)^{n-p} - (1-i)^n}{1 - (1-i)^n}$$

$$C_6 = 5000000 \frac{(1-0.12)^{n10-6} - (1-0.12)^{10}}{1 - (1-0.12)^{10}}$$

$C_6 = 5000000 \cdot 0.445176463$

C_6=2225882.318

$R_{10\text{-}6} = 5000000 – 2225882.318$

$R_{10\text{-}6}= 2774118$

29) El capital total amortizado al finalizar el 3er año por el método alemán

$$C_p = Co \frac{(1-i)^{n-p} - (1-i)^{n}}{1 - (1-i)^{n}}$$

$$C_3 = 5.000.000 \frac{(1-0.12)^{10-3} - (1-0.12)\ 10}{1 - (1-0.12)^{10}}$$

C_3= 5000000 · 0.180422448

C_3= 902112

30)Los interese del 5ºperíodo por el método alemán

$I_p = R_{n-p} \cdot i$

$R_{n-p} = Co - C_p$

$$C_p = Co \frac{(1-i)^{n-p} - (1-i)^{n}}{1 - (1-i)}$$

$$C_5 = 5000000 \frac{(1-0.12)^{10-5} - (1-0.12)^{10}}{1 - (1-0.12)^{10}}$$

C_5= 5000000 · 0.345434296

C_5= 1727174.423

$R_{10\text{-}5} = 3272825.517$

$I_5 = 3272825.517 \cdot 0.12$

$I_5 = 392739$

31) Lo total pagado en concepto de interese por el método alemán.

$Sn = a \cdot n$

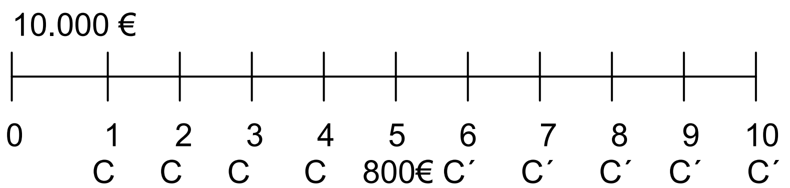
$Sn = 831601.96 \cdot 10$

$8316019.6 + 600000 - 500000$

$It = 3916020$ ***El primer año sólo se pagan intereses***

Relación de Ejercicios Universitarios: Constitución y Préstamos

1.- Un individuo obtiene un préstamo de 10.000 euros para ser amortizado por el sistema francés, en 10 años y al 8%. En el momento de entregar la quinta anualidad acuerda con el prestamista pagar solamente 800 euros, el prestamista acepta este acuerdo sin exigir ningún tipo de penalización. A partir del siguiente año y hasta el último entregará la anualidad necesaria para amortizar la deuda. Calcúlese:
a) La deuda a finales del quinto año (una vez entregados los 800 euros).
b) Nueva anualidad que tendrá que pagar a partir del años 6.
Sol: (a) 6.640,58 (b) 1.663,18



i= 8%

a) $10.000 = C * a_{10} 8\%$

C = 1490,294887 €/año

$C_4 = C * a_6 8\% = 6.889,453926€$
$I_5 = S_4 * i = 6.889,453926 * 0,08 = 551,1563141€$
$a_5 = 800€ - 551,1563141 = 248,8436859€$
$S_5 = S_4 - \alpha_5 = 6,889,453926 - 248,8436859 = 6.640,61024€$

b) $S_5 = C' * a_5 8\%$
$6.640,61024 = C' * 0_5 8\%$
$C' = 1.663,183697€ / año$

	PRÉSTAMO	PROGRESIV.	CONSTANTE		
	Cuantía	1.000.000			
	Interés	0,08			
	Plazo	10			
Periodo	**Término**	**Interés**	**Amortización**	**Total**	**Deuda**
0	-1.000.000			0	1.000.000
1	149.029	80.000	69.029	96.029	930.971
2	149.029	740478	74.552	143.581	856.419
3	149.029	68.513	80.516	224.097	775.903
4	149.029	62.072	86.957	311.055	688.945
5	80.000	55.116	24.884	335.939	664.061
6	166.318	53.125	113.193	449.132	550.868
7	166.318	44.069	122.249	571.381	428.619
8	166.318	34.290	132.028	703.409	296.591
9	166.318	23.727	142.591	846.000	154.000
10	166.318	12.320	153.998	999.998	2
	TIR8,0000%				

2.- A cierta persona le concedieron un préstamo de nominal 100.000 de euros, hace cinco años y en las siguientes condiciones:
- amortización anual mediante el sistema francés.
- Duración de la operación 5 años.
- Interés variable: Primer años 7%, resto siguiendo el MIBOR a una año más un diferencial d4l 1%.

Sabiendo que la evolución seguida por referencia ha sido la siguiente: 8%, 7,5%, 7,25% y 6,75%, calcule el tanto de coste efectivo al que resultó dicho préstamo.

Sol: 8,03%

100.000 €

-5	-4	-3	-2	-1	0
	C	C	C	C	C

I = 7% MIBOR + 1%

8%

7,5%

7,25%

6,75%

¿i_e?

El <u>primer año</u> no sabemos cómo va a evolucionar el MIBOR:

$100.000 = C \cdot a_5 7\%$

$C = 24.389,06944$ €/año

$I_1 = 100.000 \cdot 0,07 = 7.000$

$\alpha_1 = C_1 - I_1 = 17.389,06944$

El <u>segundo año:</u>

$S_1 = C_2 \cdot a_4\ 9\%$

$100.000 - 17.389,06944 = C_2\ a_4\ 9\%$

$82.610,93056$

$C_2 = 25.499,40541$

$I_2 = S_1 \cdot 0.09 = 7.434,98375$

$\alpha_2 = C_2 - I_2 = 18.064,42166$

<u>El tercer año:</u>

$S_2 = C_3 \cdot a_3\ 8,5\%$

$82.610,93056 - 18.064,42166 = C_3 \cdot a_3\ 8,5\%$

$C_3 = 25.272,49159$

$I_3 = S_2 \cdot 0.085 = 5.486,453257$

$\alpha_3 = C_3 - I_3 = 19.786,03833$

El cuarto año:

$S_3 = C_4 \cdot a_2\ 8{,}25\%$

$64.546{,}5089 - 19.786{,}03833 = C_4\ a_2\ 8{,}25\%$

$\overline{44.760{,}47057}$

$C_4 = 25.186{,}36215$
- $I_4 = S_3 \cdot 0{,}0835 = 3.692{,}73882$
- $\alpha_4 = C_4 - I_4 = 21.493{,}62333$

El quinto año:

$S_4 = C_5 \cdot (1 + 0{,}0775)^{-1}$

$44.760{,}47057 - 21.493{,}62333 = C_5 \cdot (1{,}0775)^{-1}$

$C_5 = 25.070{,}0279$
- $I_5 = S_4 \cdot 0{,}0775 = 1.803{,}18066$
- $\alpha_5 = C_5 - I_5 = 23.266{,}24724$

100.000

-5	-4	-3	-2	-1	0
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5

$100.000 = 24.389{,}06944 \cdot (1+i_e)^{-1} + 25.499{,}40541 \cdot (1+i_e)^{-2} + 25.272{,}49159\ (1+i_e)^{-3}$

$+25.186{,}36215\ (1+i_e)^{-4} + 25.070{,}0279\ (1+i_e)^{-5}$ $\qquad i_e = 8{,}030693967\%$

3.- En un préstamo de cuantía 111.846,41 euros que se amortiza con anualidades constantes, al 12% de interés compuesto anual y en 10 años, calcúlese la cuota de amortización del año 7.
Sol: 12.580,10794

111.846,41 €

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	C	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	C

I = 12%

¿α_7?

$111.846{,}41 = C \cdot a_{10}12\%$ $\qquad C = 19.795{,}04339$ €/año

$S_6 = C \cdot a_4 12\% = 19.795{,}04339 \cdot a_4 12\% = 60.124{,}46211$ €
$I_7 = S_6 \cdot 0.12 = 60.124{,}46211 \cdot 0{,}12 = 7.214{,}935453$ €
$\alpha_7 = C - I_7 = 19.795{,}04339 - 7.214{,}925453 = 12.580{,}10794$ €

Otra alternative de resolución:

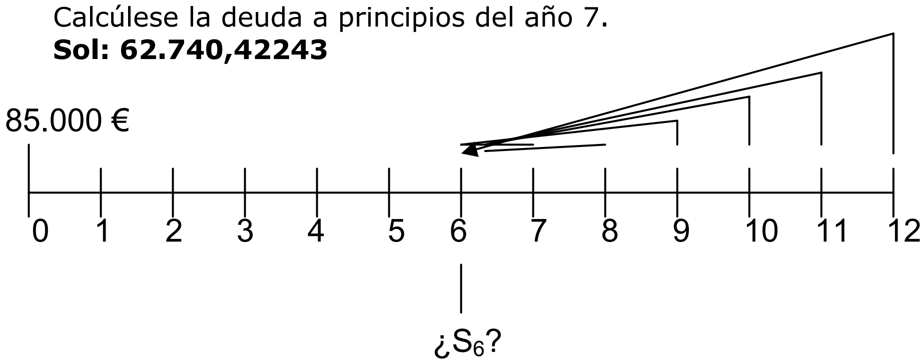
$\alpha_7 = \alpha_1 \cdot (1+i)^6$

$\alpha_1 = C - I_1 = 19.795{,}04339 - 111.846{,}41 \cdot 0{,}12 = 6.373{,}47419$ €

$\alpha_7 = \alpha_1 \, (1{,}12)^6 = 12.580{,}10794$ €

	PRESTAMO	PROGRESIV	CONSTANTE		
	Cuantía	11.184.631			
	Interés	0.12			
	Plazo	10			
Periodo	**Término**	**Interés**	**Amortización**	**Total**	**Deuda**
0	-11.184.641			0	110184.641
1	1.979.504	1342156,92	637.347	637.347	10.547.294
2	1.979.504	1265675	713.829	1.351.177	9.833.464
3	1.979.504	1180016	799.489	20150.665	9.033.976
4	1.979.504	1084077	895.427	3.046.092	8.138.549
5	1.979.504	976626	1.002.879	4.048.971	7.135.670
6	1.979.504	856280	1.123.224	5.172.195	6.012.446
7	1.979.504	721494	1.258.011	6.430.206	4.754.435
8	1.979.504	570532	1.408.972	7.839.178	3.345.463
9	1.979.504	401456	1.578.049	9.417.226	1.767.415
10	1.979.504	212090	1.767.415	11.184.641	.
	12,0000%				

4.- Se quiere amortizar un préstamo de 85.000 euros, en doce años, mediante el sistema progresivo con anualidades que crecen geométricamente en un 4% anual y al 10% de interés efectivo anual.
Calcúlese la deuda a principios del año 7.
Sol: 62.740,42243



$q = 1{,}04$ $\quad$ $q \neq 1+i$
$i = 10\%$

$$85.000 = C_1 \frac{1-1{,}04^{12} \cdot 1{,}10^{-12}}{1{,}10-1{,}04} \qquad C_1 = \frac{85.000}{\frac{0{,}489861795}{0.06}} = 10.411{,}09973€$$

$C_7 = C_1 \cdot q_6 = 10.411{,}09973 \cdot 1{,}04_6 = 13.173{,}36249$ €

$$S_6 = C_7 \cdot \frac{1-1{,}04^{6} \cdot 1{,}10^{-6}}{1{,}10-1{,}04} = 13.173{,}36249 \cdot \frac{0.2857604}{0{,}06} = 62.740{,}42243€$$

	PRESTAMO	***PROGRESIV***	***GEOMETRICO***		
	Cuantía	8.500.000			
	Interés	0.1			
	Plazo	12			
	Razón	1.04			
Periodo	Término	Interés	Amortización	Total	Deuda
0				0	8.500.000
1	1.041.110	850000	191.110	191.110	8.308.890
2	1082754	830889	251.865	442.975	8.057.025
3	1126065	805702	320.362	763.337	7.736.663
4	1171107	773666	397.441	1.160.778	7.339.222
5	1217951	733922	484.029	1.644.808	6.855.192
6	1266669	685519	581.150	2.225.958	6.274.042
7	1317336	627404	689.932	2.915.890	5.584.110
8	1370030	558411	811.619	3.727.508	4.772.492
9	1424831	477249	947.582	4.675.090	3.824.910
10	1481824	382491	1.099.333	5.774.423	2.725.577
11	1541097	272558	1.268.539	7.042.963	1.457.037
12	1602741	145704	1.457.037	8.500.000	0

5.- En el préstamo anterior, ¿cuáles serían los resultados si la amortización se realizase con términos variables en progresión aritmética con distancia 100 euros?
Sol: 56.001,67

$d = 100$

$$85.000 = C_1 \cdot a_{12}10\% + \frac{100}{0{,}10} a_{12}10\% - \frac{12 \cdot 100}{0{,}10} \cdot (1{,}10)^{-12}$$

$85.000 = C_1 \cdot 6{,}813691823 + 6.813{,}691823 - 3.823{,}569813$
$C_1 = 12.036{,}04156$ €

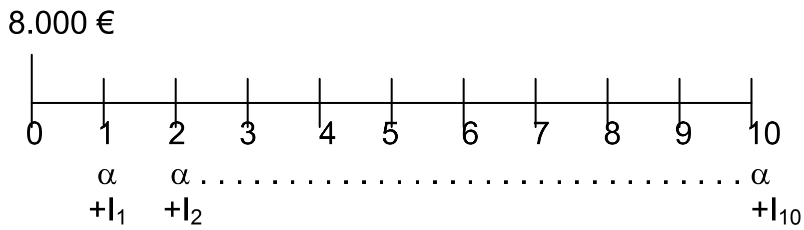
$C_7 = C_1 + 6\ d = 12.036{,}04156 + 6{,}100 = 12.636{,}04156$

$$S_6 = 12.636{,}04156 \cdot a_6 10\% + \frac{100}{0{,}10} \cdot a_6 10\% - \frac{6100}{0{,}10} \cdot (1{,}10)^{-6}$$
$$= 55.033{,}2552 + 4.355{,}260699 - 3.386{,}84358$$
$$= 56.001{,}67232€$$

	PRESTAMO	PROGRESIV	ARITMETICO		
	Cuantía	8.500.000			
	Interés	0,1			
	Plazo	12	6,813691823	382356,9813	
	Distancia	10.000			
Periodo	**Término**	**Interés**	**Amortización**	**Total**	**Deuda**
0				0	8.500.000
1	1.203.604	850.000	353.604	353.604	8.146.396
2	1.213.604	814.640	398.965	752.569	7.747.431
3	1.223.604	774.743	448.861	1.201.430	7.298.570
4	1.233.604	729.857	503.747	1.705.177	6.794.823
5	1.243.604	679.482	564.122	2.269.299	6.230.701
6	1.253.604	623.070	630.534	2.899.833	5.600.167
7	1.263.604	560.017	703.587	3.603.420	4.896.580
8	1.273.604	489.658	783.946	4.387.366	4.112.634
9	1.283.604	411.263	872.341	5.259.707	3.240.293
10	1.293.604	320.029	969.575	6.229.282	2.270.718
11	1.303.604	227.072	1.076.532	7.305.814	1.194.186
12	1.313.604	119.419	1.194.186	8.500.000	0

6.- Un préstamo de 8.000 euros se otorga en las siguientes condiciones:
- Tanto de interés anual el 12%
- Duración de la operación 10 años
- Amortización anual con cuotas de amortización constantes.

Obténgase;
(a) Ley que siguen los términos amortizativos y cuantiadle primero.
(b) Capital pendiente de amortización al principio del sexto año.
(c) Capital amortizado al final del séptimo año.
(d) Cuota de intereses del quinto año.
Sol: (a) 1.760 (b) 4.000 (c) 5.600 (d) 576



i = 12%

a) $\alpha = \dfrac{8.000}{10} = 800€ / año$

$C_1 = \alpha + I_1 = 800 + 8.000 \cdot 0,12 = 1.760$

$C_2 = \alpha + I_2 = 800 + (8.000 - 800) \cdot 0,12 = 1.664$ €

.
.
.

$C_{10} = \alpha + I_{10} = 800 + (8.000 - 800 \cdot 9) \cdot 0,12 = 896$ €

$\downarrow$

Progresión aritmética decreciente: $d = -\alpha \cdot 0,12 = -800 \cdot 0,12 = -96$ €

b) $S_5 = 800 \cdot 5 = 4.000$ €

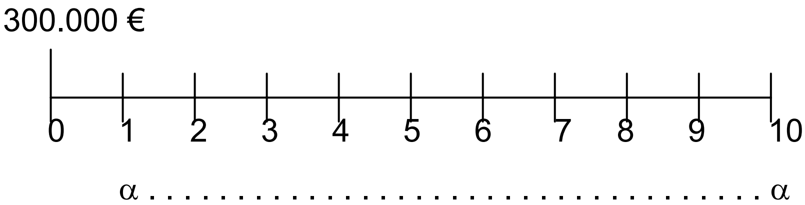
c) $T_7 = 800 \cdot 7 = 5.600$ €

d) $I_5 = S_4 \cdot i = [8.000 - 800 \cdot 4] \cdot 0,12 = 576€$

	PRESTAMO	***PROGRESIV***	***CONSTANTE***		
	Cuantía	800.000			
	Interés	0,12			
	Plazo	10			
Periodo	***Término***	***Interés***	***Amortización***	***Total***	***Deuda***
0				0	800.000
1	176.000	96.000	80.000	80.000	720.000
2	166.400	86.400	80.000	160.000	640.000
3	156.800	76.800	80.000	240.000	560.000

4	147.200	67.200	80.000	320.000	480.000
5	137.600	57.600	80.000	400.000	400.000
6	128.000	48.000	80.000	480.000	320.000
7	118.400	38.400	80.000	560.000	240.000
8	108.800	28.800	80.000	640.000	160.000
9	99.200	19.200	80.000	720.000	80.000
10	89.600	9.600	80.000	800.000	0

7.- Una sociedad concierta una operación de préstamo de 300.000 euros para amortizar anualmente con cuotas de amortización constantes, en 10 años y al 12%. Los gastos iniciales a, cargo de la sociedad, son del 2% sobre el nominal. Calcule:
(a) La deuda a principios del año 3.
(b) Tanto efectivo de coste para el prestatario (sin considerar ventajas fiscales).
Sol: (a) 240.000 (b) 12,5611%



i = 12%

gastos = 2% · N = 2% · 300.000 = 6.000

a) $S_2 = 300.000 - 30.000 \cdot 2 = 240.000$ €

$$\alpha = \frac{300.000}{10} = 30.000$$

b) $$300.000 - 6.000 = 66.000 \cdot a_{\overline{10}|i_e} + \frac{-3.600}{i_e} \cdot a_{\overline{10}|i_e} - \frac{10 \cdot (-3.600)}{i_e}$$

progresión aritmética decreciente

$d = -\alpha \cdot i = -30.000 \cdot 0,12 = -3.600$

$C_1 = \alpha + I_1 = 30.000 + 300.000 \cdot 0,12 = 66.000$

300.000 – 6.000 = 66.000 · $(1 + i_e)^{-1}$ + 62.400 · $(1 + i_e)^{-2}$ + 58.800 · $(1+ i_e)^{-3}$ +
+ 55.00 · $(1 + i_e)^{-4}$ + 51.600 · $(1 + i_e)^{-5}$ + 48.000 · $(1 + i_e)^{-6}$ + 44.400 · $(1 + i_e)^{-7}$
+
+ 40.800 · $(1 + i_e)^{-8}$ + 37.200 · $(1 + i_e)^{-9}$ + 33.600 · $(1 + i_e)^{-10}$ = i_e =
12,5611121%

	PRESTAMO	***PROGRESIV***	***CONSTANTE***		
	Cuantía	30.000.000			
	Interés	0,12			
	Plazo	10			
Periodo	***Término C_k***	***Interés I_k***	***Amortizaciónα***	***Total T_k***	***DeudaS_k***
0	-29.400.000			0	30.000.000
1	6.600.000	3.600.000	3.000.000	3.000.000	27.000.000
2	6.240.000	3.240.000	3.000.000	6.000.000	24.000.000
3	5.880.000	2.880.000	3.000.000	9.000.000	21.000.000
4	5.520.000	2.520.000	3.000.000	12.000.000	18.000.000
5	5.160.000	2.160.000	3.000.000	15.000.000	15.000.000
6	4.800.000	1.800.000	3.000.000	18.000.000	12.000.000
7	4.440.000	1.440.000	3.000.000	21.000.000	9.000.000
8	4.080.000	1.080.000	3.000.000	24.000.000	6.000.000
9	3.720.000	720.000	3.000.000	27.000.000	3.000.000
10	3.360.000	360.000	3.000.000	30.000.000	0
	12,5611%				

8.- Construye el cuadro de amortización de una operación de préstamo de nominal 200.000 euros y duración 10 años, el tipo de interés anual concertado el 6% y las anualidades son decrecientes geométricamente en un 10% anual.

Sol: C1 = 39.737

C_o = 10.000 €

n = 8 años

i = 7%

d = 70 €

$$10.000 = C_1 \cdot a_8 7\% + \frac{70}{0,07} \cdot a_8 7\% - \frac{8 \cdot 70}{0,07} \cdot (1,07)^{-8}$$

10.000 = C_1 · 5,971298507 + 5.971,298506 – 4.656,072837 = C_1 = 1.454,419725

AÑO	$S_{k-1}=C_o-T_k$	$C_k=C_{k-1}\cdot i$	$I_k=S_{k-1}\cdot i$	$\alpha_k=C_k-I_k$	$T_k=\Sigma\alpha_k$
1	10.000	1.454,42	700	754,42	754,42
2	9.245,58	1.524,42	647,19	877,23	1.631,65
3	8.368,35	1.594,42	585,78	1.008,64	2.640,29
4	7.359,71	1,664,42	515,18	1.149,24	3.789,53
5	6.210,47	1.734,42	434,73	1.299,69	5.089,22
6	4.910,78	1.804,42	343,75	1.460,67	6.549,89
7	3.450,11	1.874,42	241,51	1.632,91	8.182,80
8	1.817,2	1.944,42	127,20	1.817,22	10.000

9.- Construye el cuadro de amortización de una operación de préstamo de nominal 200.000 euros y duración 10 años, el tipo de interés anual concertado el 6% y las anualidades son decrecientes geométricamente en un 10% anual.

