

Introducción al flujo por la curvatura media (MCF)

$$F : M \times [0, T[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \vec{H} = HN,$$

Vicente Miquel Molina

Granada 2009

Notación

$$F : M \times [0, T[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \vec{H} = H N,$$

where H is the mean curvature of the immersion, and we have used the following convention signs for the mean curvature H , the Weingarten map A and the second fundamental form (α for the scalar version and $\vec{\alpha}$ for its tensorial version), for a chosen unit normal vector N : $AX = -\bar{\nabla}_X N$, $\vec{\alpha}(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N = \langle AX, Y \rangle N$, $\alpha(X, Y) = \langle \vec{\alpha}(XY), N \rangle$ and $H = \text{tr}A = \sum_{i=1}^n \alpha(E_i, E_i)$, $\vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{\alpha}(E_i, E_i) = H N$ for a local orthonormal frame E_1, \dots, E_n of the submanifold, where $\bar{\nabla}$ denote the Levi-Civita connection on \mathbb{R}^{n+1} (that is, the directional derivative).

Moreover, the Levi-Civita connection ∇ of the submanifold is $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \alpha(X, Y)$ (we omit the immersion map)

Contents

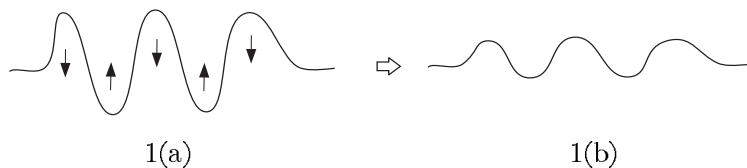
1	Introducción: Visión general y principios del máximo.	1
1.1	Algunos ejemplos	1
1.2	Soluciones autosemejantes	2
1.3	El MCF es el flujo gradiente del área	4
1.4	Y esto, ¿para qué sirve?	5
1.5	Herramientas para el estudio del MCF	6
2	Existencia local y global	14
2.1	Existencia para tiempos cortos	14
2.2	Existencia a largo plazo (global)	17
3	Clasificación de las singularidades de tipo I. Solitones.	24
4	Evolución de hipersuperficies compactas estrictamente convexas y su forma asintótica.	28
5	Singularidades y Flujo con cirugía	31

1 Introducción: Visión general y principios del máximo.

dibujos
1.1 Algunos ejemplos
 $S^1 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (o } M^2 \text{)}$

moñies o
 $J \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (o } M^2 \text{)}$, $c(s, t)$, que verifica

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} = \kappa \vec{n}, \quad c(\cdot, 0) = c_0.$$



esferas y cilindros

Para una esfera de radio r , si suponemos que solo varía el radio con la evolución por la curvatura media y la centramos en el origen, $F(x, t) = r(t)u$, $\vec{H}(x, t) = -\frac{n}{r(t)}u$, $u = x/|x|$,

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{n}{r(t)}$$

de donde $r^2(t) = -2nt + r(0)^2$, i.e. $r = \sqrt{R^2 - 2nt}$ si $r(0) = R$. extinción en $t = \frac{R^2}{2n}$ a un punto

Para una cilindro $\mathbb{R}^{n-d} \times S^d$ de radio r , si suponemos que solo varía el radio con la evolución por la curvatura media y la centramos en el origen, $F(x, y, t) = (x, r(t)u)$, $\vec{H}(x, t) = -\frac{n}{r(t)}(0, u)$, $u = y/|y|$,

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{d}{r(t)}$$

de donde $r^2(t) = -2dt + r(0)^2$, i.e. $r = \sqrt{R^2 - 2nt}$ si $r(0) = R$. extinción en $t = \frac{R^2}{2d}$ a un \mathbb{R}^{n-d} .

La unicidad de la solución que veremos después asegura que es así siempre.