Sol: C1 = 39.737

C_o = 200.000 €

n = 10 años

i = 6%

q = 0,9

$$200.000 = C_1 \cdot \frac{1 - 0,9^{10} \cdot 1,06^{-10}}{1,06 - 0,9} = C_1 = 39.736,75492€$$

	PRESTAMO	PROGRESIV	GEOMETRICO		
	Cuantía	200.000			
	Interés	0,06			
	Plazo	10			
	Razón	0,9			
Periodo	**Término C_k**	**Interés I_k**	**Amortización α**	**Total T_k**	**Deuda S_k**
0					200.000
1	39.737	12.000	27.737	27.737	172.263
2	35.763	10.336	25.427	25.427	146.836
3	32.187	8.810	23.377	23.377	123.459
4	28.968	7.408	21.561	21.561	101.899
5	26.071	6.114	19.957	19.957	81.941
6	23.464	4.916	18.548	18.548	63.394
7	21.118	3.804	17.314	17.314	46.080
8	19.006	2.765	16.241	16.241	29.838
9	17.105	1.790	15.315	15.315	14.523
10	15.395	871	14.523	14.523	0

10.- Construye el cuadro de amortización de un préstamo amortizable mediante cuotas de amortización constantes si la cuantía prestada es de 10.000 euros, la duración de la operación 10 años y se contrata al 7% anual constante.

Sol: Cuota de Amortización = 1.000

C_o = 10.000 €

n = 10 años

i = 7%

α cte

$$\alpha = \frac{10.000}{10} = 1.000€ / año$$

	PRÉSTAMO	***PROGRESIV.***	***CONSTANTES***		
	Cuantía	1.000.000			
	Interés	0,07			
	Plazo	10			
Periodo	***Término C_k***	***Interés I_k***	***Amortizaciónα***	***Total T_k***	***DeudaS_k***
0				0	1.000.000
1	170.000	70.000	100.000	100.000	900.000
2	163.000	63.000	100.000	200.000	800.000
3	156.000	56.000	100.000	300.000	700.000
4	149.000	49.000	100.000	400.000	600.000
5	142.000	42.000	100.000	500.000	500.000
6	135.000	35.000	100.000	600.000	400.000
7	128.000	28.000	100.000	700.000	300.000
8	121.000	21.000	100.000	800.000	200.000
9	114.000	14.000	100.000	900.000	100.000
10	107.000	7.000	100.000	1.000.000	0

progresión aritmética decreciente de razón d = $-\alpha \cdot i = -1.000 \cdot 7\% = 70$

11.- Se contrata un préstamo en las siguientes condiciones:

- Nominal: 50.000 euros.
- Amortización con trimestralidades constantes e intereses anticipados al 6% nominal capitalizable tremistralmente y en 4 años.
- Comisión de apertura: 1% sobre el nominal.
- Comisión de estudio: 200 euros.
- Otros gastos iniciales: 600 euros. (gastos de notaría)
- Comisión por cancelación anticipada: 1%

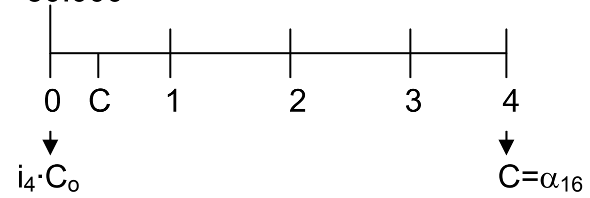
Calcula:

(a) Cuantía de la trimestralidad.
(b) Cuota de amortización entregada a los dos años del contrato.
(c) TAE
(d) Coste efectivo.

Sol: (a) 3.491,60 (b) 3.093,96 (c) 6,9799% (d) 7,6368%

<u>Método alemán</u>

C_o = 50.000



$i_4 = 6\% = i_4 = 1{,}5\%$

Cap. = 1% · N

Cest. = 200 €

Otros gastos = 600 € (gastos de notaría)

$C_{canc\ anticipada}$ = 1%

a)

¿C? = α_{16}

$$C = \frac{C_o \cdot i_4}{1-(1-i_4)^n} = \frac{50.000 \cdot 0{,}015}{1-(1-0{,}15)^{16}} = 3.491{,}602391€/men$$

$C_o \cdot i_4 = 50.000 \cdot 0{,}015 = 750$ €

b) $\alpha_8 = \alpha_{16} \cdot (1 - i_4)^{16-8} = 3.491{,}602391 \cdot (1 - 0{,}015)^8 = 3.093{,}959512$ €

Otra alternative de resolución del apartado a):

a) $50.000 - 750 = C \cdot a_{16}1{,}52\%$
$C = 3.491{,}6023$ €/men.

c) $50.000 - 0{,}01 \cdot 50.000 - 200 = 750 + 3.491{,}602391 \cdot a_{16}TAE$

$a_{16}TAE_4 = 13{,}90479057$

$(TAE_4 + 1)^4 = (1 + TAE)$

d) $50.000 - 500 - 200 - 600 = 750 + 3.491{,}602391 \cdot a_{16}i_{e4}$

$a_{16}i_{e4} = 13{,}7329497$

$(1 + i_{e4})^4 = (1 + i_e)$

12.- Se contrata un préstamo en las siguientes condiciones:
- Nominal: 200.000 euros.
- Amortización con mensualidades constantes al 6% nominal y en 15 años.
- Comisión de apertura: 1% sobre el nominal.
- Comisión de estudio: 300 euros.
- Otros gastos iniciales: 700 euros.
- Comisión por cancelación anticipada: 1%

Calcula:
(a) Cuantía de la mensualidad.
(b) Deuda cuando han pasado 2 años y medio desde el momento de contratación.
(c) TAE del contrato
(d) Si a los 2 años y medio, además de la mensualidad correspondiente, realiza una entrega de 20.000 euros, calcula la nueva mensualidad constante que tendrá que pagar a partir de ese momento.

(e) Coste efectivo de la operación.
Sol: (a) 1.687,71 (b) 177.800,7 (c) TAE: 6,36% (d) 1.497,87€ 6,4541%

N = 200.000 €
C ctes
j12 = 6% = i_{12} = 0,5%
n = 15 años
Ca = 1% N = 2.000
Ces = 300 €
Otros gastos = 700 €
Cc ant = 1%

a) $200.000 = C \cdot a_{180}0,5\%$
$C = 1.687,713656$ €/mes

b) $S_{30} = C \cdot a_{150}0,5\% = 1.687,713656 \cdot a_{150}0,5\% = 177.800,5918$ €

c) $200.000 - 2.000 - 300 = 1.687,713656 \cdot a_{180}TAE_{12}$

$(1 + TAE_{12})^{12} = (1 + TAE)$

d) $S'_{30} = 177.800,5918 - 2.000 = 157.800,5918$ €

$157.800,5918 = C' \cdot a_{150}0,5\%$ $\quad C' = 1.497,870232$ €/mes

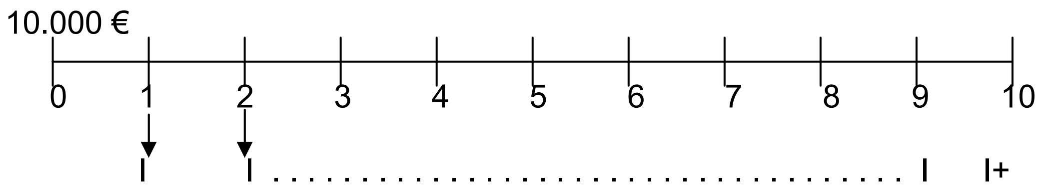
e $200.000 - 2.000 - 300 - 700 = 1.687,713656 \cdot a_{30}i_{e12} + 20.000 \cdot (1 + i_{e12})^{-30} + 0,01 \cdot 20.999\,(1 + i_{e12})^{-30} + 1.497,870232 \cdot a_{150}i_{e12} \cdot (1 + i_{e12})^{-30}$

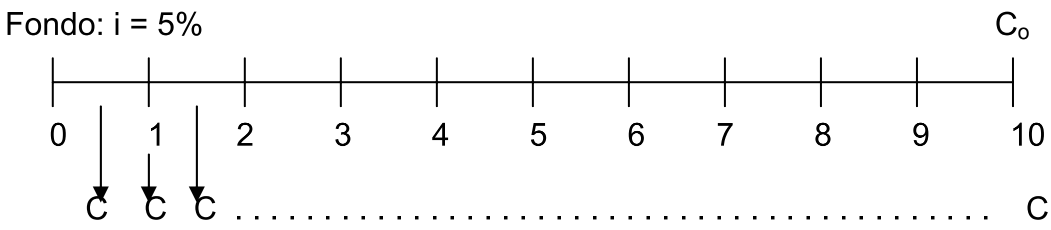
$(1 + i_{e12})^{12} = (1 + i_e)$

13.- Una sociedad contrae un préstamo con una entidad bancaria en las siguientes condiciones:
- Cuantía del capital prestado: 10.000 euros.
- Amortización mediante el sistema americano.
- Tanto de interés anual: 6%.
- Duración: 10 años.

Para conseguir el montante que extinga la deuda constituye un fondo realizando imposiciones semestrales a un tanto del 5% anual. Calcule:
(a) Cuota de interés del 6º año del préstamo.
(b) Cuantía constante que hay que imponer en el fondo.
(c) Tanto efectivo a que resulta la doble operación.
Sol: (a) I6 = 600 (b) 392,67 (c) 6,6085%

$C_o = 10.000$ €
$i = 6\%$
$n = 10$ años





a) I =10.000 · 0,06 = 600 €

b) $10.000 = C \;\; a_{20}i_2 \cdot (1 + i)^{10}$

$10.000 = C \cdot a^{20} 2,469\% \; (1,05) \qquad C = 392,6743137$ €/sem

$1,05 = (1 + i_2)^2 = i_2 = 2,469507659\%$

c) $10.000 = 600 \cdot a_{10}i_e + 10.000 \; (1 + i_e)^{-10} + 392,67 \cdot a_{20}i_e – 10.000 \; (1 + i_e)^{-10}$

$10.000 = 600 \cdot a_{10}i_e + 392,67 \cdot a_{20}i_{e2}$

	FONDO	**DE**	**AMORTIZ.**		
	Cuantía	1.000.000			
	Int del prést.	0,06			
	Plazo	20			
	Int del fondo	0.02469508			
Periodo	***Término***	***Interés***	***Reconstruc***	***Int fon***	***Total fondo***
0	-1.000.000				0
1	39.267	0	39.267	-	39.267
2	99.267	60.000	39.267	970	79.505
3	39.267	0	39.267	10.963	120.735
4	99.267	60.000	39.267	2.982	162.984
5	39.267	0	39.267	4.025	206.277
6	99.267	60.000	39.267	5.094	250.638
7	39.267	0	39.267	6.190	296.095
8	99.267	60.000	39.267	7.312	342.675
9	39.267	0	39.267	8.462	390.404
10	99.267	60.000	39.267	9.641	439.313
11	39.267	0	39.267	10.849	489.429
12	99.267	60.000	39.267	12.086	540.783

13	39.267	0	39.267	13.355	593.405
14	99.267	60.000	39.267	14.654	647.327
15	39.267	0	39.267	15.986	702.580
16	99.267	60.000	39.267	17.350	759.198
17	39.267	0	39.267	18.748	817.214
18	99.267	60.000	39.267	20.181	876.662
19	39.267	0	39.267	21.649	937.579
20	99.267	60.000	39.267	23.154	1.000.00
	3,2514%	6,6085%			0

14.- Se ha solicitado un préstamo de 30.000 euros para amortizar anualmente mediante el sistema americano al 15% y en 10 años.
(a) ¿Qué cantidad es necesario depositar al final de cada año para poder constituir los 30.000 euros, si el tanto de interés que nos ofrecen es el 12% anual?.
(b) ¿Sería más ventajosa la amortización de dicho préstamo por el sistema progresivo con anualidades constantes al 15% que la operación conjunta de préstamo y constitución a la que se refiere el apartado anterior?
Sol: (a) 1.709.52 (b) Si

C_o = 30.000 €
i = 15%
n = 10 años

a) i = 12%
$30.000 = C \cdot a_{10}12\% \, (1{,}12)^{10}$ C = 1.709,524925 €/año

b) <u>Sistema francés:</u> i = 15%
<u>Sistema americano:</u>

$30.000 = I \cdot a_{10}i_e + C \cdot a_{10}i_e$

$30.000 = 30.000 \cdot 0{,}15 \cdot a_{10}i_e + 1.709{,}52 \cdot a_{10}i_e$

$30.000 = 6.209{,}52 \cdot a_{10}i_e$

Sistema francés:

$30.000 = C^F \cdot a_{10}15\%$

C = 5.977,561876 €/año

$C^A > C^F$ = SI

$i_e^A > 15\%$ = SI

Sería más ventajoso con anualidades constantes que la operación conjunta de préstamo y constitución

15.- Una persona contrata un crédito con una entidad bancaria por valor de 50.000 euros a pagar en anualidades constantes, durante 8 años, y por el sistema de fondo de amortización. El interés sobre el préstamo es del 10% y el del fondo un 3%. Después de pagada la tercera anualidad, el interés del fondo baja a un 2%. Calcúlese:

(a) Nueva cuota de reconstrucción que tendría que abonar a partir del 4º año para que el préstamo quede cancelado en el plazo previsto.

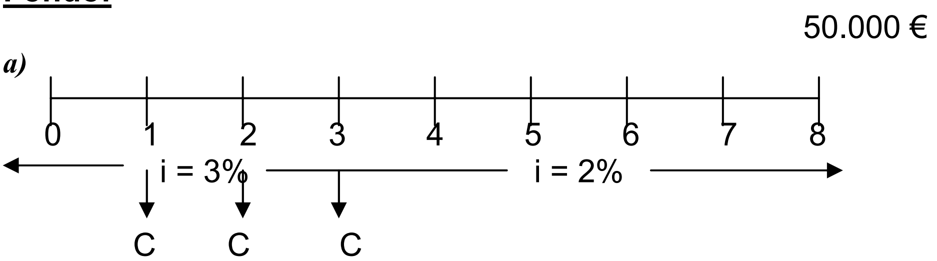
(b) Suponiendo que a finales del 5º año esta persona recibe una herencia de 7.500 euros y decide ingresarla en el fondo junto con la cuota de reconstrucción de eses año, calcule el año en el que el préstamo queda totalmente cancelado y cuál es la cuantía que tendrá que pagar ese último año.

Sol: (a) 5.920,70 (b) En el año 7, pagando 9.902,69

C_o = 50.000 €
n = 8 años
i = 10%

<u>Fondo:</u>

a)



$50.000 = C \cdot a_8 3\% \cdot (1{,}03) \qquad C = 5.622{,}819442$ €/año

$50.000 = 5.622{,}819442 \cdot a_3 3\% \cdot (1{,}03)^3 \cdot (1{,}02)^5 + C' \cdot a_5 2 \cdot (1{,}02)^5$

$50.000 = 19.188{,}45249 + 5.204040159 \cdot C'$

$C' = 5.920{,}697491$ €/año

b) $Cantidad_5 = 5.622{,}819442 \cdot a_3 3\% \cdot (1{,}03)^3 \cdot (1{,}02)^2 + 5.920{,}697491 \cdot a_2 2\% \cdot (1{,}02)^2 + 7.500 = 18.081{,}70735 + 11.959{,}80893 + 7.500 = 37.541{,}51628$€

$Cantidad_6 = 37.541{,}51628 \cdot (1{,}02) + 5.920{,}697491 = 44.213{,}0441$ €

$Cantidad_7 = 44.213{,}0441 \cdot (1{,}02) + 5.920{,}697491 = 51.018{,}00247$ €

↓

Sobran 1.018,00247 €

↓

Año 7 tendrá que pagar = 5.920,697491 – 1.018,00247 = 4.902,695021 €

También tendrá que pagar en el año 7 los intereses del préstamo = 50.000 · 0,10 = 5.000 €

Total a pagar año 7 = 9.902,695021 €

16.- Cierto individuo contrata un préstamo hipotecario con las siguientes características:
- Cuantía: 125.000
- Tanto de interés fijo del 9% capitalizable mensualmente.
- Amortización mediante el sistema francés, mensualmente y en 10 años.
- Gastos de notaría y registro de 1.200 euros.
- Comisión de apertura y estudio del 1% sobre el nominal.
- Seguros de amortización y de vivienda: 500 euros anuales prepagables.

Calcule:
(a) Tanto efectivo de coste para el cliente.
(b) T.A.E. de la operación.
Sol: (a) 11,121153 (b) 9,637 %

C_o = 125.000 €
j_{12} = 9% i_{12} = 0,75%
n = 10 años
$C_{mensual}$ cte
Gastos not. = 1.200 € → No TAE
Cap. = 1% C_o = 1.250 € → Si TAE
Seguros amort. Y vi.= 500 €/años prepagables

a) $125.000 - 1.200 - 1.250 = 1.583{,}447172 \cdot a_{120}i_{e12} + 500 \cdot a_{10}i_e \cdot (1 + i_e)$

$125.000 = C \cdot a_{120}i_{12}$ C = 1.583,447172 €/mes

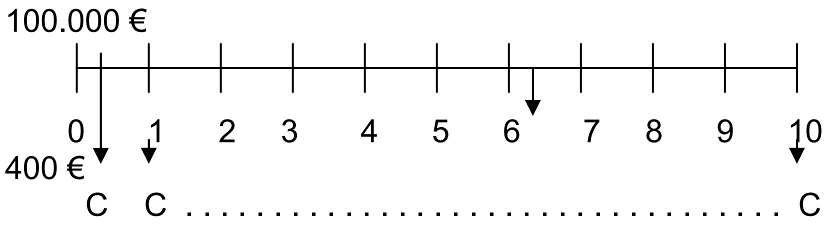
b) $125.000 - 1.250 = 1.583{,}44712 \cdot a_{120}TAE_{12}$

$(1 + TAE_{12})^{12} = (1 + TAE$

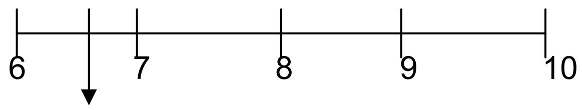
17.- Un individuo contrató un préstamo el día 1/01/90 con las siguientes características:
- Cuantía: 100.000 euros.
- Duración: 10 años.
- Tipo de interés fijo de 15% nominal pagadero mensualmente.
- Amortización mediante el sistema progresivo con mensualidades constantes.
- Gastos iniciales de 400 euros.
- Posibilidad de cancelación anticipada con una penalización del 1% sobre el capital pendiente.

En estos momentos, 30 de junio del 96, el tipo de interés para este tipo de operaciones es del 12% (nominal pagadero mensualmente). Si decide sustituir el préstamo que tenía por uno nuevo, y suponiendo que:
- La cuantía que tiene que pagar en concepto de penalización por cancelación anticipada también la pede prestada.
- Se mantiene la forma de amortización y el plazo.
- Los gastos iniciales del nuevo préstamo ascienden 300 euros y también los pide prestados.

Calcule:
(a) La nueva mensualidad a pagar.
(b) Tanto efectivo de coste para el prestatario en la operación conjunta.
Sol: (a) 1.560,18 (b)



$j_n = 15\%$ $i_{12} = 1{,}25\%$
$G_{canc} = 1\% \cdot K\ pte$



$$300\ € + S_{78} \cdot (1{,}01) = 52.292{,}9382\ €$$

$j_{12} = 12\%$ $i_{12} = 1\%$
$G_{canc} = 0{,}01 \cdot K\ pte$

a) **Antes:**

$100.000 = C \cdot a_{120}1{,}25\%$ $\quad C = 1.613{,}349571$ €/mes

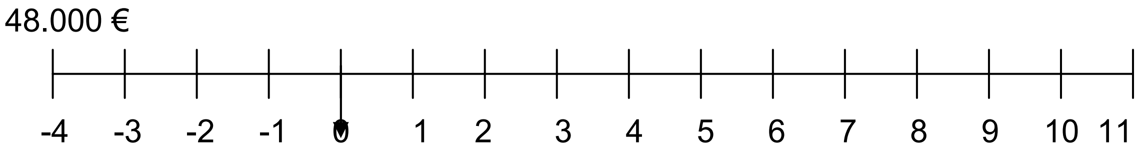
$S_{78} = 1.613{,}349571 \cdot a_{42}1{,}25\% = 52.468{,}25564$ €

Después:

$53.292{,}9382 = C' \cdot a_{42}1\%$ $\quad C' = 1.560{,}184129$ €/mes

b) $100.000 - 400 = 1.613{,}349571 \cdot a_{78}i_{e12} + 1.560{,}184129 \cdot a_{42}i_{e12}\,(1 + i_{e12})^{-78}$

18.- Cierta persona contrató un préstamo hipotecario de 48.000 euros hace 4 años, para amortizar en 15 años mediante mensualidades que permanecerán constantes a lo largo del año pero sufrirán un incremento acumulativo anual del 3%. El tanto de interés estipulado fue del 9% nominal con capitalización mensual. En estos momentos, principios del ano 5, desea cancelar el préstamo y abrir una nueva hipoteca por el valor de la deuda en otra entidad que le ofrece un 6% nominal con capitalización mensual, para amortizar con mensualidades constantes en los 11 años restantes.
a) Calcule la nueva mensualidad que tendrá que pagar.
b) Suponiendo que los gastos iniciales del primer préstamo ascendieron a 1.200 euros y los del segundo 1.000, calcule el tanto efectivo de coste de la operación conjunta.
Sol: (a) 456.06



$j'_{12} = 6\%$ $i'_{12} = 0,5\%$

$q = 1.03$
$j_{12} = 9\%$ $i_{12} = 0,75\%$

C cte

a) $$48.000 = C'_1 \cdot a_{12}i_{12} \cdot (1+i_{12})^{12} \cdot \frac{1-1,03^{15} \cdot 1,0938^{-15}}{1,0938-1,03}$$

$(1,0075)^{12} = (1 + i)$ $i = 9,38\%$

$$C'_1 = \frac{48.000}{12,50758636 \cdot \frac{0.594034072}{0.0638}} = 412,17€/mes$$

$$S_o = 412,17 \cdot 1,03^4 \cdot a_{12}i_{12} \cdot (1+i_{12})^{12} \cdot \frac{1-1,03^{11} \cdot 1,0938^{-11}}{1,0938-1,03} = 463,90 \cdot 12,51 \cdot \frac{0,4837}{0.0638} = 43.998,42€$$

$43.998,42 = C \cdot a_{11x12}i'_{12}$
$43.998,42 = C \cdot a_{132}0,5\%$ $C = 456,13$ €/mes

b) $$48.000-1.200 = 412,17 \cdot a_{12}i_{e12} \cdot (1+i_{e12})^{12} \cdot \frac{1-1,03^4(1+i_e)^{-4}}{1+i_e-1,03} + 1.000(1+i_e)^{-4} + 456,13 \cdot a_{132}i_e \cdot (1+i_e)^{-4}$$

19.- Construye el cuadro de amortización por el sistema francés de un préstamo con las siguientes características:
- Cuantía del capital prestado: 10.000
- Duración de la operación: 14 años
- Abono de intereses: Cuatrimestralmente
- Tipo de valoración: 3% cuatrimestral.

$10.000 = C \cdot a_4 9,2727\%$ $C = 3.105,1826$ €/año

$i_3 = 3\%$ $(1,03)^3 = (1 + i)$ $i = 9,2727\ \%$

$I_3 = 10.000 \cdot 0,092727 = 927,27$

$\alpha_3 = C - I_3 = 2.177,9126$ €

$I_6 = (10.000 - 2.177,9126) \cdot 0.092727 = 725,3186983$

$\alpha_6 = 3.105,1826 - 725,3186983 = 2.379,863902$

$I_9 = (10.000 - 4.557{,}77) \cdot 0.092727 = 504{,}6416612$

$\alpha_9 = 3.105{,}1826 - 504{,}6416612 = 2.600{,}540939$

$I_{12} = (10.000 - 7.158{,}31) \cdot 0.092727 = 263{,}5013016$

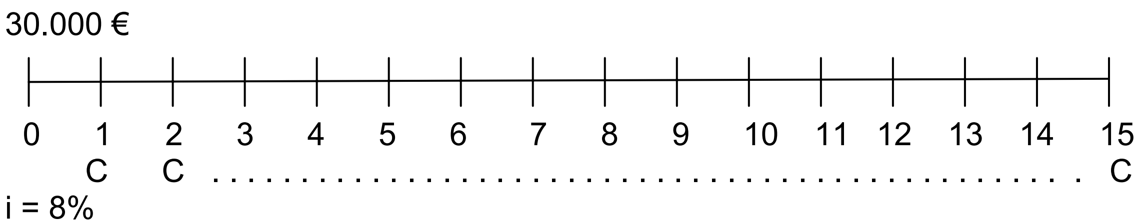
$\alpha_{12} = 3.105{,}1826 - 263{,}5013016 = 2.841{,}681298$

Otra forma : $\alpha_{k+1} = \alpha_k \cdot (1 + i) \quad k = 5, 8, 11$

Cantidad con círculo en la tabla: esos pagos con equivalentes a un pago anual de intereses más amortización.
$C_3 = I_3 + \alpha_3 = 300 \cdot a_3 i_3 \cdot (1 + i_3)^3 + 2.177{,}91 = 927{,}27 + 2.177{,}91 = 3.105{,}18$

CUATRIMESTRE	S_{k-1}	$C_k=I_k+\alpha_k$	$I_k=S_{k-1}\cdot i_3$	α_k	I_k
1	10.000	300	300		
2	10.000	300	300		
3	10.000	2.477,91	300	2.177,91	2.177,91
4	7.822,09	234,66	234,66		2.177,91
5	7.822,09	234,66	234,66		2.177,91
6	7.822,09	2.614,52	234,66	2.379,86	4.557,77
7	5.442,23	163,27	163,27		4.557,77
8	5.442,23	163,27	163,27		4.557,77
9	5.442,23	2.763,81	163,27	2.600,54	7.158,31
10	2.841,69	85,25	85,25		7.158,31
11	2.841,69	85,25	85,25		7.158,31
12	2.841,69	2.926,93	85,25	2.841,68	10.000

20.- Un préstamo de 30.000 euros se obtuvo hace 4 años para amortizarlo en 15 años, mediante anualidades constantes, al tanto de interés del 8% anual, en el momento actual requiere vender a un tanto del 6%, calcula:
(a) valor del préstamo
(b) usufructo
(c) nuda propiedad
Sol: (a) 27.642,60 (b) 17.157,23 (c) 10.485,36



$30.000 = C \cdot a_{15} 8\% \quad C = 3{,}504{,}886348$ €/año

Venta: $i_{14} = 6\%$

a) $V_p = 3.504{,}886348 \cdot a_{11}6\% = 27.642{,}59903$ €

b) ***Usufructo*** = V_p – Nuda propiedad = no se ve

c) ***Nuda propiedad*** = C = 3.504,88634

$I_1 = 30.000 \cdot 0{,}08 = 2.400$

$\alpha_1 = C - I_1 = 1.104{,}886348$

C = 3.504,88348

$I_2 = (30.000 - \alpha_1) \cdot 0{,}08 = 2.311{,}6092$

$\alpha 2 = C - I2 = C - (30.000 - \alpha 1) \cdot 0{,}08 = 1.193.277256$

<u>**Progresión geométrica creciente de razón**</u>: q = 1,08

$\alpha_5 = C_1 = \alpha_1 \cdot q^4 = 1.104{,}886348 \cdot 1{,}08^4 = 1.503{,}185679$

$$Nudapropiedad = 1.503{,}185679 \cdot \frac{1 - 1{,}08^{11} \cdot 1{,}06^{-11}}{1{,}06 - 1{,}08} = 1.503{,}185679 \cdot 11{,}41391687 = 17.157{,}23638€$$

Usufructo = 27.642,59903 – 17.157,23638 = 10.485,36265 €

TEMA 10: *OPERACIONES DE EMPRESTITO*

10.1. Conceptos generales

Es una agregación de préstamos uniformes y homogéneos, o sea, préstamos de igual cuantía **V**, amortizables con la misma ley financiera y con idénticas contraprestaciones. Cada uno de estos pequeños préstamos individuales se materializaron en títulos, valores que normalmente se denominan obligaciones.

El empréstito es un préstamo de gran volumen o cuantía dividido en partes alícuotas denominada título u obligaciones emitidas por el prendatario, entidad o sociedad que solicita el dinero al prestamista que suele ser un colectivo de personas, teóricamente tanta como título y obligaciones.

La característica principal del empréstitos es que es un préstamo en el que existe un solo prestatario y varios emprestamistas, el emisor (prestatario) fracciona la deuda en partes alícuotas (título) y se compromete a pagar al prestamista los intereses y a devolver el capital de acuerdo con la condición previamente establecida en el préstamo.

La deuda se fija para su extinción a largo plazo, pero la negociación de los títulos valora, permite el poseedor de los títulos venderlos y recuperar el capital sin tener que esperara el plazo de reemboloso.

La persona que interviene en el empréstito:

El ***prestatario***: emite títulos que lanzan al público interesado en invertir sus ahorros por intermediarios del mercado financiero.
El ***prestamista***: es un colectivo que presta el dinero ante la expectativa de obtener rentabilidad, bambién se le denomina obligacionista.
El ***intermediario financiero***: está formado por el conjnto de bancos, caja de ahorros, agencia de valores y una entidad financiera que cobrando comisiones canaliza el excedente de capital acumulado por las ahorradoras y los orienta en su deseo de rentabilizar sus ahorros.

Los motivos que justifican la emisión de un empréstito son:

- Para el prestatario la dificultad de encontrar un solo prestamista, para dar facilidad de inversión para el pequeño ahorro.
- Para el prestamista la posibilidad de diversificación en la colocación de su dinero según niveles de seguridad, rentabilidad y liquidez deseada.

La emisión del titulo y obligaciones se puede realizar de distinta forma:

a) Por la *propia entidad emisora* que percibe directamente de la obligacionista el importe de la emisión y corre el riesgo de que no sean suscritos la totalidad de un título.
b) A través de *intermediarios financieros.* El prestatario forma o emite obligaciones utilizando como plataforma de lanzamiento a las entidades financieras que se encargan de colocar entre sus clientes el conjunto de la obligaciones del empréstito en esta tarifa de colocación y lanzamiento el intermediario puede optar por:

1. Comprar los títulos valores para recolocarlos en el mercado a un precio superior quedándose el intermediario con los títulos no vendidos y asumiendo el correspondiente.
2. Comprar los títulos para recolocarlos en el mercado y quedándose con los títulos no vendidos a un precio especial pactado de antemano.
3. Aceptar vender los títulos cobrando una comisión por aquellos que coloquen y devolviendo los que no consiga colocar, en este último como no asuma riesgo.

A veces cuando la cuantía total de la emisión es muy alta los intermediarios son varios y se agrupan formando un sindicato con objeto de dividir el riesgo, aumentar la red comercial para colocarlos y ampliar el colectivo de pequeñas ahorradoras que son las accionistas.

En el valor del título hemos de distinguir:

1. **Valor nominal:** valor que lleva impreso el título.
2. **Valor efectivo:** valor que tiene el título en el mercado en un momento determinado.
3. **Valor de emisión:** valor que tiene el título en el momento de ponerlo en circulación con la finalidad de despertar el interés de la prestamista, este valor puede ser menor que el valor nominal.

4. **Valor de reembolso:** valor por el que se compromete la entidad emisora a retirar el título de la circulación, es decir, a amortizarlo. Esta amortización puede ser a la par (sise amortiza por su valor nominal) sobre la par (si se amortiza por un valor superior al nominal).

La emisión de título de diversas índole, unas de cuantía fija y otros en función del efectivo del empréstito.

Estos gastos pueden ser abonable de una sola vez en el momento de la emisión o pagaderos periódicamente.

Se entiende por ***efectivo*** de la emisión el producto resultante de multiplicar el número de títulos emitidos por el valor de emisión de cada uno de ellos.

El ***líquido de la emisión*** nos vendrá dado por la diferencia entre el efectivo y los gastos satisfechos en el momento de la emisión.

El poseedor de una obligación está en circulación al cobro de los intereses al final de cada periodo estipulado y en el momento en que resulta amortizado a percibir el valor de reembolso.

Al final de cada periodo el prestatario cancela parte del crédito mediante la amortización de un número determinado de títulos abonándose el propietario de los mismos el precio de reembolso convenido en el momento de la emisión de forma que el final del periodo deben quedar amortizados todos los títulos.

Se denomina ***títulos vivos*** en un momento determinado a los que en dicho momento están aún sin amortizar y títulos muertos a los que ya están amortizados.

La ***anualidad***, es decir la cuantía que la empresa emisora ha de abonar anualmente constará de dos partes:

- Una la correspondiente al pago de intereses.
- La otra la correspondiente a la amortización de los títulos en dicho periodo.

10.2. Clasificación de los empréstitos

Se pueden realizar diversas clasificaciones atendiendo a variados y diferentes criterios pudiendo ser compatibles entre los criterios de clasificación ya que atienden a diferente puntos de vista.

1. *Según la forma en que se pagan los intereses:*

a) ***Obligaciones con pago periódico de intereses u obligaciones americanas:*** cada título es un préstamo americano del cual el obligacionista recibe periódicamente el cupón y la amortización del título se produce al final de la operación.

b) ***Obligaciones sin pago periódico de intereses***:

- *Obligaciones con intereses acumulados o cupón cero*: se valoran con una ley de capitalización y los intereses se reciben acumulados en el momento de la amortización del título.

- *Obligaciones al descuento:* se valora con una ley de descuento.

- *Obligaciones con intereses anticipados:* se valoran con una ley de capitalización con réditos anticipados.

2. *Según el momento en que se reembolsa los títulos.*

a) ***Empréstitos de obligaciones de amortización periódica o de distinta duración o con programa de cancelación escalonada***: todas las obligaciones tienen unas condiciones de partida iguales y son equiprobables, es decir, la probabilidad de ser reembolsadas en un determinado periodo es la misma para todas ellas.

b) ***Empréstitos de obligaciones de igual duración o reembolso global:*** todos los títulos se amortizan a la misma vez, por tanto, no hay programa de cancelación escalonada.

3. Atendiendo a la existencia de características comerciales:

a) ***Empréstitos normales o puros:*** son aquellos empréstitos en que la prestación nominal entregada por los obligacionistas y la contraprestación que entregada el emisor responde únicamente a las características financieras de la operación y no están afectados por características comerciales.

b) ***Empréstitos comerciales o con características comerciales*** son aquellas que llevan incorporadas ciertas características de tipo comercial (primas, lotes,...) que modifican la prestación y la contraprestación alterando la equivalencia financiera inicial.

4. Atendiendo a la rentabilidad:

- ***Con tipo de interés fijo***, en los que la rentabilidad permanece constante a lo largo de la vida del empréstito ya que desde el momento de su emisión se establece el tiño de interés que van a producir los títulos.
- ***Con tipo de interés variado*** en ellos el tipo de interés permanece fijo mientras dura cada periodo de amortización pero varía de un periodo a otro, normalmente la variación el tipo de interés viene determinada por la variación de un índice que se toma como referencia (son los denominados obligaciones indiciadas).

5. Atendiendo a la distribución de los títulos:

a) ***Con prima de emisión.*** Cuando se entrega a la compra una cantidad monetaria inferior al nominal, es decir, se emiten bajo la par.
b) ***Con prima de reembolsos.*** Cuando las obligaciones son reembolsadas por una cantidad superior al nominal, es decir, se amortiza sobre la par, la prima de reembolso puede ser fija o variable.
c) ***Con prima de emisión y de reembolsos.*** Cuando se emiten baja la para y se amortizan sobre la par.
d) ***Sin prima.*** Se emiten y se reembolsan a la par.
e) ***Con premio o lote.*** Cuando alguna obligaciones son reembolsadas por su valor nominal incrementando el premio o lote, este premio se concede aleatoriamente en cada sorteo de amortización.

6. <u>Atendiendo a la estructura financiera:</u>

a) amortización mediante anualidades y tanto de interés constante.
b) Amortización mediante anualidades variable y tanto de interés constante.
c) Amortización mediante anualidades variables y tanto de interés variable.

10.3. Estudio financiero de los empréstitos normales o puros

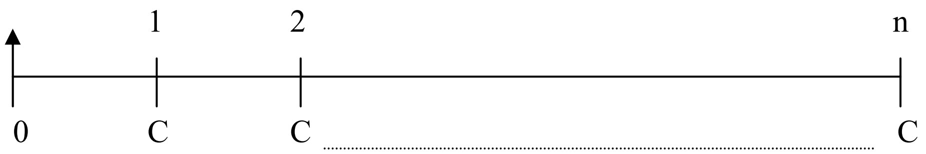
El empréstito se dira que es normal o puro cuando la prestación (capital recibido por el prestatario) y la constraprestación (capital entregado por el prestatario) sea financieramente equivalente, es decir, las contraprestación solo sirve para pagar el préstamo junto con sus intereses, en ello la amortización es a la par.

$$\frac{C_o}{N} = V$$

V: Valoración de cada obligación, valor nominal.
N: nº de obligaciones emitidas
C_o: Valor nominal del empréstito.

Amortización global o una cancelación escalonada ⇨ Reducción del nominal.

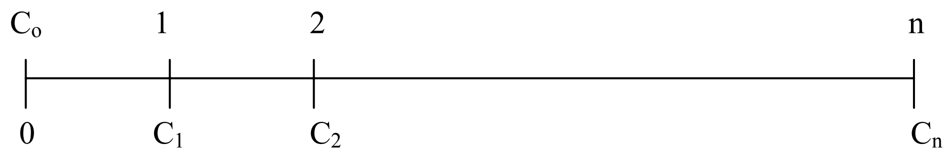
Pago periódico de intereses por vencido y anualidad Co



$$C_o = C\, a_{\overline{n|}\,i} = N\cdot V$$

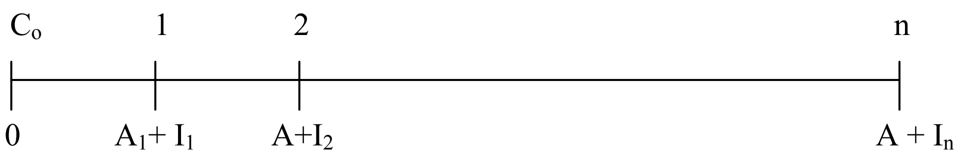
$$C = \frac{N_D \cdot V}{a_{\overline{n|}\,i}} + N$$

Pago periódico de intereses por vencido y anualidades variables geométricamente.



$$C_o = A_n'' = N\cdot V$$

Amortización con reembolso periódico de títulos o con cancelación escalonada



$$A = \frac{C_o}{n} = \frac{N \cdot V}{n}$$

Pago periódico de intereses por vencido y anualidad aritmética

$$C_0 = A_n^d = NV$$

Obligaciones cupón cero

$$C_o = C \cdot a_{\overline{n}|\, i}$$

$$C = N_k \cdot V \cdot (1+i)^k \rightarrow N_k = \frac{C}{V \cdot (1+i)^k}$$

n = entero → redondear

En este caso no se mantiene todas las obligaciones vivas hasta el final de la operación. Habrá que distinguir:

- **Ni:** nº de obligaciones que se cancelan al final del periodo i.
- **Mi:** nº de obligaciones vivas o en circulación al principio de cada periodo i.

Cuadro de amortización:

Año (n)	Anualidad (c)	Intereses ($i \cdot m_k \cdot v$)	Amortización ($N_k \cdot V$)	Títulos amortizados (N_k)	Títulos vivos (M_k)

10.4. Estudio financiero de los empréstitos con características comerciales

* **Bilateral**

Prima de emisión:
- -Por debajo de la par: $V > V_E$ →Obligaciones paga menos.
- -Por encima de la par: $V < V_E$ →Obligaciones paga más.

Prima de amortización: $V_A \neq V$

Cantidad que se tiene que amortizar

Premio o lotes: cuantía que paga el emisor, se sortea como premio entre los obligacionistas.

* **Unilateral** ⇨ *Gastos iniciales,...*

Relación de Ejercicios Universitarios: EMPRÉSTITOS

1.- Construye el cuadro de amortización de un empréstito normal, con reembolso simultáneo de obligaciones, en el que se emiten 10.000 obligaciones de 1.000 euros nominales cada una, cupón anual de 50 euros y duración de la amortización 10 años.

N = 10.000
V = 1.000
n = 10 años

Cupón anual = 50 € $i = \dfrac{50}{1.000} = 0{,}05$ i = 5% anual

<u>Interés=</u>cupón/valor nominal
Interés=50/1.000=0'05

<u>Calculamos el término C anual:</u>

$$N \cdot V = C \cdot a_n i \Rightarrow C = 1.295.046$$

<u>Calculamos el número de títulos amortizados:</u>

Primer año: $N_1 = \dfrac{A_1}{V} = \dfrac{C - I_1}{V} = \dfrac{C - i \cdot C_0}{V}$

Años consecutivos: $N_{k+1} = N_k (1 + i)$

<u>Calculamos el número de titulos vivos periodo a periodo:</u> $A_k = N_k \cdot V$

<u>Calculamos los intereses de cada periodo:</u> $I_k = C - A_k$

PERIODO	ANUALIDAD C	INTERESES Ik	AMORTIZACIÓN Ak	N.TÍT. AMORTIZ.	N.TÍT. VIVOS
0					10.000
1	1.295'046	500.046	795.000	795	9.205
2	1.295'046	460.046	835.000	835	8.370
3	1.295'046	420.046	875.000	875	7.495
4	1.295'046	375.046	920.000	920	6.575
5	1.295'046	329.046	966.000	966	5.609
6	1.295'046	280.046	1.015.000	1.015	4.594
7	1.295'046	229.046	1.066.000	1.066	3.528
8	1.295'046	176.046	1.119.000	1.119	2.409
9	1.295'046	120.046	1.175.000	1.175	1.234
10	1.295'046	61.046	1.234.000	1.234	0

2.- Se emite un empréstito formado por 50.000 obligaciones de nominal 500 euros para ser amortizado en 10 años mediante anualidades constantes a un tipo de interés del 6% anual pospagable. Determine:
a) Anualidad constante que amortiza el empréstito.
b) Títulos amortizados en el tercer sorteo.
c) Títulos amortizados después de cuatro sorteos.
d) Títulos vivos a principios del octavo año.
Sol: a) 3.396.698,9 b) 4.262 c) 16.594 d) 18.159

N = 50.000 obl.
V = 500 €
n = 10 años
¿C?
i = 6%

a) Anualidad constante que amortiza el empréstito:

$50.000 \cdot 500 = C \cdot a_{10}6\%$

$C = 3.396.698,956$ €/año

b) Títulos amortizados en el tercer sorteo:

$$N_3 = \frac{C - I_3}{V} = \frac{C - i \cdot D_2}{V} = 4.262,26$$ ***4.262 obligaciones***

c) Títulos amortizados después de cuatro sorteos:

$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N - N_5$

$$M_5 = \frac{D_4}{V} = \frac{C \cdot a_6 i}{V} = \frac{3.396.698,956 \cdot a_6 6\%}{500} = 33.405,34081$$

33.406 obligaciones

$N - M_5 = 50.000 - 33.406 =$ ***16.594 obligaciones***

d) Títulos vivos al principio del octavo año:

$$M_8 = \frac{D_7}{V} = \frac{C \cdot a_3 i}{V} = \frac{3.396.698,956 \cdot a_3 6\%}{500} = 18.158,8338$$

18.159 obligaciones

Periodo	Anualidad C	Intereses Ik	Amortización Ak	Nº Títu.Amort. Nk	Nª Titul. Vivos Mk
0					50.000
1	3.396.699	1.500.000	1.896.698,90	3.793	46.207
2	3.396.699	1.386.198	2.010.500,86	4.021	42.186
3	3.396.699	1.265.568	2.131.130,90	4.262	37.924
4	3.396.699	1.137.700	2.258.998,76	4.518	33.406
5	3.396.699	1.002.160	2.394.538,69	4.789	28.617
6	3.396.699	858.488	2.538.211,01	5.076	23.541
7	3.396.699	706.195	2.690.503,67	5.381	18.160
8	3.396.699	544.765	2.851.933,89	5.704	12.456
9	3.396.699	373.649	3.023.049,92	6.046	6.410
10	3.396.699	12.962	3.383.737,09	6.410	0

3.- Construye el cuadro de amortización de un empréstito que se amortiza por sorteo y tiene las siguientes características:
- Número de títulos emitidos: 50.000
- Nominal de cada título: 1.000
- Duración de la emisión 10 años.
- Cupón anual de 100 euros por título.