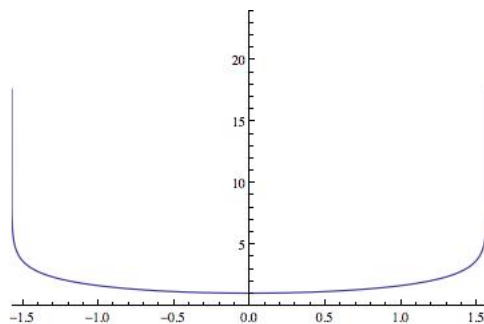
1.2 Soluciones autosemejantes

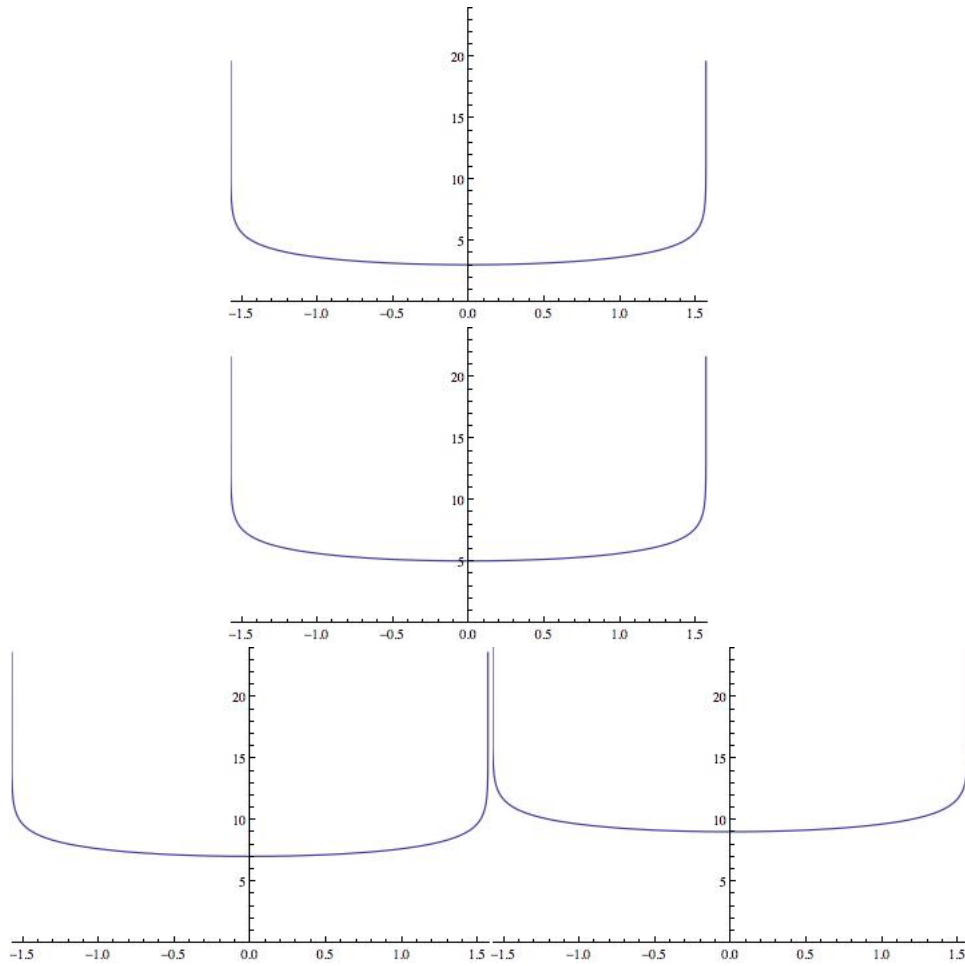
Solitones

Una “solución estacionaria” o “solución autosemejante” o “solitón” es una solución del FCM de la forma $F(t) = a(t)R_t F + b(t)$.

Hemos visto esferas y cilindros. Otro ejemplo

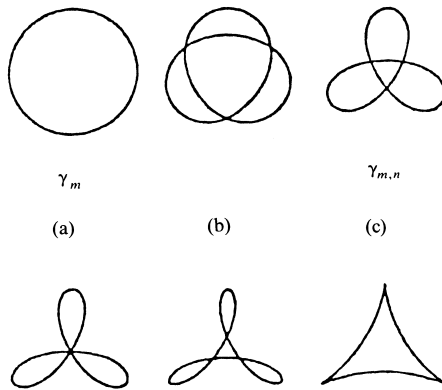
Para $n = 2$, el único solitón $X(t) = X + b(t)$ es el “grim reaper”, gráfica de la función $y = \ln \cos(x)$ en el intervalo $(\pi/2, \pi/2)$.