Con las siguientes hipótesis:
a) Obligaciones americanas y anualidad variable geométrica de razón 1,05.
b) Obligaciones americanas y anualidad variable aritmética con distancia 500.000.
c) Obligaciones americanas amortizando todos los años el mismo números de títulos.

Sol: (Números de títulos que se amortizan cada año)
1.721, 2.229, 2.804, 3.455, 4.190, 5.017, 5.948, 6.993, 8.165, 9.478.
1.275, 1.902, 2.592, 3.351, 4.187, 5.105, 6.116, 7.227, 8.450, 9.795.
5.000

N = 50.000
V = 1.000
n =10 años
Cupón = 100 €/título/año

a) Anualidad variable geométrica:

$$1.000 \cdot 50.000 = A''_{10} \left\langle \begin{array}{l} n = 10 \\ i = \dfrac{100}{1.000} = 0{,}1 = 10\% \\ q = 1{,}05 \end{array} \right.$$

$$50.000 = C_1 \cdot \frac{1 - 1{,}05^{10} 1{,}10^{-10}}{1{,}10 - 1{,}05}$$ C_1 = 6.720.599,794

$$N_1 = \frac{C_1 - I_1}{V} = \frac{C_1 - i \cdot D_o}{V} = \frac{6.720.599{,}794 - 0{,}10 \cdot 50.000}{1.000} = 1.720{,}599794$$

$$M_k = M_{k-1} - N_k$$

Para calcular la columna M_k *ó*

$$M_k = N - \sum_{i=1}^{k} N_k$$

Posteriormente calculamos $A_k = N_k \cdot V$

En cuanto a la columna I_k $I_k = C_k - A_k$

Periodo	Anualidad C	Intereses Ik	Amortización Ak	Nº Títu.Amort. Nk	Nª Titul. Vivos Mk
0					50.000
1	6.720.600	4.999.600	1.721.000	1.721	48.279
2	7.056.630	4.827.630	2.229.000	2.229	46.051
3	7.409.462	4.605.462	2.804.000	2.804	43.246
4	7.779.935	4.324.935	3.455.000	3.455	39.791
5	8.168.931	3.978.931	4.190.000	4.190	35.601
6	8.577.378	3.560.378	5.017.000	5.017	30.584
7	9.006.247	3.058.247	5.948.000	5.948	24.636
8	9.456.559	2.463.559	6.993.000	6.993	17.643
9	9.929.387	1.764.387	8.165.000	8.165	9.478
10	10.425.856	947.856	9.478.000	9.478	0

b) Anualidad variable aritmética:

α = 500.000

$$C_0 = C_1 \cdot a_n i + \frac{d}{i} a_n i - \frac{nd}{i}(1+i)^{-n} \Rightarrow 50.000 \cdot 1.000 = C_1 a_{10} 10\% + \frac{500.000}{0'1} a_{10} 10\% - \frac{10 \cdot 500.000}{0'1}(1'1)^{-10}$$

50.000.000 = A´$_{10}$ C$_1$ = 6.274.539

$$N_1 = \frac{C_1 - I_1}{V} = \frac{C_1 - i \cdot D_o}{V} = 1.274{,}539$$ 1.275 obligaciones

$$N_2 = N_1 \cdot (1+i) + \frac{d}{V}$$

Periodo	Anualidad C	Intereses Ik	Amortización Ak	Nº Títu.Amort. Nk	Nª Titul. Vivos Mk
0					50.000
1	6.274.539	4.999.539	1.275.000	1.275	48.725
2	6.774.539	4.872.539	1.902.000	1.902	46.823
3	7.274.539	4.682.347	2.592.192	2.592	44.231
4	7.774.539	4.423.539	3.351.000	3.351	40.880
5	8.274.539	4.087.539	4.187.000	4.187	36.693
6	8.774.539	3.669.539	5.105.000	5.105	31.588
7	9.274.539	3.158.539	6.116.000	6.116	25.472
8	9.774.539	2.547.539	7.227.000	7.227	18.245
9	10.274.539	1.824.539	8.450.000	8.450	9.795
10	10.774.539	979.539	9.795.000	9.795	0

c) ***Amortización cuotas constantes***

$$N_k = \frac{N}{10} = \frac{50.000}{10} = 5.000 obligaciones / año$$

$C_{k+1} = C_k - 5.000 \cdot 1.000 \cdot 0,10$

$$\left. \begin{array}{l} C_k = N_k \cdot V + i \cdot M_k \cdot V \\ C_{k+1} = N_{k+1} \cdot V + i \cdot M_{k+1} \cdot V \end{array} \right\rangle$$

$$C_k - C_{k+1} = [N_k - N_{k+1}] \cdot V + [M_k - M_{k+1}] \cdot V \cdot i$$

$C_k - C_{k+1} = N_k \cdot V\ i$

$C_{k+1} = C_k - N_k \cdot V \cdot i$

Periodo	Anualidad C	Intereses Ik	Amortización Ak	Nº Títu.Amort. Nk	Nª Titul. Vivos Mk
0					50.000
1	9.500.000	4.500.000	5.000.000	5.000	45.000
2	9.000.000	4.000.000	5.000.000	5.000	40.000
3	8.500.000	3.500.000	5.000.000	5.000	35.000
4	8.000.000	3.000.000	5.000.000	5.000	30.000
5	7.500.000	2.500.000	5.000.000	5.000	25.000
6	7.000.000	2.000.000	5.000.000	5.000	20.000
7	6.500.000	1.500.000	5.000.000	5.000	15.000
8	6.000.000	1.000.000	5.000.000	5.000	10.000
9	5.500.000	500.000	5.000.000	5.000	5.000
10	5.000.000	0	5.000.000	5.000	0

4.- Se emite un empréstito formado por 100.000 títulos, de nominal 1.000 euros cada uno, para ser amortizado en 20 años, abonándose un cupón anual vencido de 70 euros por obligación y amortizándose el mismo números de títulos todos los años. Calcule:

a) Cuantía de la anualidad del tercer años.
b) Número de títulos vivos después de 12 sorteos.

Sol: a) 11.300.000 b) 40.000

N = 100.000 títulos
V = 1.000 €/tít.
n = 20 años
Cupón = 70 €/obl./año $i = \frac{70}{1.000} \cdot 100\% = 7\%$

$$N_k = \frac{N}{n} = \frac{100.000}{20} = 5.000 obl./año$$

a) Cuantía de la anualidad del tercer año:

$C_3 = N_3 \cdot V + M_3 \cdot V \cdot i$ = 5.000 · 1.000 + (100.000 – 5.000 – 5.000) · 1.000 = 5.000.000 + 90.000.000 · 0,07 = 11.300.000 €

b) Número de títulos vivos después de 12 sorteos:

M_{13} = 100.000 – 12 · 5.000 = 40.000 obl.

Periodo	Anualidad C	Intereses Ik	Amortización Ak	Nº Títu.Amort. Nk	Nª Titul. Vivos Mk
					100.000
1	12.000.000	7.000.000	5.000.000	5.000	95.000
2	11.650.000	6.650.000	5.000.000	5.000	90.000
3	11.300.000	6.300.000	5.000.000	5.000	85.000
4	10.950.000	5.950.000	5.000.000	5.000	80.000
5	10.600.000	5.600.000	5.000.000	5.000	75.000
6	10.250.000	5.250.000	5.000.000	5.000	70.000
7	9.900.000	4.900.000	5.000.000	5.000	65.000
8	9.550.000	4.550.000	5.000.000	5.000	60.000
9	9.200.000	4.200.000	5.000.000	5.000	55.000
10	8.850.000	3.850.000	5.000.000	5.000	50.000
11	8.500.000	3.500.000	5.000.000	5.000	45.000
12	8.150.000	3.150.000	5.000.000	5.000	40.000

13	7.800.000	2.800.000	5.000.000	5.000	35.000
14	7.450.000	2.450.000	5.000.000	5.000	30.000
15	7.100.000	2.100.000	5.000.000	5.000	25.000
16	6.750.000	1.750.000	5.000.000	5.000	20.000
17	6.400.000	1.400.000	5.000.000	5.000	15.000
18	6.050.000	1.050.000	5.000.000	5.000	10.000
19	5.700.000	700.000	5.000.000	5.000	5.000
20	5.350.000	350.000	5.000.000	5.000	0

5.- Se emite un empréstito con las siguientes características:
- Número de títulos emitidos 20.000
- Nominal de cada título 1.000 euros.
- Duración de la emisión 10 años.
- Obligaciones de cupón cero.
- Tanto de interés anual 6%.

Determine:

a) Anualidad constante que amortiza el empréstito.
b) Títulos que se amortizan en el cuarto sorteo.
c) Títulos amortizados en los cinco primeros sorteos.
d) Títulos vivos después de tres sorteros.

Sol: a) 2.717.359 b) 2.152 d) 8.553 d) 15.170

N = 20.000 títulos
V = 1.000 €/título
n = 10 años
i = 6%
Cupón cero

a) $20.000 \cdot 1.000 = C \cdot a_{10}6\%$ $C = 2.717.359,164$ €

b) ¿N_4?

$C = N_k \cdot V \cdot (1 + i)^k$

$$N_4 = \frac{C}{V \cdot (1+i)^4} = \frac{2.717.359,164}{1.000 \cdot (1.06)^4} = 2.152,40$$ 2.152 obligaciones

c) $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = N - M_6 =$

$$= 20.000 - \frac{C \cdot a_5 6\%}{V} = 20.000 - \frac{2.717.359,164 \cdot a_5 6\%}{1.000} = 20.000 - 11.226,5$$

$= 8.553,4946$ 8.553 títulos

d) $M_4 = \frac{C \cdot a_7 6\%}{V} = \frac{2.717.359.164 \cdot a_7 6\%}{1.000} = 15.169{,}33$

15.170 obligaciones

Periodo	Anualidad C	Intereses Ik	Amortización Ak	Nº Títu.Amort. Nk	Nª Titul. Vivos Mk
0					20.000
1	2.717.359,16	0	2.717.359,16	2.564	17.436
2	2.717.359,18	0	2.717.359,18	2.418	15.018
3	2.717.359,18	0	2.717.359,18	2.282	12.736
4	2.717.359,18	0	2.717.359,18	2.152	10.584
5	2.717.359,18	0	2.717.359,18	2.031	8.553
6	2.717.359,18	0	2.717.359,18	1.916	6.638
7	2.717.359,18	0	2.717.359,18	1.807	4.831
8	2.717.359,18	0	2.717.359,18	1.705	3.126
9	2.717.359,18	0	2.717.359,18	1.608	1.517
10	2.717.359,18	0	2.717.359,18	1.517	0

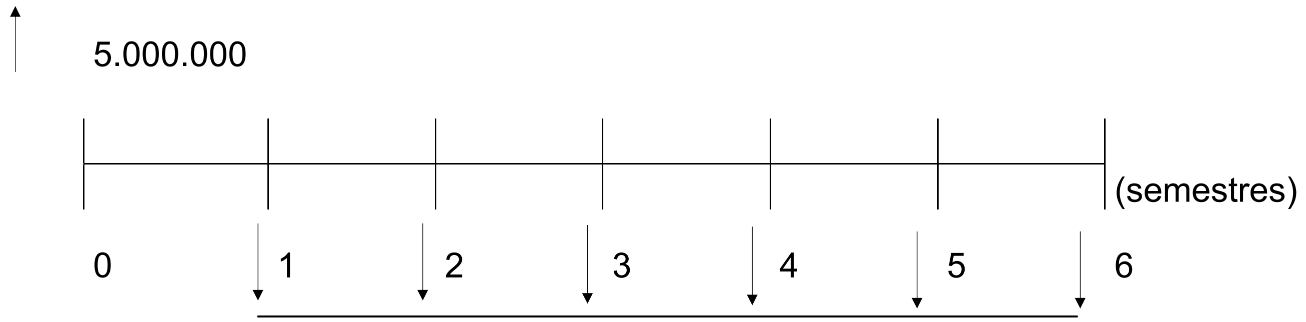
6.- Se emite un empréstito con reembolso simultáneo detonas las obligaciones y con las siguientes características:
- Número de obligaciones emitidas: 10.000
- Obligaciones americanas de duración 3 años.
- Valor nominal de cada obligación: 500 euros.
- Cupones semestrales al 10% nominal con capitalización semestral.

Calcule:
a) Semestralidades que amortizan el empréstito.
b) Tanto efectivo de rendimientos para el obligacionista sabiendo que le cobran una comisión de suscripción del 1 por mil sobre el nominal.

Sol: a) 250.000 y 5.250.000 b) 4,96%

N = 10.000
n = 3 años
V = 500 €
je = 10% $i_2 = 5\%$

a) *Obligaciones americanas:*

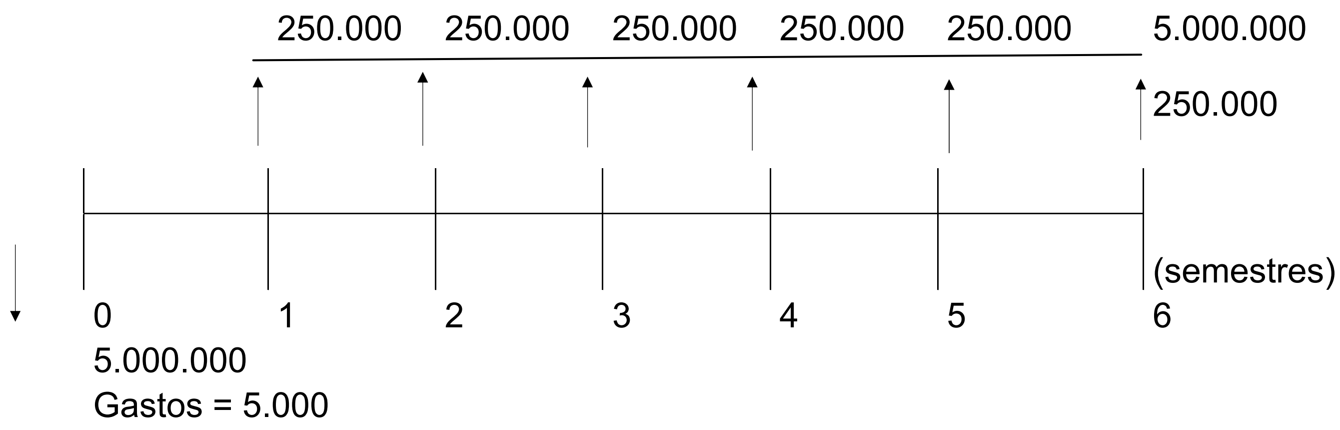


Cupón= N*V*i2
=10.000*500*0,05
=250.000

"C_1" a "C_5" = 0,05 · 10.000 · 500 = 250.000 €

C_6 = 250.000 + 10.000 · 500 = 5.250.000 €

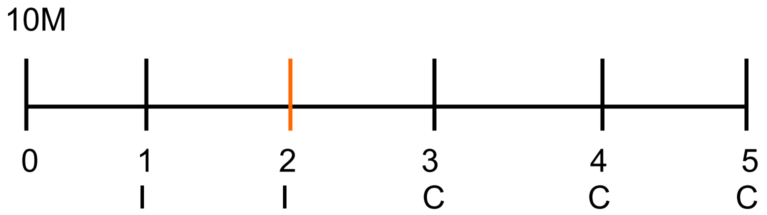
b) Tanto rendimiento para el obligacionista:



$$5.500.000 = 250.000 \cdot a_{6\rceil i_{e2}} + 5.000.000 \cdot (1 + i_e)^{-3}$$

$$i_2 = 4'96\%; \; i = 10'17\%$$

7.- Construye el cuadro de amortización de un empréstito de 10.000 títulos amortizable en 5 años, de 1.000 euros cada título y cupón anual de 70 euros. Las condiciones de la emisión estipulan que durante los dos primeros años únicamente se abonarán intereses, empezando la amortización con anualidades constantes del tercer año.
Sol: 700.000   3.810.516,7



N *(número de obligaciones emitidas)* = 10.000
n = 5 años
V *(valor de cada obligación)* = 1.000 €/obligación
Cupón = 70 €/año

$$i = \frac{70}{1.000} = 7\%$$

I_1 = 10.000.000 · 0,07 = 700.000

10.000.000 = C · a_{3}7% ; 10.000.000= C· $\frac{1-(1'07)^{-3}}{0'07}$ = 3.810.516,66 €/año

AÑO	ANUALIDAD	INTERESES	AMORTIZACIÓN	DEUDA
1	700.000	700.000*[1]	---	10.000.000
2	700.000	700.000	---	10.000.000
3	3.810.516,66	700.000	3.110.516,66*[2]	6.889.483'34*[3]
4	3.810.516,66	482.263,83*[4]	3.328.252,837	3.561.230'503
5	3.810.516,66	249.286,13	3.561.230'503	---

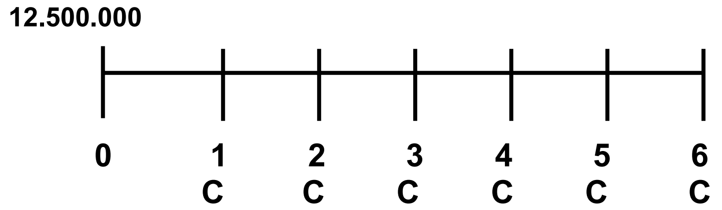
*[1] 10.000.000·0'07= 700.000
*[2] 3.810.516'66 – 700.000= 3.110.516'66
*[3] 10.000.000 – 3.110.516'66= 6.889.483'34
*[4] 6.889.483'34 · 0'07= 482.263'83

8.- Se emite un empréstito para amortizar por reducción de nominal con las siguientes características:

- Número de títulos emitidos: 125.000
- Valor nominal de cada título: 100 euros.
- Los títulos se amortizarán mediante el sistema francés, al 5% y en 6 años.

Construye el cuadro de amortización y calcula el tanto efectivo de coste para el emisor suponiendo que existen unos gastos iniciales de 100.000 euros y unos gastos de administración periódicos del 0,5% sobre todas las cantidades pagadas.

Sol: Anualidad = 2.462.500 euros.

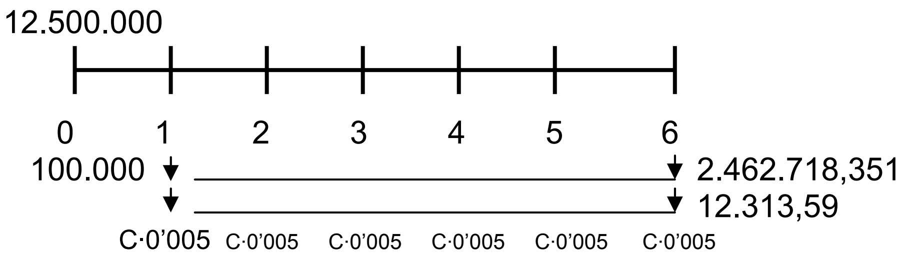


N (número de obligaciones) = 125.000
i = 5%
V (valor de cada obligación) = 100 €/ título
n = 6 años

$$12.500.000 = C \cdot a_{6}5\% \; ; \; 12.500.000 = C \cdot \frac{1-(1'05)^{-6}}{0'05} \quad ; \quad C = 2.462.718,351$$

AÑO	ANUALIDAD	INTERESES	AMORTIZACIÓN	DEUDA
1	2.462.718'351	625.000*1	1.837.718,351*2	10.662.281'65*3
2	2.462.718'351	533.114,08	1.929.604'271	8.732.677'379
3	2.462.718'351	436.633,869	2.026.084'782	6.706.592'597
4	2.462.718'351	335.329,63	2.127.388'721	4.579.203'876
5	2.462.718'351	228.960,1938	2.233.758'157	2.345.445'719
6	2.462.718'351	117.272,2859	2.345.445'719	0

*1 12.500.000 · 0'05= 625.000
*2 2.462.718'351 - 625.000= 1.837.718'351
*3 12.500.000 – 1.837.718'351= 10.662.281'65



$12.500.000 - 100.000 = 1.475.031,94 \cdot a_{6}i_{e}$

9.- Construye el cuadro de amortización de un empréstito cuyas características son las siguientes:
- Número de títulos emitidos 100.000
- Nominal de cada título 500
- Duración de la emisión 5 años.
- Amortización de los títulos por el nominal.
- Los años 1 y 2 abono de un cupón de 50 euros por obligación, los años 3 y 4 de 55 euros y el 5 de 60 euros.
- Anualidad variable aritmética de distancia igual a la carta parte del primer término.
- Amortización escalonada

Sol: (Número de títulos que se amortizan cada año). 8.414, 13.859, 19.072, 25.773, 32.882

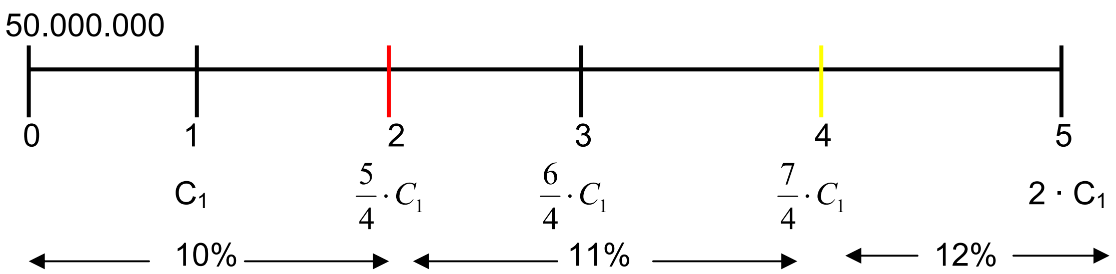
N (número de obligaciones emitidas)= 100.000
V (valor de cada obligación)= 500
n = 5 años
Cálculo de cupones=

$$i_{1/2} = \frac{50}{500} = 10\%$$

$$i_{3/4} = \frac{55}{500} = 11\%$$

$$i_5 = \frac{60}{500} = 12\%$$

$$d = \frac{1}{4} \cdot C_1$$



$$50.000.000 = \frac{C_1}{1{,}1} + \frac{5/4 \cdot C_1}{1{,}1^2} + \frac{6/4 \cdot C_1}{1{,}11 \cdot 1{,}1^2} + \frac{7/4 \cdot C_1}{1{,}11^2 \cdot 1{,}10^2} + \frac{2 \cdot C_1}{1{,}12 \cdot 1{,}11^2 \cdot 1{,}10^2}$$

$50.000.000 = 5{,}43059052 \cdot C_1$ $\qquad$ $C_1 = 9.207.099{,}248$ €

$I_1 = 100.000 \cdot 500 \cdot 0{,}10 = 5.000.000$

$I_2 = 500 \cdot 91.586 \cdot 0{,}10 = 4.579.300$

AÑO	ANUALIDAD	INTERESES	AMORTIZACIÓN	N_k	N_{k+1}
1	9.207.099'248	5.000.000	4.207.099'248[*1]	8.414'19	91.586
2	11.508.874'06	4.579.300	6.929.574'06	13.859'14	77.727
3	13.810.648'87	4.274.985	9.535.662'87	19.071'32	58.656
4	16.112.423'68	3.226.080	12.886.343'68	25.772'68	32.884
5	18.414.198'5	1.973.040	16.441.158'5	32.882'317	---

[*1] 9.207.099'248 – 5.000.000= 4.207.099'248

BIBLIOGRAFÍA

MATEMÁTICAS FINANCIERAS I: UNED http://info.uned.es/dpto-economia-empresa-y-contabilidad/asignaturas/423025/portada.htm

PABLO LÓPEZ, Andrés de: *Matemática de las Operaciones Financieras I* (Unidades Didácticas). Ed. UNED. 3ª Edición. Madrid. 1998.

PABLO LÓPEZ, Andrés de: *Manual Práctico de Matemática Comercial y Financiera*. Volumen I. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. 2ª Edición. Madrid. 2000.

FUENTE SÁNCHEZ, D.: *Manual Práctico de Valoración Financiera*. Ed. CEURA. Madrid. 2002.

GIL PELÁEZ, L.: *Matemática de las Operaciones Financieras.* Ed. AC. Madrid. 1987.

GIL PELÁEZ, L y otros.: *Matemática de las Operaciones Financieras. Problemas Resueltos.* Ed. AC. Madrid. 1991.

GONZÁLEZ CATALÁ, V.T.: *Enfoque Práctico de las Operaciones de la Matemática Financiera.* Ed. Ciencias Sociales. Madrid. 1991.

GONZÁLEZ CATALÁ, V.T.: *Análisis de las Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles.* Ed. Ciencias Sociales. Madrid. 1992.

LEVI, E.: *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Ed. Bosh. Barcelona. 1973.

MENEU FERRER, V. y otros.: *Operaciones Financieras en el Mercado Español.* Ed. Ariel. Barcelona. 1994.

PABLO LÓPEZ, Andrés de.: *Valoración Financiera*. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. 2ª Edición. Madrid. 1998.

RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, A.: *Matemática de la Financiación.* Ed. Universidad de Barcelona. 1994.

RUIZ AMESTOY, J.M.: *Matemática Financiera.* Ed. Centro de Formación del Banco de España. Madrid. 1993

RUIZ AMESTOY, J.M.: *Matemática Comercial.* Ed. Centro de Formación del Banco de España. Madrid. 1992.

Enlaces de interés

En esta página podrá encontrar una relación de sitios y páginas web correspondientes a instituciones, organismos o empresas con algún tipo de relación con los contenidos de la materia desarrollada.

Comisión Nacional del Mercado de Valores

http://www.cnmv.es

Banco de España

http://www.bde.es

Bolsa de Madrid

http://www.bolsamadrid.es

Sociedad de bolsas

http://www.sbolsas.es

Difusores oficiales de bolsa

http://www.agmercados.com

http://www.infobolsa.es

http://www.r4.com

http://invertia.com

Mercado AIAF de renta fija

http://www.aiaf-ecn.com/index.html

Banca electrónica

http://www.bbva.es

http://www.bsch.es

http://www.bancopopular.es

http://www.bankinter.es

http://www.cajamadrid.es

http://www.lacaixa.es

Ministerio de Economía

http://www.mineco.es

Ministerio de Hacienda

http://www.minhac.es

ANEXO:

- Algunas reflexiones teóricas sobre Operaciones financieras a largo plazo
- Alguna propuesta de Exámenes de la materia
- Material de presentación de la materia (solo se realiza a partir del tema 6)
- Referencias y direcciones relacionadas con el autor (RGL)

ANEXO I: Algunas reflexiones teóricas sobre Operaciones financieras a largo plazo

1.- Introducción.
2.- Operaciones de constitución de capital.
3.- Préstamos: planteamiento general.
4.- Amortización de préstamos mediante un solo pago:
- Método simple.
- Método americano.

5.- Amortización de préstamos mediante una renta:
- Método francés.
- Método italiano.
- Método con términos amortizativos en progresión geométrica y aritmética.

6.- Cálculo de los tantos efectivos en los préstamos.
7.- Préstamos con periodos de carencia.
8.- Préstamos a interés variable con un tanto de referencia.
9.- Préstamos con el pago fraccionado de intereses.

OPERACIONES FINANCIERAS A LARGO PLAZO

1. Introducción.

La operación financiera de préstamo consiste en la entrega de un capital por parte del prestamista o acreedor al prestatario o deudor, el cual lo devuelve posteriormente mediante uno o más capitales. Esta operación en el momento de concretarse tiene que verificar el siguiente principio de equivalencia:

Cuantía de la prestación = Cuantía de la contraprestación

Características:

- Las personas que intervienen son: el prestamista o acreedor o persona que presta el capital inicial y el prestatario o deudor o persona que lo devuelve mediante uno o más capitales.
- Los capitales que intervienen son el de la prestación que realiza el acreedor y que está compuesta por un solo capital llamado capital prestado y la contraprestación que son el / los capital/ es que devuelve el deudor y que son denominados términos amortizativos.
- La duración del préstamo es el espacio de tiempo que transcurre desde la entrega del capital inicial por parte del prestamista hasta la entrega del último capital que devuelve el prestatario.

2. Operaciones de constitución de capital.

La devolución del préstamo se puede realizar de dos formas:

- Préstamos que se amortizan en un solo pago (Préstamos elementales o simples). La única problemática que tienen es que calculan la deuda pendiente en un punto intermedio. Para hacer este cálculo hay varios métodos:
  - Método retrospectivo: $Cs = Co\ (1 + i)^{s}$
  - Método prospectivo: $Cs = Co\ (1 + i)^{-n+s}$
  - Método recurrente: $Cs = C_{s-1}\ (1 + i)$

Da igual el método que se use pero el Cs ha de ser igual independientemente del método usado.

- Préstamos que se amortizan en varios pagos. Dentro de este tipo de préstamos tenemos varios métodos para el calculo de los pagos (método americano, francés, italiano, etc). Estos pagos se realizan durante el periodo (a_s), han de ser una cantidad suficiente para pagar el préstamo y abonar los intereses que se generan en cada uno de los periodos.

3. Préstamos: planteamiento general.

El cuadro de amortización es una tabla de doble entrada en la que cada fila representa un periodo de maduración y cada columna recoge los valores que van tomando cada una de las variables de la operación de amortización del préstamo. En dicho cuadro se recoge de forma clara y concisa el valor que toman las principales magnitudes en los diversos vencimientos de la operación.

NOMENCLATURA:

- Co: capital prestado en el origen de la operación financiera.
- t_s: instante de tiempo donde finaliza el periodo s.
- a_s: término amortizativo del periodo s. Capitales financieros que forman la contraprestación y cuyo vencimiento tiene lugar, normalmente, al final de los periodos.
$$a_s = A_s + I_s$$
- i: tanto de capitalización. Es el tipo de interés aplicable a cada periodo de maduración. Si el préstamo se amortiza por emésimos de año debemos usar el i_m correspondiente.
- I_s: intereses generados en el periodo s. Estos intereses serán el resultado de multiplicar el capital pendiente en el periodo anterior C_{s-1}, por el rédito del periodo.
$$I_s = C_{s-1}\ i$$

- A_s: cuota de amortización del periodo s. Será la diferencia entre el término amortizativo del periodo y los intereses generados en el periodo.

$$A_s = a_s - I_s$$

- C_s: capital pendiente de amortizar hasta el periodo s.

$$C_s = C_{s-1} - A_s$$

- M_s: capital amortizado hasta el periodo s.

$$M_s = Co - C_s$$

CUADRO DE AMORTIZACIÓN:

CUADRO GENERICO DE AMORTIZACIÓN DE UN PRESTAMO				
N	Termino amortizativo	Cuota de		Capital pendiente
		interés	amortización	
0				Co
1	a_1	$I_1 = Co\ i$	$A_1 = a_1 - I_1$	$C_1 = Co - A_1$
2	a_2	$I_2 = Co\ i$	$A_2 = a_2 - I_2$	$C_2 = C_1 - A_2$
...	…	…	…	…
S	a_s	$I_s = Co\ i$	$A_s = a_s - I_s$	$Cs = C_{s-1} - A_s$
...	…	…	…	…
n-1	a_{n-1}	$I_{n-1} = Co\ i$	$A_{n-1} = a_{n-1} - I_{n-1}$	$C_{n-1}=C_{n-2} - A_{n-1}$
N	a_n	$I_n = Co\ i$	$A_n = a_n - I_n$	$C_n=C_{n-1}-A_n= 0$

4. Amortización de préstamos mediante un solo pago.

METODO SIMPLE

El préstamo simple es, como su nombre indica, una operación financiera simple, lo cual implica que tanto la prestación como la contraprestación están constituidas por un solo capital. Por tanto la contraprestación está compuesta por un solo capital que denominaremos Cn y que constara de la devolución del capital prestado y de los intereses acumulados. Por ello, la contraprestación será:

- $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 0$
- $a_n = Cn$

La ecuación de equivalencia financiera, en el final de la operación, hace que el valor de Cn sea:

$$Cn = Co\ (1 + i)^n$$

Para el cálculo del capital pendiente de amortizar, en cualquier instante s, si pueden usar los tres métodos conocidos:

- Método prospectivo:
$$Cs = Cn\ (1 + i)^{-n+s}$$

- Método retrospectivo:
$$Cs = Co\ (1 + i)^{s}$$

- Método recurrente:
$$Cs = C_{s-1}\ (1 + i)$$

El cuadro de amortización será del siguiente modo:

CUADRO DE AMORTIZACIÓN PRESTAMO SIMPLE				
n	Termino amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Capital pendiente
0				**Co**
1	0	Co i	- Co i	$C_1 = Co\ (1 + i)$
2	0	C_1 i	- C_1 i	$C_2=Co\ (1 + i)^2$
...	…	…	…	…
s	0	C_{s-1} i	- C_{s-1} i	$C_s=Co\ (1 + i)^s$
...	…	…	…	…
n-1	0	C_{n-2} i	- C_{n-2} i	$C_{n-1}=C_0(1+i)^{n-1}$
n	0	**C_{n-1} i**	**- C_{n-1} i**	0

CANCELACIÓN ANTICIPADA.

Si el prestatario quisiera cancelar el préstamo al conclusión del año W (siendo anterior al momento de plazo el reembolso t). La suma que en dicho momento adeuda por razón del contrato sería Cw= Co $(1+i))^{w}$, y aparentemente esta sería la suma exigible por el prestamista para dar el préstamo por cancelado. Ahora bien pudiendo ocurrir que en el año W el tipo de interés vigente en el mercado de capitales para los préstamos fuese el mismo o distinto del tipo de interés al que se concertó el préstamo. Llamando i' al tipo de interés vigente en el momento W puede ocurrir que i' sea igual, mayo o menor que i.

$$C_w = C_o\ (1 + i)^{w}$$

POSIBILIDADES:

Si i' es igual a i; tanto el prestamista como al prestatario le será indiferentes el cancelar el contrato.

Si i' es mayor que i; el prestatario, no tendrá interés en cancelar el préstamo anticipadamente ya que la suma que fuese a destinar para devolver el préstamo la puede invertir al tanto i' y lucrarse con la diferencia de intereses . El prestamista si estaría de acuerdo en cancelar el préstamo anticipadamente para invertir a un tipo de interés más elevado.

Si i' es menor que i, el prestatario estará dispuesto a cancelar el préstamo anticipadamente ya que podrá concertar otro préstamo y pagar menos intereses. El prestamista si acepta la cancelación anticipa percibirá a la conclusión de año W, la cuantía $Cw= Co(1+i)^w$; podrá invertirlo durante el tiempo restante (t-w), al nuevo tipo de interés i', en cuyo caso al finalizar el año t obtendrá la suma $Co(1+i)^w+(1+i)^t$, que será menor que la que hubiese percibido de no haber cancelado anticipadamente el préstamo, o sea, $Co(1+i)^t$.

Si i´ es mayor que i; el prestatario no tendrá interés en cancelar el préstamo anticipadamente ya que la misma que fuese a destinar para devolver un préstamo la puede invertir al tanto i´ y quedarse con la diferencia de intereses el prestamista si estaría de acuerdo en cancelar un préstamo anticipadamente para invertir a un tipo de interés más elevado.

El prestamista si aceptada la cancelación anticipada percibirá a la conclusión del año de la cuantía.

$$C_w = C_{o\,(1+i)}{}^w$$

La cuál podría invertir al tiempo restante (t – w) al mismo tipo de interés i´, en cuyo caso al final del año t obtendrá la suma

$$C_o\,(1 + i)^w\,(1 + i)^{t-w}$$

Que será menor de lo que hubiese percibido de no haber cancelado anticipadamente un préstamo.

$$C_t = C_o\,(1 + i)^t$$

El prestamista sólo aceptará la cancelación anticipada si el prestatario le ofreciese una cuantía tal (A), que colocada, al nuevo tipo de interés i', durante el tiempo que media entre la cancelación anticipada y el vencimiento del contrato (t-w), le diese la misma cuantía que si no se hubiese producido dicha cancelación anticipada, luego ha de cumplirse:

$$A(1+i')^{t-w} = Co\,(1+ i)^t$$

METODO AMERICANO

El método americano se caracteriza por que durante la vida del préstamo no se amortiza capital hasta el final del mismo, en que se devuelve todo el capital en un solo pago, abonando periódicamente sólo los intereses que se van generando. Así, la contraprestación será:

- $A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = 0$
- $A_n = Co$

La ecuación de equivalencia financiera establecida en el origen será:

$$Co = \mathbf{A}\,(Co\ i)_{n,\,i} + Co\,(1+i)^{-n}$$

El capital pendiente de amortizar en cualquier momento "s", es siempre igual a Co, ya que la amortización es nula en todos los periodos.

$$Cs = C_1 = C_2 = ... = C_{n-1} = Co$$

El cuadro de amortización será de la siguiente forma:

CUADRO DE AMORTIZACIÓN PRESTAMO AMERICANO				
n	Termino amortizativo	Cuota de		Capital pendiente
		interés	amortización	
0				Co
1	Co i	Co i	0	Co
2	Co i	Co i	0	Co
...	…	…	…	…
s	Co i	Co i	0	Co
...	…	…	…	…
n-1	Co i	Co i	0	Co
n	Co + Co i	Co i	Co	0

CANCELACIÓN ANTICIPADA.

Si el prestatario una vez pagado los interese correspondiente al año W quisiese cancelar totalmente la deuda, es decir, devolver la cuantía Co, el prestamista dejaría de percibir de forma anual los intereses, es decir, Co·i, y si el tipo de interés vigente en el mercado en este momento i'. Es menor que i; a partir de este momento el prestamista podría invertir el capital al nuevo tipo de intereses, percibiendo anualmente la cuantía i'Co; Co·i' < Co·i; luego experimentará una pérdida anual por la diferencia entre ambas iCo-i'Co = Co(i-i') = pérdida anual.

Para admitir la cancelación anticipada el prestamista exigirá una cuantía tal, que no le suponga ninguna pérdida, es decir, exigirá la cuantía de pérdida anual Co (i-i'), durante los t-w años restante, valorado en el momento de la cancelación anticipada, es decir, será el valor actual de una renta de t-w términos al tanto i' de termino Co (i-i').

$$Co(i-i') \cdot A_{t-w}\ i' + Co = A$$

Luego el capital a reembolsar anticipadamente sería:

$$A = C_0 + C_0\,(i - i')\,A_{t-w}\ i'$$

REEMBOLSO PARCIAL.

Si a la conclusión del año W se reembolsa R unidades monetaria, los interés anuales ya no serán producido por todo el capital, si no por la cuantía restante (B) $\longrightarrow$ B · i

La unidades monetaria reembolsadas R, podrá colocarla al nuevo tipo de interés i' durante el tiempo restante t-W, luego al finalizar el préstamo se habrán convertido en $R\,(1+i')^{t-w}$.

Al finalizar el año t la valoración en ese momento de los capitales contando desde el momento del reembolso parcial será, por un lado el saldo pendiente, por otro lado la cuantía que pago valorada al final, por otro lado, los interese, que será el valor de los intereses anuales producidos a partir de año W, será el valor final de una renta de t-w términos de término, Bi al tanto i'.

Luego para estar de acuerdo con el reembolso parcial:

$$B + R\,(1+i')^{t-w} = Bi\ S_{t-w}\ i'$$

De donde despejando obtenemos que B es igual

$$B = \frac{Co - R\ (1+i')\ t\text{-}w}{1 + i \cdot S_{t-w}\ i'}$$

Y este será el saldo pendiente de amortizar en el momento w que será el mismo que el prestatario deberá rembolsar en el momento t, puesto que cada año tendrá que pagar los intereses correspondiente a dicho capital.

El valor de los intereses anuales producidos a partir del año w, será el valor final de una renta de t – w términos de término B · i al tanto i´.

Si llegado el año w no se hubiese producido reembolso parcial, el prestamista hubiese percibido de forma anual los intereses $C_o \cdot i$ durante los t – w años restantes valorados en el momento t nos vendrá dado por:

$$C_o \cdot i \cdot S_{\overline{t-w|}\, i'}$$

Luego para estar de acuerdo con el reembolso parcial habrá que cumplirse que:

$$B + R\,(1 + i')^{t-w} + Bi\, S_{\overline{t-w|}\, i'} = C_o + C_o\, i\, S_{\overline{t-w|}\, i'}$$

$$B\,(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'}) + R\,(1+ i')^{t-w} = C_o\,(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'})$$

$$B = \frac{C_0 - R\,(1 + i')^{t-w}}{1 + i \cdot S_{\overline{t-w|}\, i'}}$$

Eso será el saldo pendiente de amortizar en momento w, que será el mismo que el prestatario deberá reembolsar en el momento t, puesto que cada año tendrá que pagar un interés correspondiente a dicho capital.

$$B + B \cdot i\, S_{\overline{t-w|}\, i'} + R\,(1 + i')^{t-w} = C_o + C_o \cdot i\, S_{\overline{t-w|}\, i'}$$

$$B\,(1 + S_{\overline{t-w|}\, i'}) + R\,(1 + i')^{t-w} = C_o\,(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'})$$

$$B\,(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'}) = C_o\,(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'}) - R\,(1 + i')^{t-w}$$

$$B = \frac{C_o\,(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'}) - R\,(1 + i')^{t-w}}{(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'})}$$

$$B = \frac{C_o\,(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'})}{(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'})} - \frac{R\,(1 + i')^{t-w}}{(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'})}$$

$$B = C_o - \frac{R\,(1 + i')^{t-w}}{(1 + i\, S_{\overline{t-w|}\, i'})}$$

5. Amortización de préstamos mediante una renta

METODO FRANCÉS

Este método se caracteriza por el mantenimiento constante del tipo de interés y de las anualidades.

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a$$

La anualidad se calcula a partir de la expresión:

$$a = (Co) / (\mathbf{a}_{n,i})$$

La ecuación de equivalencia financiera que regula la vida del préstamo es:

- En el origen:

$$Co = A(a)_{n,i}$$

- En el final:

$$Co\ (1 + i)^n = S(a)_{n,i}$$

Para el cálculo de la deuda pendiente, se usará de nuevo los tres métodos conocidos:

- Método prospectivo:

$$Cs = a\ \mathbf{a}_{n-s,i}$$

- Método retrospectivo:

$$Cs = Co\ (1 + I)^s - a\ \mathbf{S}_{s,i}$$

- Método recurrente:

$$Cs = C_{s-1}\ (1 + i) - a$$

A partir del método recurrente, podemos hallar el capital amortizado:

$$C_s = C_{s-1}\,(1 + i) - a$$

$$C_{s+1} = C_s\,(1 + i) - a$$

$$A_{s+1} = A_s\,(1 + i) \longrightarrow A_s = A_1\,(1 + i)^{s-1}$$

El cuadro de amortización es el siguiente:

CUADRO DE AMORTIZACIÓN PRESTAMO FRANCÉS				
n	Termino amortizativo	Cuota de		Capital pendiente
		interés	amortización	
0				Co
1	a	Co i	a - Co i	Co- A_1
2	a	C_1 i	a - C_1 i	C_1- A_2
…	…	…	…	…
s	a	C_{s-1} i	a - C_{s-1} i	C_{s-1}- A_s
...	…	…	…	…
n-1	a	C_{n-2} i	a - C_{n-2} i	C_{n-2}- A_{n-1}
n	a	C_{n-1} i	a - C_{n-1} i	0

METODO ITALIANO

El método italiano se caracteriza porque sus cuotas de amortización son constantes.

$$A_1 = A_2 = ... = A_n = A$$

Como consecuencia de esta igualdad la suma aritmética de las cuotas de amortización debe ser igual al capital prestado:

$$Co = A_1 + A_2 + ... + A_n$$

Dado que todas las cuotas son iguales:

$$Co = n\ A$$

Por lo que:

$$A = (Co) / n$$

El capital pendiente de amortizar se calcualará a partir de la expresión:

$$Cs = (n-s)\ A = n\ A - s\ A = Co - s\ A$$

El cuadro de amortización será de la siguiente forma:

CUADRO DE AMORTIZACIÓN PRESTAMO ITALIANO				
n	Termino amortizativo	Cuota de		Capital pendiente
		interés	amortización	
0				**Co**
1	**A + Co i**	Co i	**A**	C_1 = Co- A
2	A + C_1 i	C_1 i	A	C_2 = Co- 2A
...	…	…	…	…
s	A + C_{s-1} i	C_{s-1} i	A	Cs = Co - s A
...		…	…	…
n-1	A + C_{n-2} i	C_{n-2} i	A	C_{n-1}=C_o-(n-1)A
n	A + C_{n-1} i	C_{n-1} i	A	0

METODO MEDIANTE TERMINOS AMORTIZATIVOS EN PROGRESION ARITMETICA

Este método tiene la característica de que además de que los términos amortizativos constituyen una rento, ésta es en progresión aritmética.