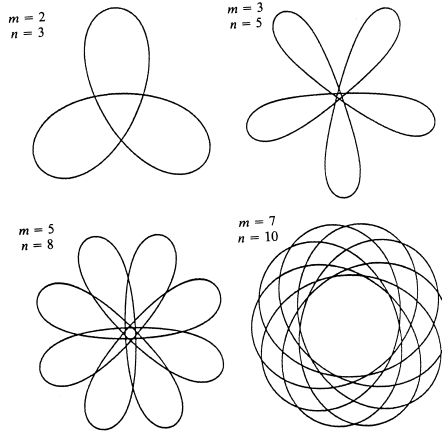




Solitones

Otros ejemplos (no embebidos): las curvas de Abresh Langer





1.3 El MCF es el flujo gradiente del área

$\text{gradArea} = \vec{H}$ **1**

Dada una curva de inmersiones $F : M \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta, $M_t = F_t(M)$,

$$\begin{aligned}
 A(M_t) &= \int_M \mu_t = \int_M \sqrt{\det(g_t)} \, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n, \\
 \frac{d\sqrt{\det(g_t)}}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_t)}} \det(g_t) \text{tr}(g_t^{-1} g'_t) \\
 g'_{ij} &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\
 \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial F}{\partial t} \right)^\top &= \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial F^\top}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle N \right) = \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial F^\top}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle A \frac{\partial F}{\partial u^i} \\
 \frac{d\sqrt{\det(g_t)}}{dt} &= \frac{1}{2} \sqrt{\det(g)} g^{ij} \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial F^\top}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle A \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial F^\top}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle A \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle \right) \\
 &= \left(\text{div} \frac{\partial F^\top}{\partial t} - H \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle \right) \sqrt{\det(g_t)} \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

$\text{gradArea} = \vec{H}$ **2**

Derivando bajo el signo integral y aplicando el teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA(M_t)}{dt} &= \int_M \frac{d\sqrt{\det(g_t)}}{dt} \, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n, \\
 &= \int_M \left(\text{div} \frac{\partial F^\top}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, HN \right\rangle \right) \sqrt{\det(g_t)} \, du^1 \wedge \cdots \wedge du^n \\
 &= \left(-HN, \frac{dF}{dt} \right) \quad (\cdot, \cdot) \text{ is the Hilbert product in } L^2(M) \\
 &\quad \text{with respect the measure } \mu_t.
 \end{aligned}$$

luego $-HN$ es el gradiente de $A(M)$ en el espacio de las inmersiones $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con respecto al producto escalar (\cdot, \cdot) .

Consecuencia para el MCF

La ecuación para el MCF $\frac{\partial F}{\partial t} = HN$ es

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\text{grad}A(F_t(M))$$

luego, a lo largo de este flujo, el área decrece de la manera más rápida posible.

De modo más explícito, la variación del área a lo largo del MCF es:

$$\frac{dA(M_t)}{dt} = \left(-HN, \frac{dF}{dt} \right) = - \int_M H^2 \mu_t. \quad (1.2)$$

1.4 Y esto, ¿para qué sirve?

Aplicaciones

- Cita del libro de Brakke, apéndice A: “It is observed that if pure aluminium with many small grains is annealed, then the grain boundaries move with velocities proportional to their mean curvature”

anneal:: heat metal or glass and allow it to cool slowly, in order to remove internal stresses and thicken it. *es decir, forjado o templado.*

- De otras fuentes, otros fenómenos gobernados por el MCF:

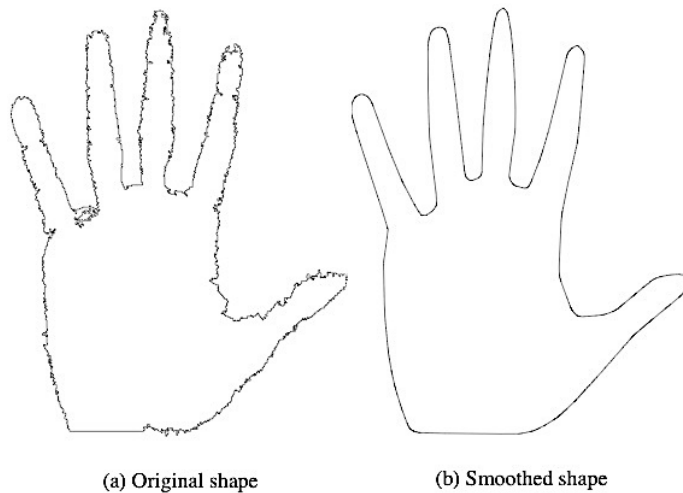
Crecimiento de cristales (que puede -suele- ser anisotrópico)

Movimientos de superficies de separación conducido por una energía interna o tensión superficial

- De una tesis: restauración del retablo mayor de la iglesia de Bienservida (impainting)

Esto entra dentro del

tratamiento de imágenes



Aplicaciones dentro de las matemáticas

Cita de una tesis:

We point out two recent successes in the field of geometric evolution equations. One is the approach of Perelman to prove the Poincaré conjecture and the geometrization conjecture in the context of Hamilton's program for the Ricci flow.

The other is the topological decomposition of mean convex hypersurfaces by Huisken and Sinestrari, using the singularity analysis for the mean curvature flow (quizás comente algo más de esto).

Besides many more beautiful applications of these methods in geometry, they also play an important role in other fields of mathematics and physics:

A discrete version of the mean curvature flow is used in mathematical finance for the pricing of options.

Other curvature flows like the Gauss curvature flow are used in image processing

Noting just one example of an application in gauge theory, Struwe showed that one can produce nontrivial selfdual Yang-Mills fields, so-called instantons, by using a heat flow method.

Si bien esto es cierto, preferimos un enfoque más modesto del tema (más adecuado para este minicurso):

Traditionally, differential geometry has been the study of curved spaces or shapes in which, for the most part, time did not play a role. In the last few decades, on the other hand, geometers have made great strides in understanding shapes that evolve in time. There are many processes by which a curve or surface can evolve, but among them one is arguably the most natural: the mean curvature flow. This article describes the flow, some of the discoveries that have been made about it, and some unresolved questions.

Enfoques para el estudio del MCF

Teoría geométrica de la medida - varifolds

libro: K. A. Brakke: "The motion of a Surface by its Mean Curvature", Princeton U. P., 1978

Conjuntos de nivel - soluciones viscosas
 libro: Giga: "Surface Evolution Equations. A level set approach", Birkhauser
 2006

PDE clásica: teoría parabólica
 libro: Xi-Ping Zhu. "Lectures on Mean Curvature Flows". AMS/IP, 2002.

1.5 Herramientas para el estudio del MCF

Fórmulas de evolución

Proposition 1.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{\partial g}{\partial t} &= -2H\alpha, & \text{(b)} \quad \frac{\partial g^\sharp}{\partial t} &= 2H\alpha^\sharp & \text{(c)} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} &= -H^2\mu \\
 \text{(d)} \quad \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\bar{\nabla} N}{\partial t} = -\text{grad}H. & \text{(e)} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \nabla^2 H - H\alpha A \\
 \text{(f)} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \Delta\alpha - 2H\alpha A + |A|^2\alpha & \text{(g)} \quad \frac{\partial H}{\partial t} &= \Delta H + H|A|^2. \\
 \text{(h)} \quad \frac{\partial A}{\partial t} &= \Delta A + |A|^2 A & \text{(i)} \quad \frac{\partial |A|^2}{\partial t} &= 2H\text{tr}A^3 + 2\langle \alpha, \nabla^2 H \rangle \\
 \text{(j)} \quad \frac{\partial |A|^2}{\partial t} &= \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4. & & & & (1.3)
 \end{aligned}$$