La ecuación de equivalencia financiera será:

- En el origen:

$$Co = A(a_1;d)_{n,i}$$

- En el final:

$$Co\,(1+i)^n = S(a_1;d)_{n,i}$$

De donde deducimos:

$$a_1 = ((i\,Co + d\,n)/(i\,a_{n,I}) - (d/i) - d\,n$$

A partir de los tres métodos conocidos hallaremos los capitales pendiente de amortizar:

- Método prospectivo:

$$Cs = A(a_1 + s\,d;\,d)_{n-s,i}$$

- Método retrospectivo:

$$Cs = Co\,(1+i)^s - S(a_1;d)_{s,i}$$

- Método recurrente:

$$Cs = C_{s-1}\,(1+i) - (a_1 + (s-1)\,d)$$

El cuadro de amortización será el siguiente:

CUADRO DE AMORTIZACIÓN PRESTAMO EN PROGRESIÓN ARITMETICA

n	Termino amortizativo	Cuota de interés	Cuota de Amortización	Capital pendiente
0				Co
1	a_1	Co i	a_1- Co I	C_1 = Co- A_1
2	A_1 + d	C_1 i	a_2- C_1 I	$C_2 = C_1$- A_2
...	…	…	…	…
s	a_1 + (s-1) d	C_{s-1} i	a_s- C_{s-1} I	$Cs = C_{s-1}$- A_s
...	…	…	…	…
n-1	a_1 + (n-2) d	C_{n-2} i	a_{n-1}- C_{n-2} I	$C_{n-1}=C_{n-2}$- A_{n-1}
n	a_1 + (n-1) d	C_{n-1} i	a_n- C_{n-1} I	0

METODO MEDIANTE TERMINOS AMORTIZATIVOS EN PROGRESION GEOMÉTRICA

El método mediante términos amortizativos en progresión geométrica tiene la característica de que los términos amortizativos que forman la contraprestación configuran una renta en progresión geométrica.

La ecuación de equivalencia financiera será:

- En el origen:

$$Co = \mathrm{A}(a_1;q)_{n,i}$$

- En el final:

$$Co\ (1 + i)^n = \mathrm{S}(a_1;q)_{n,i}$$

Para el cálculo de la anualidad se usará la siguiente expresión:

$$a = Co\ /\ \mathrm{A}(1;q)_{n,i}$$

El capital pendiente de amortización, se podrá hacer a través de:

- Método prospectivo:

$$Cs = \mathrm{A}(a_1\ q^s;\ q)_{n-s,i}$$

- Método retrospectivo:

$$Cs = Co\ (1 + i)^s - \mathrm{S}(a_1;q)_{s,i}$$

- Método recurrente:

$$Cs = C_{s-1}\ (1 + i) - a_1\ q^{s-1}$$

El cuadro de amortización será similar al del préstamo en progresión aritmética, tan solo será diferente la columna de los términos amortizativos, será como sigue:

CUADRO DE AMORTIZACIÓN PRESTAMO EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

N	Termino amortizativo	Cuota de interés	Cuota de Amortización	Capital pendiente
0				Co
1	a_1	Co i	a_1- Co I	C_1 = Co- A_1
2	a_1 q	C_1 i	a_2- C_1 I	$C_2 = C_1 - A_2$
...	…	…	…	…
S	$a_1 q^{s-1}$	C_{s-1} i	a_s- C_{s-1} I	$Cs = C_{s-1} - A_s$
...	…	…	…	…
n-1	$a_1 q^{n-2}$	C_{n-2} i	a_{n-1}- C_{n-2} I	$C_{n-1}=C_{n-2}- A_{n-1}$
N	$a_1 q^{n-1}$	C_{n-1} i	a_n- C_{n-1} I	0

6. Cálculo de los tantos efectivos en los préstamos.

En la práctica financiera diaria, las amortizaciones de capital vienen acompañadas de una serie de gastos y/o ingresos que modifican la equivalencia de la operación financiera.

La contratación de una operación financiera se realiza tras el análisis y comparación de varias alternativas de financiación. Para realizar dichas comparaciones necesitamos un criterio de comparación que permita llevar a cabo la elección. Dicho criterio será el coste efectivo de un préstamo.

Para establecer estos criterios tendremos que distinguir, previamente, entre la operación financiera pura, es decir, la operación financiera sin tener en cuenta ningún gasto adicional y la operación financiera real, en las que se incluyen los gastos inherentes a la operación.

En la contratación de operaciones financieras, existen una serie de características complementarias a lo que constituyen el intercambio financiero que implican que la prestación y/o la contraprestación se modifiquen. Estas características llamadas comerciales se clasifican en unilaterales y recíprocas o bilaterales.

La existencia de las características comerciales tiene su justificación por el riesgo que supone para la entidad crediticia que concede el préstamo y por los gastos originados por la propia concesión del préstamo, que suelen cobrarse separadamente.

CARACTERISTICAS COMERCIALES

En las operaciones financieras, en la práctica cotidiana, surgen ciertas características complementarias o adicionales a la operación en sí, que modifican sustancialmente el conjunto de capitales a entregar o recibir, alterando el equilibrio de la operación, dado por la ecuación:

Prestación ⇔ Contraprestación

A estas condiciones o características complementarias se las denomina características comerciales y al conjunto de capitales de la prestación y de la contraprestación una vez incorporadas dichas características se las denomina prestación real y contraprestación real.

Hablaremos de operaciones pura como aquella en la que no se consideran las características complementarias, esto prácticamente sólo ocurre en la teoría, y operación con características comerciales cuando éstas de incorporan a la operación.

Las características comerciales se pueden clasificar en dos grupos:

- Características bilaterales o recíprocas.
- Características unilaterales.

Características comerciales bilaterales

Son aquellas que afectan por igual tanto al sujeto de la prestación como al de la contraprestación. Así pues, si el sujeto de la prestación tiene un gasto inicial, este repercutirá directamente sobre el sujeto de la contraprestación. Esto es, la prestación real entrega por el prestamista coincide con la recibida por el prestatario u viceversa.

Por tanto, a mayores gastos para el sujeto de la prestación, mayores ingresos para el de la contraprestación. Se puede decir que es un juego de suma nula: todo lo que el primero gana lo pierde el segundo.

Entre las características comerciales bilaterales se pueden destacar las que modifican la cuantía de los capitales como bonificaciones, primeras, lotes, recargos, etc.

Características comerciales unilaterales

Estas características afectan a uno de los dos sujetos que intervienen en la operación modificando las cuantías o vencimientos. Estos gastos complementarios o suplidos surgen generalmente por la aparición de una tercera persona en la operación, ajena, en un principio, ésta (por ejemplo: gastos notariales, impuestos surgido de la operación, etc.).

Dado que el aumento de pagos que realiza un sujeto no se traduce en un incremento de cuantía a recibir por el segundo sujeto, surge la necesidad de distinguir entre prestación real y contraprestación real tanto para el prestamista (acreedor) como para el prestatario (deudor).

Entre los gastos suplidos, los más habituales son:

- Gastos iniciales, o gastos que surgen en el momento en el que se pacta la operación, o sea, en le origen. Así pues, están los impuestos por transmisiones patrimoniales y actos jurídicos documentados (timbre), gastos notariales, gastos administrativos, etc. Por G^a_i y G^d_i representamos los gastos iniciales del acreedor y deudor, representativamente.
- Gastos intermedios o periodos, que son los que aparecen durante la operación como, por ejemplo, gastos de administración, correo, etc. Éstos los representaremos por G^a_{Pj} y G^d_{Pj}, según sean a cargo del acreedor o del deudor en el momento t_j.

Cuando se habla del TAE nos estamos refiriendo al parámetro indicativo del coste de las operaciones financieras calculado según las normas que el Banco de España establece para las entidades de crédito.

Dichas normas vienen recogidas en la circular número 8/1990:

"Los tipos de interés, costes o rendimientos efectivo, de las operaciones financieras se expresarán en tasas porcentuales anuales pagaderas a término vencido equivalentes. La tasa porcentual equivalente es aquella que iguala en cualquier fecha el valor actual de los efectivos recibidos y entregados a lo largo de la operación, por todos los conceptos, incluido el saldo remanente a su término". La fórmula sería:

$$\sum D_n (1 + i_k)^{-tn} = \sum R_m (1 + i_k)^{-tm}$$

D: disposiciones o prestaciones

R: reembolsos o contraprestaciones

n: número de entregas

m: número de reembolsos

t_n: tiempo transcurrido desde la fecha de referencia hasta la de disposición n

t_m: tiempo transcurrido desde la fecha de referencia hasta la de reembolso m

i_k: tanto por uno efectivo referido al periodo de tiempo elegido para expresar los tn y los tm en números enteros de donde se deduce que el tipo anual equivalente i(TAE) de una operación financiera pura vendría dado por:

$$i = (1 + i_m)^m - 1$$

m: es el número de veces que el año contiene al periodo elegido.

COSTE EFECTIVO

Podemos definir el tanto efectivo del prestatario o coste real como al rédito anual o tanto efectivo de la ley de capitalización compuesta que verifica la equivalencia financiera entre la prestación real y la contraprestación real del prestatario:

$$Co - G^d{}_i = (a_s + G_p{}^d)\,(1 + i)^{-s} + G^d{}_f\,(1 + i)^{-n}$$

Co: es la cuantía del préstamo

$G^d{}_i$: son los gastos iniciales a cargo del prestatario o deudor

A_s: es el término amortizativo del préstamo

$G_d{}^p$: son los gastos periódicos a cargo del prestatario o deudor

$G^d{}_f$: son los gastos finales a cargo del prestarario o deudor

Con la ecuación planteada se incluyen la totalidad de los gastos, así obtendremos el TAE real que será el i que cumpla la equivalencia financiera en el momento t_0.

RENTABILIDAD EFECTIVA.

Análogamente, se podría calcular el tanto efectivo del prestamista o rendimiento real, como el rédito anual o tanto efectivo de la ley de capitalización compuesta que verifica la equivalenci financiera entre la prestación real y la contraprestación real del prestatario:

$$Co - G^a{}_i = (a_s + G_p{}^a)\,(1 + i)^{-s} + G^a{}_f\,(1 + i)^{-n}$$

7. Préstamos con periodos de carencia.

La carencia en un préstamo es el periodo en el que el prestatario deja de pagar, bien el término amortizativo (carencia total), o bien la cuota de amortización del préstamo, abonando sólo los intereses generados (carencia de amortización).

CARENCIA TOTAL

Consiste en un periodo en el cual el prestatario no realiza ningún pago al prestamista. Durante el periodo de carencia total la deuda va creciendo en el montante de los intereses generados y no abonados.

El capital pendiente de amortizar donde se termina el periodo de carencia (Cp) será:

$$Cp = Co\ (1 + i)^{p}$$

La ecuación de equivalencia financiera se podrá plantear:

- En el origen:

$$Co = (1 + i)^{-p}\ A\ (a)_{n,i}$$

- En el momento p:

$$Cp = Co\ (1 + i)^{p} = A(a)_{n,I}$$

CARENCIA DE AMORTIZACIÓN

Consiste en un periodo de tiempo en el que el prestatario sólo abona los intereses generados pero no amortiza capital. La deuda durante el periodo de amortización permanecerá constante.

La ecuación de equivalencia financiera, al igual que en la carencia total la podremos plantear:

- En el origen:

$$Co = A(I)_{p,I} + (1 + i)^{-p}\ A\ (a)_{n,i}$$

- En el instante p:

$$Co = A\,(a)_{n,i}$$

8. Préstamos a interés variable con un tanto de referencia.

Consisten en aplicar un tipo de interés que resulta de la suma de un tipo de referencia (EURIBOR es el más usado) más un diferencial que no suele superar el 2%. El tipo de interés aplicable se suele revisar con una frecuencia semestral o anual.

Esta modalidad de préstamos han pasado a ser la que la inmensa mayoría de los préstamos se contratan.

A excepción del periodo hasta la primera revisión, el prestatario desconoce a priori cuáles van a ser los capitales que debe devolver como contraprestación, puesto que se desconoce el tipo de interés aplicable en cada periodo. Por lo que se asume el riesgo de interés que todo operación financiera lleva implícita. Con este tipo de préstamos los bancos han trasladado a los prestatarios el riesgo de que al subir el tipo del mercado las anualidades que deban desembolsar se incrementen.

Los cuadro de amortización que se calculen son provisionales hasta la siguiente revisión.

Tras cada revisión del tipo de interés se debe plantear un nuevo préstamo, en el que el capital prestado será el pendiente en ese instante, el número de periodos serán los restantes hasta el final del préstamo y al nuevo tipo de interés.

9. Préstamos con el pago fraccionado de intereses.

Esta modalidad de prestamos se da cuando las cuotas de intereses se van a pagar con mayor frecuencia que las cuotas de amortización. Lo más usual es que los intereses se abonen en periodos inferiores al año y la amortización del capital anualmente.

Si partimos de un préstamo francés, en que la amortización se paga anualmente mientras que la cuota de interés se descompone en m pagos a lo largo del año, para calcular los distintos pagos del préstamo tendremos que plantear el préstamos francés original, dado que las cuotas de amortización seguirán siendo las mismas.

$$A_s = A_1\,(1+i)^s$$

Después, se calcula el tipo de interés por emésimos de año equivalente al tanto anual.

$$i_m = (1+i)^{1/m} - 1$$

Por ultimo se calculará las m cuotas de interés:

$$I^m{}_s = C_{s-1}\, i_m$$

ANEXO II: PROPUESTA DE EJERCICIOS DE EXÁMEN

.- Hace 5 años el Sr. Gómez solicitó un préstamo de 200.000 euros a la entidad financiera Boncaja. Dicho préstamo debía ser reembolsado en 14 años mediante cuotas constantes trimestrales a un tipo de interés nominal capitalizable trimestralmente del 7%. Por motivos personales, no podrá hacer frente a los pagos trimestrales correspondientes al sexto año. Calcule:

a) Cuantía de cada uno de los pagos trimestrales realizados durante los cinco primeros años.

$$i_4 = \frac{7\%}{4} = 1{,}75\%$$

$200.000 = C \cdot a_{60}1{,}75\%$ $\boxed{C = 5{,}410{,}672037}$

b) Capital pendiente de amortización al principio del sexto año.

$S_{20} = C \cdot a_{40}1{,}75\% = 5.410{,}672037 \cdot 28{,}594229 = \boxed{154.713{,}9953\ €}$

c) Capital pendiente de amortización al principio del séptimo año.

$S_{24} = S_{20} \cdot (1 + i_4)^4 = 154.713{,}9953 \cdot (1 + 0{,}0175)^4 = 154.713{,}9953 \cdot 1{,}071859 = \boxed{165.831{,}5883\ €}$

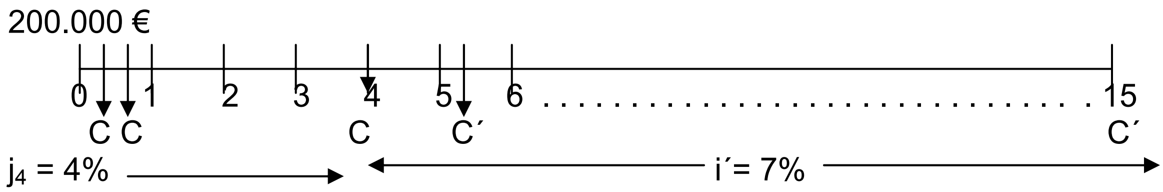
d) El importe de las trimestralidades que tendrá que pagar a partir del próximo año para amortizar el préstamo al tipo de interés y en el tiempo inicialmente previsto.

$S_{24} = C' \cdot a_{36}1{,}75\%$ $165.831{,}5883 = C' \cdot 26{,}542753$

$\boxed{C' = 6.247{,}716215}$

.- La Sra. Pantoja solicitó hace 4 años un préstamo de 200.000 euros al banco El Rocío para abrir un restaurante en Marbella. Dicho préstamo debía ser reembolsado en 15 años mediante cuotas constantes trimestrales a un tipo de interés nominal del 4%. Tras anular las galas previstas para este verano por motivos personales, no podrá hacer frente a los pagos trimestrales de este año. Ante este imprevisto acuerda con el banco no pagar las próximas cuatro trimestralidades a cambio de pagar durante ese periodo un interés efectivo del 7% por el capital pendiente de amortizar. Calcule:

a) Cuantía de los pagos trimestrales realizados durante los cuatro primeros años.



200.000 = C · $a_{4x15}i_4$

$$C = \frac{200.000}{a_{60}1\%} = \frac{200.000}{44,955038} = 4.448,889577€/trim$$

i_4 = 1% $\boxed{\text{4.448,889577 €/trim}}$

b) Capital pendiente de amortización al principio del quinto año.

S_4 = C · $a_{4x11}i_4$ = 4.448,889577 · 35,455453 = $\boxed{\text{157.737,3953 €}}$

c) Capital pendiente de amortización al principio del sexto año.

$S_5 = S_4$ · (1 + i´) = 157.737,3953 · (1 + 0,07) = $\boxed{\text{168.779,013 €}}$

d) El importe de las trimestralidades que tendrá que pagar en el sexto año para amortizar el préstamo al tipo de interés y en el tiempo inicialmente previsto.

168.779,013 = C´· $a_{4x10}i_4$

$$C' = \frac{168.779,013}{a_{40}1\%} = \frac{168,779013}{32,834686} = 5.140,265785€/trim$$

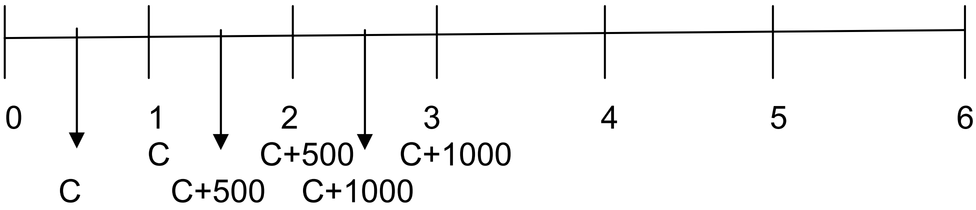
$\boxed{\text{5.140,265785 €/trim}}$

(1,5 puntos)

.- Se quiere amortizar un préstamo de 90.000 euros mediante pagos semestrales en 6 años y al 5% nominal capitalizable semestralmente. Las semestralidades, que serán constantes durante cada año, se incrementan anualmente en 500 euros. Se pide:

a) Importe de la primera semestralidad.

90.000 €



$j_2 = 5\%$
$i_2 = 2,5\%$
$i = 5,0625\%$

$$90.000 = C \cdot a_2 i_2 \cdot (1+i) \cdot a_6 i + \frac{500 \cdot a_2 i_2 \cdot (1+i)}{i} \cdot a_6 i - \frac{6.500 \cdot a_2 i_2 \cdot (1+i)}{i} \cdot (1+i)^{-6}$$

$90.000 = C \cdot 1,927424 \cdot 1,050625 \cdot 5,065562 + 20.000 \cdot 5,065562 - 120.000 \cdot (1,050625)^{-6}$

$\boxed{C = 7.595,756695 \text{ €/sem}}$

b) Cuota de amortización del segundo semestre.

1º semestre
- $I = 90.000 \cdot 0,025 = 2.250$
- $A = C - I = 5.345,756695$

2º semestre
- $I = (90.000 - 5.345,756695) \cdot 0,025 = 2.116,356083$
- $A = C - I = \boxed{5.479,400612}$

c) Cuota de amortización del tercer semestre.

3º semestre
- $I = (90.000 - 5.345,756695 - 5.479,400612) \cdot 0,025 =$
  $= 1.979,371067$
- $A = C - I = 5.616,385628$

$\boxed{6.116,3856}$

.- Se quiere amortizar un préstamo de 100.000 € en 10 años mediante el sistema progresivo con anualidades constantes. Se pide:

a) Construir el cuadro de amortización para los 2 primeros años.
b) Deuda a finales del año 8.
c) ¿ Cuál sería la deuda a finales del año 8 si la modalidad de amortización hubiese sido con términos variables en progresión geométrica creciente en un 5% anual?

a)

Año	C	I	∝
1	13.586,80	6.000	7.586,8
2	13.586,80	5.544,732	8.042,008

b) $100.000 = \propto \cdot a_{2|6\%} \Rightarrow \propto = 13.583,80$

$$D_8 = 13.583,80 \cdot a_{2|6\%} = 24.909,94$$

c) $100.000 = c_1 \cdot \dfrac{1-1,05^{10}\cdot(1,06)^{-10}}{1,06-1,05} \Rightarrow c_1 = 11.057,81878$

$$c_9 = c_1 \cdot q^8 \Rightarrow c_9 = 11.057,81878 \cdot 1,05^8 = 16.337,434$$

$$D_8 = 16.337,434 \cdot \frac{1-1,05^2\cdot 1,06^{-2}}{1,06-1,05} = 30.679,94$$

.- Se emite un empréstito formado por 60.000 títulos de nominal 1.000 € cada uno, para ser amortizado en 15 años. Determine:

a) Anualidad del sexto año, considerando que se amortiza el mismo número de títulos todos los años.
b) Nº de títulos que se amortizarían en el año 8 si el empréstito se amortizara con anualidades constantes.

a) $A_k = \dfrac{60.000}{15} = 4.000$

$$c_6 = 60 \cdot \left(\frac{60.000 - 5\cdot 4000}{40.000}\right) + 4000 \cdot 1000 = 6.400.000$$

b) $c = \dfrac{60.000 \cdot 1000}{a_{15|6\%}} = 6.177.765,84$

$$N_1 = \frac{6.177.765,84 - 3.600.000}{1000} = 2.577,77$$

$$N_8 = N_1 \cdot (1,06)^7 = 3.876,01$$

.- Se contrata un préstamo en las siguientes condiciones:

- Nominal: 100.000 €
- Amortización mediante semestralidades constantes al 5% de interés efectivo anual y en 10 años.
- Comisiones: apertura = 1% sobre el nominal ; Estudio = 250€
- Gastos iniciales de notaria =500€
- Comisión por cancelación anticipada: 1 %

Determine:

a) Cuantía de la semestralidad que amortiza el préstamo.
b) Deuda pendiente pasados 3 años desde el momento de la contratación .
c) Si usted considera que los pagos semestrales son muy altos, ¿cuánto dinero debería entregar a finales del quinto año (adicional al pago de ese período) para reducir la cuantía semestral de los últimos 5 años en 500 €?
d) Coste efectivo de la operación conjunta.

$c_0 = 100.000 \qquad n = 10 \qquad i = 5\% \Rightarrow i_2 = 2{,}4695077\%$

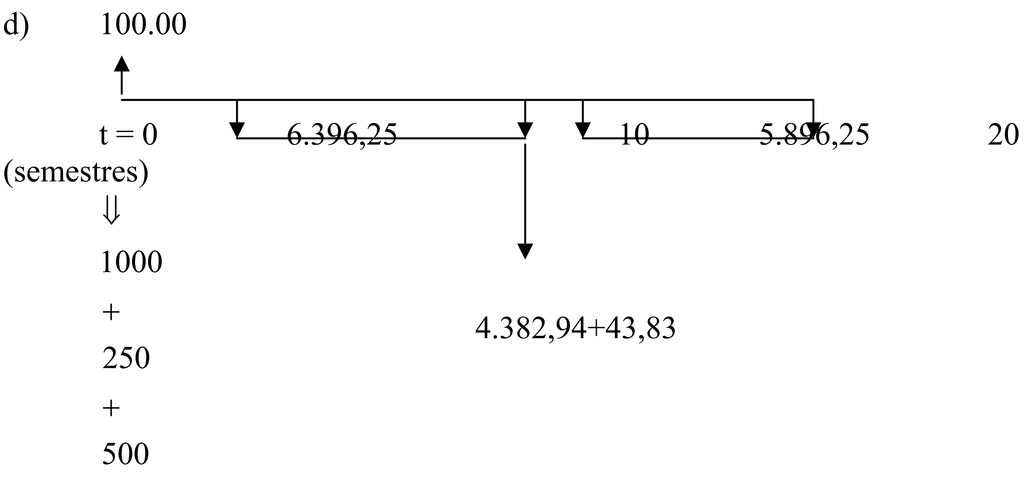
a) $100.000 = \propto \cdot a_{20|i_2} \Rightarrow \propto = 6.396{,}25$

b) $D_6 = 6.396{,}25 \cdot a_{14|i_2} = 74.936{,}17$

c) $D_{10} = 6.396{,}25 \cdot a_{10|i_2} = 56.068{,}70$

$56.068{,}70 - c = 5.896{,}25 \cdot a_{10|i_{12}} = 51.685{,}76 \Rightarrow c = 4.382{,}94$

d)



$$100.000 - 1000 - 250 - 500 = 6.396{,}25 \cdot a_{10|ie_2} + 4.382{,}64 \cdot (1+ie_2)^{-10} + 43{,}83 \cdot (1+ie_2)^{-10} + $$
$$+ 5.896{,}25 \cdot a_{10|ie_2} \cdot (1+ie_2)^{-10}$$

.- Se emite un empréstito formado por 25.000 obligaciones de nominal 1.000€ para ser amortizado en 10 años mediante anualidades variables de forma geométrica con razón 5%, a un tipo de interés del 6% efectivo anual. Se pide:

a) Construir el cuadro de amortización para los 2 primeros años.
b) Títulos amortizados en el séptimo sorteo.
c) Títulos vivos a principios del octavo año.
d) Anualidad del noveno año.

$N_0 = 25.000 \qquad V_n = 1000 \qquad n = 10 \qquad$ q=1,05 $\quad i = 6\%$

a) $$25.000 \cdot 1000 = \propto_1 \frac{1-\left(\frac{1,05}{1,06}\right)^{10}}{1,06-1,05} \Rightarrow \propto_1 = 2.764.454,69$$

Año	Anualidad	Intereses	Amortización	Nª T.Amort.	Nª t.Vivos
0					25.000
1	2.764.454,69	1.500.000	1.264.454,69	1.264,45	23.735,55
2	2.902.677,43	1.424.132,72	1.478.544,71	1.478,54	22.257,01
3	3.047.811,30				
4	3.200.201,87				
5	3.360.211,96				
6	3.528.22,56				
7	3.704.633,68			2.956,76	10.905,52
8	3.889.865,37				
9	4.084.358,64				
10	4.288.576,57				

ANEXO III: PRESENTACIÓN DESDE EL TEMA 8 al 10

Programa sintético

Tema 8. - Operaciones de capital

Tema 9. - Operaciones de préstamo

Tema 10. - Operaciones de empréstito

1

Tema 8. - Operaciones de capital

8.1. Conceptos generales
8.2. Constitución de un capital con imposición constante
8.3. Constitución de un capital con imposición geométrico
8.4. Constitución de un capital con imposición aritmética
8.5. Constitución de un capital con cuotas de constitución constantes
8.6. Características constantes: tantos efectivos

1

Tema 9. - Operaciones de préstamo

9.1. Conceptos generales
9.2. Amortización con reembolso único
9.3. Pago periódico de interese o sistema americano
9.4. Amortización mediante una renta constante o sistema francés
9.5. Amortización mediante una renta geométrica
9.6. Amortización mediante una renta aritmética
9.7. Amortización con cuotas de amortización constantes
9.8. Operaciones se préstamo con intereses fraccionados
9.9. Fondo de amortización
9.10. Sistema alemán
9.11. Características comerciales, tanto efectivos y TAE
9.12. Valor, usufructo y nuda propiedad de un préstamo

1

Tema 10. - Operaciones de empréstito

10.1. Conceptos generales
10.2. Clasificación de los empréstitos
10.3. Estudios financieros delos empréstitos normales o puros
10.4. Estudio financiero de los empréstitos con características comerciales
10.5. Tanto efectivos de los agentes que intervienen en un empréstito
10.6. Valor del empréstito y valor de una obligación
10.7. Operaciones de mercado con bonos y obligaciones

1

TEMA 8: OPERACIONES DE CONSTITUCIÓN

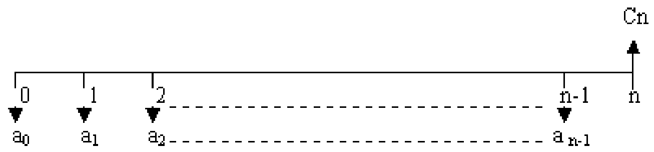
8.1. Conceptos Generales

Las operaciones de constitución son operaciones financieras compuestas en las que la prestación múltiple (capitales entregados por el ahorrador) y la concentración es única (es el capital constituido en t_n y que le será devuelto al ahorrador). Está formada por los distintos ingresos con sus intereses generados durante el tiempo que dure la operación.

Términos impositivos o constitutivos o Imposiciones: son los capitales financieros que forman la prestación.

Gráficamente:

Contraprestación



1

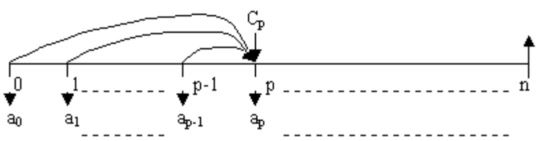
Prestación

Las cuestiones que se plantean en estas operaciones normalmente son de dos tipos:

a) Conocidas las imposiciones a realizar, calcular el capital a constituir.
b) Conocido el capital que se desea constituir, calcular las imposiciones.

Capital constituido en el momento p: C_p, es la suma financiera de los ingresos realizados hasta esa fecha:

-Méto



1

-Método recurrente.

$C_p = (C_{p-1} + a_{p-1}) \cdot (1+i) \rightarrow R^-$
$C_p = C_{p-1} \cdot (1+i) + a_p \rightarrow R^+$

Cuota de constitución: expresa el incremento dela cuantía del capital constituido en el periodo (p-1 , p).

$$A\,C_p = C_p - C_{p-1} = \begin{cases} \text{Si } R^- \rightarrow A\,C_p = (C_{p-1} + a_{p-1}) \cdot (1+i) - C_{p-1} \\ \quad = C_{p-1} + a_{p-1} + C_{p-1} \cdot i + a_{p-1} \cdot i - C_{p-1} = \\ \quad =(C_{p-1} + a_{p-1}) \cdot i + a_{p-1} \\ \\ \text{Si } R^+ \rightarrow A\,C_p = C_{p-1}\,(1+i) + a_p - C_{p-1} = \\ \quad = C_{p-1} + C_{p-1} \cdot i + a_p - C_{p-1} = \\ \quad = C_{p-1} \cdot i + a_p \end{cases}$$

1

Capital pendiente de constitución: Mp

$$\boxed{M_p = C_n - C_p}$$

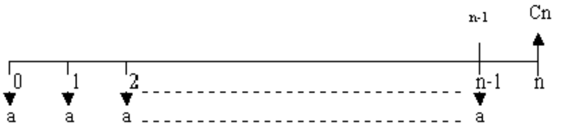
Cuadro de Constitución:

K	Imposiciones	Intereses	Cuota de Constitución	Capital const.	Mp
1	a_0	$a_0 \cdot i$			
2	a_1	$i \cdot (C_o + a_1)$			
...	a_2	...			
...	...	...			
n	a_n	$i\,(C_o + a_{n-1})$			

8.2. Constitución de un capital con imposiciones constantes

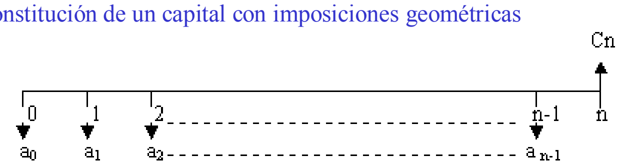
a_k = constante = a

1



$C_n = a\cdot a_{\overline{n}|i}(1+i)\cdot(1+i)^n = a\cdot A_{\overline{n}|i}\cdot(1+i) \Rightarrow a = \dfrac{C_n}{A_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)}$

8.3. Constitución de un capital con imposiciones geométricas



q

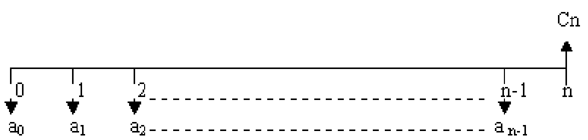
$C_n = A_n'' (1+i)\cdot(1+i)^n$

Prepagable desde el momento 0 al n (final)

1

Recordamos
Renta Prepagable Geométrica
$A_n'' = C_1\cdot \dfrac{1-q_n\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$

8.4. Constitución de un capital con imposiciones aritmética



d

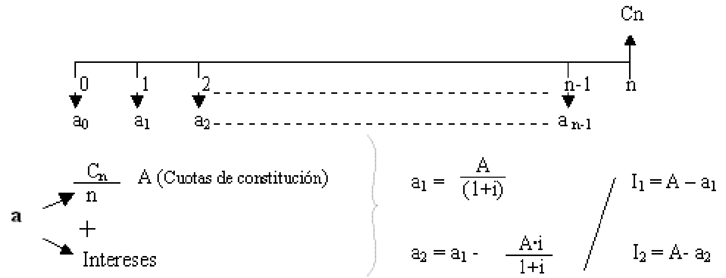
$C_n = A_n'\cdot(1+i)\cdot(1+i)^n$

Término Prepagable Valor de la renta (en n)

1

Recordamos
Renta Prepagable Aritmética
$A_n' = C_1 \cdot a_{\overline{n}\lvert i} + \frac{d}{i} a_{\overline{n}\lvert i} - \frac{n \cdot d}{i} (1+i)^{-n}$ Ó $A_n' = [\, C_1 + \frac{d}{i} - n \cdot d \,]\, a_{\overline{n}\lvert i} - \frac{n \cdot d}{i}$

8.5. Constitución de un capital con cuotas de constitución constantes



1

8.6. Características comerciales: tanto efectivo

Ya visto: tema 1

Tema 9: Operaciones de préstamo

9.1. Conceptos generales

En una operación de préstamo una persona (prestamista) entrega a otra (prestatario) una cierta suma de dinero C_o, que ésta se compromete a reembolsar en determinadas condiciones, pagando además, durante el tiempo de vigencia de la operación el interés convenido que puede ser fijo o variable.

Existen diferentes maneras por las cuales un prestatario puede devolver un préstamo con sus intereses, procesos que se denominan "Sistema o métodos de amortización del préstamo", entre los que cabe destacar:

1. Sistema de amortización de un solo pago: el capital recibido se devuelve de una sola vez. Atendiendo al pago de los intereses se puede distinguir dos casos:

1

a) Préstamo simple: el pago del capital prestado más los intereses, se realiza al final del período de amortización.

b) Amortización americano: pago periódico de intereses y reembolso del capital en el momento de la cancelación del préstamo.

2. Sistema de amortización mediante rentas: son préstamos amortizables, mediante una distribución de pagos que forma una renta y que incluye parte de la devolución del capital prestado (intereses de la deuda pendiente). Podemos distinguir:

a) Prestamos amortizables, mediante rentas constantes: los términos amortizables son constantes (C_1, C_2, ...$C_n = C$). Destacar:

a.1) Método francés o progresivo.
a.2) Método Alemán.

b) Préstamos amortizables mediante rentas variables,(en progresión aritmética o geométrica).

1

3. Método de cuotas de amortización constante.
4. Amortización con fraccionamiento de intereses.

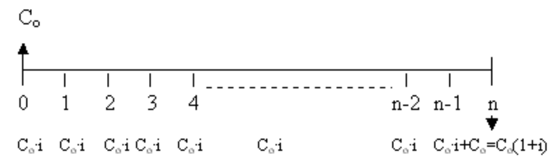
9.2. Amortización con reembolso único (o préstamo simple)

Es una operación de amortización en la que lo prestado y la contraprestación están formadas por **un solo capital**.

9.3. Pago periódico de intereses o sistema americano

El préstamo debe pagar periódicamente los intereses del capital prestado y amortizarlo de una sola vez al final de la operación.

1



Ejercicio:13

9.4. Amortización mediante una renta constante o sistema francés.

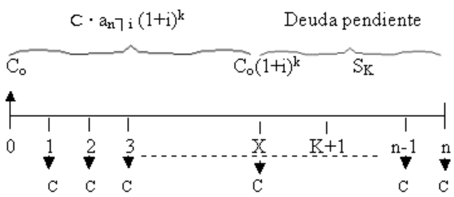
Consiste en amortizar un capital prestado Co mediante términos amortizativos constantes (C) y siendo el tanto de interés también constante.

Equivalencia financiera.

1

$$C_0 = C \cdot a_{\overline{n|}\,i} \Rightarrow C = \frac{C_o}{a_{\overline{n|}\,i}}$$

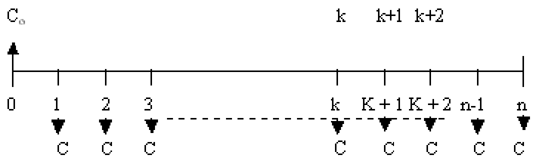
*El saldo del préstamo o deuda pendiente o capital vivo al principio del periodo K +1 es:



$$S_k = C_o(1+i)^k - \underbrace{c\, a_{\overline{k|}\,i}}_{1_{\overline{k|}\,i}}\underbrace{(1+i)^k}_{2}$$

Rva matemático calculado por el método retrospectivo

1



$S_k = C \cdot a_{n-k\rceil i} \longrightarrow$ Rva matemática calculado por el método prospectivo

* La cuota de interés del año K es:

$\boxed{I_k = S_{k-1} \cdot i} = C\, a_{n-k+1\rceil i} \cdot i$

* La cuota de amortización del año K es:

$$\boxed{\alpha_k = C - I_k} = \underbrace{\frac{C_0}{a_{n\rceil i}}}_{C} - \underbrace{C \cdot a_{n-k+1\rceil i} \cdot i}_{I_k = S_{k-1} \cdot i} =$$

$$\underbrace{}_{Ik = C \cdot a_{n-k+1\rceil i} \cdot i}$$

1

$$= \frac{C_0}{a_{n\rceil i}} - \frac{C_0}{a_{n\rceil i}} \cdot a_{n-k+1\rceil i} \cdot i = \frac{C_0}{a_{n\rceil i}} \cdot [1 - a_{n-k+1\rceil i} \cdot i] =$$

$$= \frac{C_0}{a_{n\rceil i}} \cdot \left[\cancel{1} - \frac{\cancel{1}-(1+i)^{-(n-k+1)}}{\cancel{i}} \cdot \cancel{i}\right] = \frac{C_0}{a_{n\rceil i}} \cdot (1+i)^{-(n-k+1)} =$$

$$= \frac{C_0}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \cdot (1+i)^{-(n-k+1)} = \frac{C_0}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \cdot (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-(n-k+1)} =$$

$$= \frac{Co}{\frac{1 \cdot (1+i)^{n} - (1+i)^{-n}(1+i)^{n}}{i}} \underbrace{(1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-n}}_{} \cdot (1+i)^{k-1} = \frac{C_0}{\frac{(1+i)^{n}-1}{i}} \quad 1 \quad (1+i)^{k-1} =$$

1

$$= \boxed{\frac{C_0}{A_{n\rceil i}} \cdot (1+i)^{k-1}}$$

1

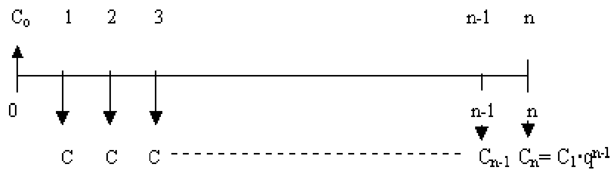
Ejercicios: 1 (interés fijo), 2 (interés variable), 3 (interés fijo); 12, 14, 16, 17.

1 Nota matemática:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}}=\frac{(1+i)^{n}-(1+i)^{-n}\cdot(1+i)^{n}}{i\cdot(1+i)^{n}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot(1+i)^{n}$$

9.5. Amortización mediante una renta geométrica

Son operaciones de préstamo en las que las anualidades que debe abonar el préstamo varían en progresión geométrica, siendo el tipo de interés constante.



$C_o = A_n''$

1

$$\text{Si } q \neq 1+i \Rightarrow C_o = C_1\,\frac{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$\text{Si } q = 1+i \Rightarrow C_o = C_1\,\frac{n}{1+i}$$

De estas expresiones se despeja la primera anualidad

$$q \neq 1+i \Rightarrow C_1 = \frac{C_o\cdot(1+i-q)}{1-q^{n}\cdot(1+i)^{-n}}$$

$$q = 1+i \Rightarrow C_1 = \frac{C_o\cdot(1+i)}{n}$$

A partir de ella,

$C_2 = C_1 \cdot q$

$C_n = C_1 \cdot q^{n-1}$

* Primera cuota de amortización:

$$\alpha_1 = C_1 - I_1 = C_1 - C_o \cdot i$$

Si comparamos las anualidades, de dos años consecutivos.

$C_k = \alpha_k + I_k \Rightarrow S_{k-1} \cdot i$

1

$C_{k+1} = \alpha_k + I_{k+1} \Rightarrow S_k \cdot i$

$C_k - C_{k+1} = \alpha_k - \alpha_{k+1} + i \cdot (S_{k-1} - S_K)$

$C_k - C_{k+1} = \alpha_k - \alpha_{k+1} + i \cdot \alpha_k$

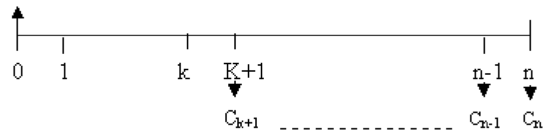
$C_k - C_{k-1} = \alpha_k \cdot (1+i) - \alpha_{k+1}$

$\alpha_{K+1} = \alpha_k \cdot (1+i) - C_k + C_{k+1}$

$\alpha K+1 = \alpha k \cdot (1+i) - Ck + Ck + Ck \cdot q$

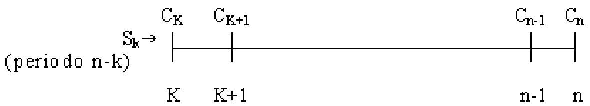
$\boxed{\alpha k+1 = \alpha k \cdot (1+i) + Ck \cdot (q-1)}$

* Saldo al principio del periodo K +1:



1

R.geométrica postpagable



Según sea q
$$\begin{cases} S_k = C_k+1 \cdot \dfrac{1-q^{n-k} \cdot (1+i)^{-(n-k)}}{1+i-q} \rightarrow \text{para } q \neq 1+i \\[2ex] S_k = C_k+1 \cdot \dfrac{(n-k)}{1+i} \rightarrow \text{para } q = 1+i \end{cases}$$

$\Downarrow$

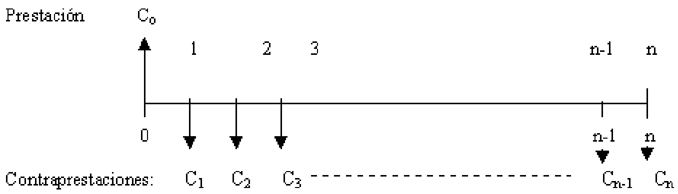
Método prospectivo

Ejercicios: 4,9,18

1

9.6. Amortización mediante una renta aritmética

Consiste en la amortización de un préstamo Co mediante anualidades que varían en progresión aritmética de razón "d".