donde αL is defined by $\alpha L(X, Y) = \alpha(LX, Y)$. Además g^\sharp y α^\sharp denotan, respectivamente, la métrica inducida sobre T^*M por g y el tensor inducido sobre T^*M por α mediante el isomorfismo $\sharp: T^*M \rightarrow TM$ de subir índices definido por $g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y)$ y $g^\sharp(\omega, \eta) = g(\omega^\sharp, \eta^\sharp)$.

Fórmulas de evolución. Demostración 1

a) From the equation of MCF,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial t}(Y, Z) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle F_{t*}Y, F_{t*}Z \rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} F_{t*}Y, F_{t*}Z \right\rangle + \left\langle F_{t*}Y, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} F_{t*}Z \right\rangle \\
 &= \left\langle \bar{\nabla}_{F_{t*}Y} \frac{\partial F}{\partial t}, F_{t*}Z \right\rangle + \left\langle F_{t*}Y, \bar{\nabla}_{F_{t*}Z} \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\
 &= H \left(\langle \bar{\nabla}_{F_{t*}Y} N, F_{t*}Z \rangle + \langle F_{t*}Y, \bar{\nabla}_{F_{t*}Z} N \rangle \right) = -2H\alpha(Y, Z) \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

b) Si $g^{ij} := g^\sharp(du^i, du^j)$, entonces $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$, de donde

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} g^{ij}g_{jk} = \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) g_{jk} + g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{jk} \right), \\
 \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) g_{jk} &= -g^{ij}(-2H\alpha_{jk}), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \delta_j^\ell = g^{ij} 2H\alpha_{jk} g^{k\ell} = 2H\alpha^{i\ell}. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

c) ya la demostramos al ver que el MCF era el flujo gradiente del área.

Fórmulas de evolución. Demostración 2

d). Tomando una referencia local ortonormal e_i de M_t (y extendiéndola, para calcular la primera expresión tensorial, a $\bar{e}_i = F_{t*}e_i$, que conmuta con $\frac{\partial F}{\partial t}$):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\nabla} N}{\partial t} &= \left\langle \frac{\bar{\nabla} N}{\partial t}, \bar{e}_i \right\rangle \bar{e}_i = \frac{\partial}{\partial t} \langle N, \bar{e}_i \rangle \bar{e}_i - \left\langle N, \frac{\bar{\nabla} \bar{e}_i}{\partial t} \right\rangle \bar{e}_i = - \left\langle N, \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \bar{e}_i \\ &= - \langle N, \bar{e}_i(H)N \rangle \bar{e}_i - \langle N, H\bar{\nabla}_{\bar{e}_i} N \rangle \bar{e}_i = -\text{grad}H \end{aligned} \quad (1.6)$$

e) Simplificando la notación: $X \equiv F_*X$ y usando $\bar{\nabla}_X F = X$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t}(X, Y) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \bar{\nabla}_X Y, N \right\rangle + \left\langle \bar{\nabla}_X Y, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} Y, N \right\rangle - \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad}H \rangle \\ \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} Y, N \rangle &= \left\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle = \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y (HN), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X (Y(H)N + H\bar{\nabla}_Y N), N \rangle \\ &= X(Y(H)) + Y(H) \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle + X(H) \langle \bar{\nabla}_Y N, N \rangle + H \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N, N \rangle \\ &= X(Y(H)) + H \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N, N \rangle = X(Y(H)) + H(X(\langle \bar{\nabla}_Y N, N \rangle) - \langle \bar{\nabla}_Y N, \bar{\nabla}_X N \rangle) \\ &= X(Y(H)) - H\alpha(Y, LX) \text{ De donde} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(X, Y) = X(Y(H)) - H\alpha(Y, LX) - \langle \bar{\nabla}_X Y, \text{grad}H \rangle = (\nabla^2 H - H\alpha L)(X, Y)$$