$C_2 = C_1 + d$

$C_n = C_{n-1} + d = C_1 + (n-1)\, d$

Equivalencia financiera:

$$\underbrace{C_o}_{\text{Préstamo}} = \underbrace{C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i}\, a_{\overline{n}|i} - \frac{n \cdot d}{i}}_{\text{Contraprestación}}$$

1

* Primera cuota de amortización

$\alpha_1 = C_1 - I_1 = C_1 - C_o \cdot i$

En general:

$I_1 = Co \cdot i$
$I_{k+1} = S_k \cdot i$
$I_k = S_{k-1} \cdot i$

$$\left.\begin{array}{l} C_k + 1 = C_k + d \\ A_{k+1} + I_{K+1} = \alpha_K + I_k + d \end{array}\right\} \text{Sabemos!!}$$

*
- $S_k \rightarrow$ Capital en el momento k pendiente de amortizar.
- $S_{k+1} \rightarrow$ en el momento k +1 pendiente de amortizar

$\alpha_{k+1} - \alpha_k + I_{k+1} - I_{k+1} - I_K = d$

$\alpha_{k+1} - \alpha_k + S_{k \cdot i} - S_{k-1} \cdot i = d$

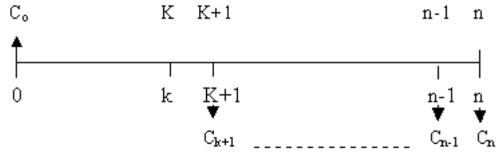
$\alpha_{k+1} - \alpha_k + i \cdot [S_k - S_{k-1}] = d$

$\alpha_{k+1} - \alpha_k + i \cdot (-\alpha_k) = d$ → La diferencia es una cuota de amortización.

$\alpha_{k+1} - \alpha_k \cdot (1+i) = d$

1

El capital pendiente de amortizar al final del año K:



$$f \rightarrow C_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{(n\text{-}d)}{i} \cdot (1+i)^{-n}$$

$$\boxed{S_k = C_{K+1} \cdot a_{\overline{n-k}|i} + \frac{d}{i} \cdot a_{\overline{n-k}|i} - \frac{(n-k)\text{-}d}{i} \cdot (1+i)^{-(n-k)}}$$

Método prospectivo

Ejercicios:5,8,11e

1

9.7. Amortización con cuotas de amortización constantes

Es una operación de préstamo en la que el prestatario destina cantidades iguales en todos los periodos para amortizar el capital prestado C_o, es decir,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha \text{ ; Luego: } \boxed{\alpha = \frac{Co}{n}}$$

*Capital pendiente de amortizar al final del periodo "K" (después de hacer efectivo el término amortizativo C_k)

$$\boxed{S_k = C_o - \alpha \cdot k} = \alpha \cdot n - \alpha \cdot k = \alpha\,(n\text{-}k)$$

*Vamos a comprobar que las anualidades decrecen en progresión aritmética:

$$C_{k+1} = \alpha + I_{k+1}$$

$$C_k = \alpha + I_k$$

S_k = Capital pendiente de amortizar

$$C_{k+1} - C_k = I_{k+1} - I_k$$

$$C_{k+1} - C_k = S_k \cdot i - S_{k\text{-}1} \cdot i$$

1

$C_{k+1} - C_k = (S_k - S_{k-1}) \cdot i$

$S_{k+1} = C_k - \alpha_k \rightarrow S_k - S_{k-1} = -\alpha_k C_{k+1} - C_k = -\alpha \cdot i$

$C_{k+1} = -\alpha \cdot i + C_k$

S_{k-1} S_k

$S_{k+1} = C_k - \alpha_k \rightarrow S_k - S_{k-1} = -\alpha_k$

$C_{k+1} = C_k - \alpha \cdot i$

Las anualidades siguen una progresión aritmética decreciente de razón $\boxed{d = -\alpha \cdot i}$

Decreciente de razón: $d = -\alpha \cdot i$

* Vamos a comprobar que las cuotas de interés, también varían con la misma ley de recurrencia.

$I_{K+1} = S_k \cdot i = (S_{k-1} - \alpha) \cdot i = S_{k-1} \cdot i - \alpha \cdot i = I_k - \alpha \cdot i$

$$I_{k+1} = I_k - \alpha \cdot i$$

Ejercicios: 6,7,10

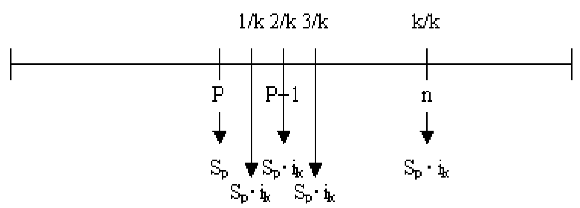
1

9.8. Operación de préstamo con intereses fraccionados.

No es método de amortización distinto, sino una variación que ocurrir con cualquier sistema de amortización.

Se produce al amortizar los préstamos, cuando en vez de pagar la cuota de interés al final de cada periodo (por ej.,anualmente) se van pagando fraccionadamente a lo largo del mismo (por ej., trimestralmente) con un interés i_k de frecuencia equivalente al tanto efectivo anual i .

$$\boxed{i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$



1

Demostración:

$$\boxed{S_p \cdot i_k \cdot a_{\overline{k}|i_k} \cdot (1+i_k)^K} = S_p \cdot \cancel{i_k} \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-k}}{\cancel{i_k}} \cdot (1+i_k)^k = S_p \cdot [(1+i_k)^k - 1] =$$

$$= S_p \cdot [(\cancel{1}+i) - \cancel{1}] =$$

Igualdad $\longrightarrow$ $= \boxed{S_p \cdot i}$

Esta expresión demuestra que, efectivamente, es equivalente realizar los pagos de intereses por K-ésimo de año que realizar un pago único al final del año.

Este fraccionamiento, por tanto, no afectará a:

- Las cuotas de amortización que se pagan al final de cada periodo $\alpha p+1$.
- Al capital pendiente de amortizar Sp

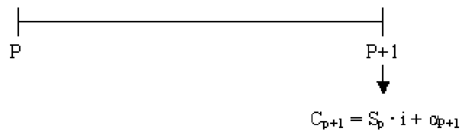
Pero si afectará a los términos amortizativos:

$\boxed{C'_K = \alpha_k + S_{k-1} \cdot i_k}$ $\qquad\qquad$ $\alpha_k = C'_k - S_{k-1} \cdot i_k$

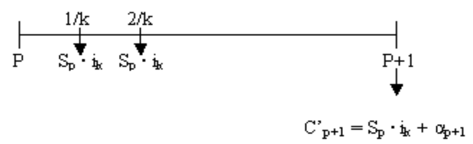
1

Gráficamente :

Si no hay fraccionamiento de intereses:



Si hay fracc



Ejercicios: 19

9.9. Fondo de amortización

La anualidad a satisfacer por el prestatario es la suma de:

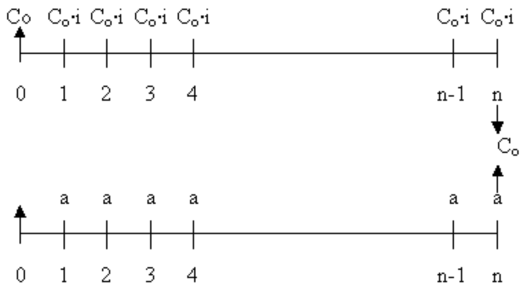
1

a) Los intereses del capital al tanto de interés nominal para préstamos en el plazo considerado, Co · i.

b) Una cuota constante, "a" necesaria para poder reconstruir en n años el capital Co, mediante su colocación al tanto i' que rija para inversiones complementarias.

a)

b)

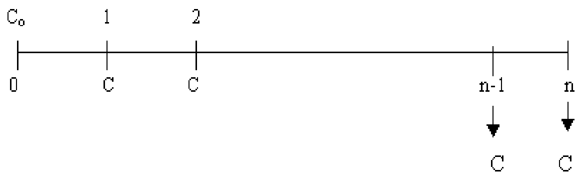


1

$$C_o = a \cdot a_{\overline{n}|\,i'} (1+i)^n = a \cdot \Delta_{\overline{n}|\,i'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{C_o}{\Delta_{\overline{n}|\,i'}}}$$

La anualidad será: $C = C_o \cdot i + \dfrac{C_o}{\Delta_{\overline{n}|\,i'}} = C_o \cdot i + a$



$C_o = c \cdot a_{\overline{n}|\,ie} \rightarrow a_{\overline{n}|\,ie} = \dfrac{C_0}{C} \rightarrow$ ¿ i efectivo ?

Ejercicio: 15

$\rightarrow i_e =$ interés efectivo

1

9.10. Sistema alemán

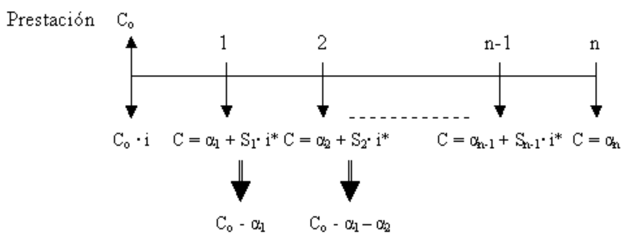
Este método consiste en amortización un capital (Co, to) con unos términos amortizativos constantes y tipo de interés constante con la particularidad de que la cuota de interés de cada periodo se pago al principio del periodo correspondiente. Este conlleva varias características destacables:

a) La cuota de interés que le prestatario pago cada periodo se calcula sobre el capital pendiente de amortizar del periodo y no del periodo anterior (sistema francés).

b) En el momento de conceder el préstamo, el prestamista retiene del capital prestado C_o los intereses correspondientes al primer periodo (Co · i*).

c) El término amortizativo del último periodo está formado sólo por la última cuota de amortización α_n.

1



$$C_o - C_o\, i^* = C \cdot a_{\overline{n}|}\, i, \text{ siendo } i = \frac{i^*}{1-i} = \frac{d}{1-d},\ i^* = \frac{i}{1+i} = c$$

Nota matemática	$i^* = \frac{i}{1+i} = d$ $\quad (1+i) = (1-d)$

* Cuota de amortización: varias a comprobar que surge una progresión geométrica de razón (1-i*)

1

$$C = \alpha_k + S_k\, i^*$$
$$C = \alpha_{k+1} + S_{k+1} \cdot i^*$$

$$C = \alpha_k - \alpha_{k+1} + S_k + i^* - S_{k+1} \cdot i^*$$
$$C = \alpha_k - \alpha_{k+1} + S_k + i^* - (S_k - \alpha_{k+1}) \cdot i^*$$
$$C = \alpha_k - \alpha_{k+1} + S_k + i^* - S_k \cdot i^* + \alpha_{k+1} \cdot i^*$$

$$\boxed{\alpha_{k+1}\,(1-i^*) = \alpha_k}$$

$$\alpha_n = C$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_n \cdot (1-i^*)$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1} \cdot (1-i^*) = \alpha_n\,(1-i^*)^2$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cdot (1-i^*) = \alpha_n\,(1-i^*)^{n-1}$$

1

Como sabemos $C_o = {}^{n}\xi_{i=1}\ \alpha_i = \alpha_n\ \underbrace{[\,(1-i^*)^{n-1} + \ldots + (1-i^*)^2 + (1-i^*) + 1]}_{\text{Suma de una progresión geométrica de razón } (1-i^*)^{-1}}$

En tal sentido precisamos que $\left.\begin{array}{l} a_1 = (1-i^*)^{n-1} \\ a_n = (1-i^*)^{n-n} = 1 \end{array}\right\} S$

Suma de los términos de un progresión geométrica de razón = (1-i)

$$S = \frac{A_1 - a_n \cdot r}{1 - r} = \frac{[(1-i^*)^{n-1} - 1\,(1-i^*)^{-1}] \cdot (1-i^*)}{[1 - (1-i^*)^{-1}] \cdot (1-i^*)} = \frac{(1-i^*)^n - 1}{(1-i^*) - 1} =$$

$$= \frac{(1-i^*)^n - 1}{i^*} = \frac{1-(1-i^*)^n}{i^*}$$

$$C_o = \alpha_n \cdot \frac{1-(1-i^*)^n}{i^*} \Rightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{1-(1-i^*)^n}{i^*} = c}$$

$A_n = c \longrightarrow$ Condición modelo alemán 3ª

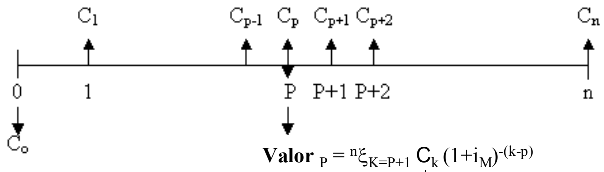
Ejercicio: 11

1

9.11. Características comerciales, tantos efectivos y TAE.

Ya visto

9.12. Valor, usufructo y nuda propiedad de un préstamo.



Valor $_P = {}^n\xi_{K=P+1}\ C_k\,(1+i_M)^{-(k-p)}$

$I_k + \alpha_k$

Valor de todas las anualidades pendientes, actualizar al principio del periodo (p+1) ó final del periodo (p) al tipo de interés vigente en le mercado.

Usufructo $_p = {}^n\xi_{k=p+1}\ I_k\,(1+i_M)^{-(k-p)}$ $\longrightarrow$ Valor de todas las cuotas de interés pendientes valorados al tipo de mercado.

1

Nuda propiedad $_p = {}^n\xi_{k=p+1}\ \alpha_k\,(1+i_M)^{-(k-p)}$ $\longrightarrow$ Representa el valor actualizado de las cuotas de amortización pendientes, valoradas al tipo de interés de mercado.

$$\boxed{V_p = U_p + N_p}$$

Ejercicio: 20

Tema 10: Operaciones de empréstito

10.1. Conceptos generales

Empréstito: es una agregación de préstamos uniforme y homogéneos, o sea, préstamos de igual cuantía V, amortizables con la misma ley financiera y con idénticas contraprestaciones. Cada uno de estos pequeños préstamos individuales se materializaron en títulos, valores que normalmente se denominan obligaciones.

10.2. Clasificación de los empréstitos

1. Según la forma en que se pagan los intereses:

1

a) Obligaciones con pago periódico de intereses u obligaciones americanas: cada título es un préstamo americano del cual el obligacionista recibe periódicamente el cupón y la amortización del título se produce al final de la operación.

b) Obligaciones sin pago periódico de intereses:

- Obligaciones con intereses acumulados o cupón cero: se valoran con una ley de capitalización y los intereses se reciben acumulados en el momento de la amortización del título.
- Obligaciones al descuento: se valora con una ley de descuento.
- Obligaciones con intereses anticipados: se valoran con una ley de capitalización con réditos anticipados.

2. Según el momento en que se reembolsa los títulos.

a) Empréstitos de obligaciones de amortización periódica o de distinta duración

1

o con programa de cancelación escalonada: todas las obligaciones tienen unas condiciones de partida iguales y son equiprobables, es decir, la probabilidad de ser reembolsadas en un determinado periodo es la misma para todas ellas.

b) Empréstitos de obligaciones de igual duración o reembolso global: todos los títulos se amortizan a la misma vez, por tanto, no hay programa de cancelación escalonada.

3. Atendiendo a la existencia de características comerciales:

a) Empréstitos normales o puros: son aquellos empréstitos en que la prestación nominal entregada por los obligacionistas y la contraprestación que entregada el emisor responde únicamente a las características financieras de la operación y no están afectados por características comerciales.

b) Empréstitos comerciales o con características comerciales son aquellas que llevan incorporadas ciertas características de tipo comercial (primas, lotes,...) que modifican la prestación y la contraprestación alterando la equivalencia financiera inicial.

1

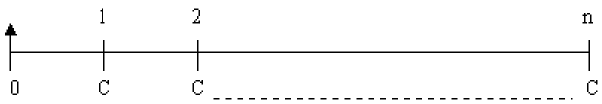
10.3. Estudio financiero de los empréstitos normales o puros

$\frac{C_o}{N} = V$

V: Valoración de cada obligación, valor nominal.
N: nº de obligaciones emitidas
C_o: Valor nominal del empréstito

Amortización global o una cancelación escalonada ⇨ Reducción del nominal

a) Pago periódico de intereses por vencido y anualidad C_o

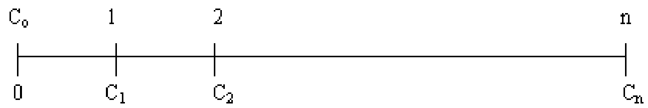


$C_o = C\, a_{n\rceil i} = N \cdot V$

$C = \frac{N_D \cdot V}{a_{n\rceil i}} + N$

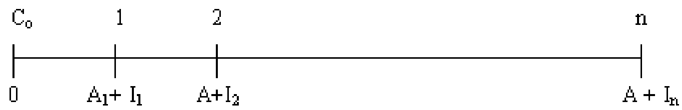
1

b) Pago periódico de intereses por vencido y anualidades variables geométricamente.



$C_o = A_n'' = N \cdot V$

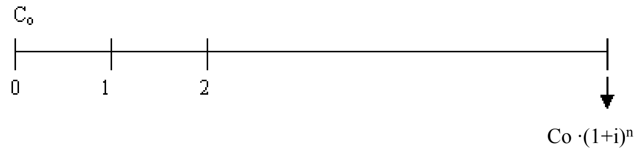
c) Pago periódico de intereses por vencido y anualidad aritmética.



$A = \frac{C_o}{n} = \frac{N \cdot V}{n}$

1

a) Obligaciones cupón cero



$$C_o = C \cdot a_{\overline{n|}\, i}$$

$$C = N_k \cdot V \cdot (1+i)^k \rightarrow N_k = \frac{C}{V \cdot (1+i)^k}$$

n = entero → redondear

Amortización con reembolso periódico de títulos o con cancelación escalonada

En este caso no se mantiene todas las obligaciones vivas hasta el final dela operación. Habrá que distinguir:

1

- Ni: nº de obligaciones que se cancelan al final del periodo i.
- Mi: nº de obligaciones vivas o en circulación al principio de cada periodo i.

Cuadro de amortización:

Año (n)	**Anualidad (c)**	**Intereses ($i \cdot m_k \cdot v$)**	**Amortización ($N_k \cdot V$)**	**Títulos amortizados (N_k)**	**Títulos vivos (M_k)**

1

10.4. Estudio financiero de los empréstitos con características comerciales

- * Bilateral
  - Prima de emisión:
    - -Por debajo de la par: $V > V_E$
    - →Obligaciones paga menos.
    - -Por encima de la par: $V < V_E$
    - →Obligaciones paga más.
  - Prima de amortización: $V_A \neq V$
    - Cantidad que se tiene que amortizar
  - Premio o lotes: cuantía que paga el emisor, se sortea como premio entre los obligacionistas.

* Unilateral ⇨ Gastos iniciales,...

10.5. Tantos efectivos de los agentes que intervienen en un empréstito

10.6. Valor empréstito y valor de una obligación

10.7. Operaciones de mercado con bonos y obligaciones

1

ANEXO IV:

(RGL) DIRECCIONES DE INTERNET EN DONDE SE COLABORA O PARTICIPA

1.-DIRECCIÓN DEL CVITAE EN INTERNET:

Web:

http://www.ugr.es/local/rgomezl
http://www.robertogomez.netfirms.com

Documento: http://www.eumed.net/cursecon/colaboraciones/cv-rgl.PDF

2.-UNIVERSIDAD DE GRANADA

http://www.ugr.es

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad

http://www.ugr.es/%7Eefinanci/
http://www.ugr.es/%7Eefinanci/vesp/profesoradosg.htm

3.-CENTROS ASOCIADOS DE LA UNED:

http://www.uned.es

MALAGA - 043000 (www.uned.es/ca-malaga)
DIRECTOR: ANDRÉS MARTÍNEZ LORCA
SECRETARIO: FRANCISCO R. ALIJO HIDALGO
CALLE SHERLOCK HOLMES, 4 - 29006 MALAGA
TELÉFONO: 952363295 952363297
FAX: 952362380
EMAIL: info@malaga.uned.es secretaria@malaga.uned.es director@malaga.uned.es

MALAGA-RONDA - 043006
CALLE DOLORES IBARRURI, S/N - 29400 RONDA
TELÉFONO: 952 161106
FAX: 952 161106
EMAIL: unedronda@hotmail.com

4.-CENTRO DE ENSEÑANZA SAN JOSÉ DE MALAGA (CES SJ)

http://www.fundacionloyola.org

5.- UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

http://www.uma.es

6.-PUBLICACIONES DE LIBROS O MANUALES ECONÓMICOS Y CONTABLES

TESIS DOCTORAL:

http://www.eumed.net/tesis/index.htm

LIBROS

http://www.eumed.net/cursecon/libreria

ARTÍCULOS

http://www.eumed.net/cursecon/colaboraciones/index.htm#financiera

7.-GRUPOS DE INVESTIGACIÓN

Universitarios

http://www.eumed.net/
http://www.eumed.net/emn2001/miembros.htm

Europeos

Programa de acción comunitario en materia de educación «Sócrates» y otras acciones en el ámbito de la educación
http://europa.eu.int/comm/education/call/expertsoc/list en.html

La Comisión mantiene al día la lista de expertos seleccionados dentro de esta Convocatoria, lista que se encuentra disponible al público en la página web

No Universitarios (Privados)

AECA -*Asociación Española de Contabilidad y Administración de Empresas-*
http://www.aeca.es

7.-ACTIVIDAD PROFESIONAL

EMPRESA TURÍSTICA: ROVYTUR
http://www.iespana.es/rovytur

CLUB DEPORTIVO EBG MÁLAGA
(Escuela de Unicaja -Los Guindos-)
http://www.supercable.es/~jacar/

8.-OTRAS DIRECCIONES A VISITAR

Cursos de Verano de la UMA, Diputación de Málaga y Centro Asociado de la UNED:
http://www.cursosdeverano.org