Fórmulas de evolución. Demostración 3

f) La deducimos de e) usando la *fórmula de Simons*

$$\begin{aligned} \nabla_{UV}^2 \alpha(Y, Z) &= \nabla_{YZ}^2 \alpha(U, V) + \alpha(U, V)\alpha(Y, LZ) \\ &\quad - \alpha(Y, V)\alpha(U, LZ) + \alpha(U, Z)\alpha(Y, LV) - \alpha(Y, Z)\alpha(U, LV) \end{aligned}$$

que se obtiene usando las fórmula de Codazzi. Tomando trazas se obtiene la fórmula de Simons para la rough Laplacian de la segunda forma fundamental.

$$\Delta \alpha(YZ) = \nabla_{YZ}^2 H + H\alpha(Y, LZ) - |L|^2 \alpha(Y, Z). \quad (1.9)$$

Sustituyendo esta expresión de $\nabla^2 H$ en e) se obtiene f).

g) es consecuencia inmediata de e) tomando trazas, es decir, la contracción con g^\sharp así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial (g^\sharp * \alpha)}{\partial t} = \frac{\partial g^\sharp}{\partial t} * \alpha + g^\sharp * \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 2H\alpha^{ij}\alpha_{ij} - g^{ij} (\nabla_{ij}^2 H - H\alpha A_{ij}) \\ &= 2H|\alpha|^2 + \Delta H - H|\alpha|^2 = \Delta H + H|\alpha|^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Fórmulas de evolución. Demostración 4

h) Por un lado

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial g(A \cdot, \cdot)}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t}(A \cdot, \cdot) + g\left(\frac{\partial A}{\partial t} \cdot, \cdot\right) = -2Hg(A^2 \cdot, \cdot) + g\left(\frac{\partial A}{\partial t} \cdot, \cdot\right)$$

y usando f) tenemos que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Delta \alpha - 2H\alpha A + |A|^2 \alpha = g(\Delta A \cdot, \cdot) - 2Hg(A^2 \cdot, \cdot) + |A|^2 g(A \cdot, \cdot).$$

Comparando ambas expresiones se obtiene (h).

i) teniendo en cuenta que $|A|^2 = |\alpha|^2 = g^{ik}g^{jl}\alpha_{ij}\alpha_{kl}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial|A|^2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ik}g^{jl}\alpha_{ij}\alpha_{kl}) = 2\frac{\partial}{\partial t}(g^{ik})g^{jl}\alpha_{ij}\alpha_{kl} + 2g^{ik}g^{jl}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial t}\alpha_{kl} \\ &= 4Hg^{im}g^{kn}\alpha_{mn}g^{jl}\alpha_{ij}\alpha_{kl} + 2g^{ik}g^{jl}(\nabla_{ij}^2H - H\alpha_{im}g^{sm}\alpha_{js})\alpha_{kl} \\ &= 4H\text{tr}L^3 + 2\langle\nabla^2H, \alpha\rangle - 2H\text{tr}A^3 = 2H\text{tr}A^3 + 2\langle\nabla^2H, \alpha\rangle\end{aligned}$$

Fórmulas de evolución. Demostración 5

k) De la fórmula de Simons para $\Delta\alpha$ se deduce, si denotamos $\langle\nabla^2H(X), Y\rangle := \nabla^2H(X, YY)$, que: $\Delta A = \nabla^2H + HA^2 - |A|^2A$. de donde

$$\begin{aligned}\Delta|A|^2 &= e_i e_i \langle A, A \rangle = 2(\langle \Delta A, A \rangle + \langle \nabla A, \nabla A \rangle) \\ &= 2\langle \nabla^2H + HA^2 - |A|^2A, A \rangle + 2|\nabla A|^2 \\ &= 2\langle \nabla^2H, \alpha \rangle + 2H\text{tr}A^3 + 2|\nabla A|^2 - 2|A|^4.\end{aligned}\quad (1.11)$$

sustituyendo ahora la expresión que de aquí se obtiene para $2\langle\nabla^2H, \alpha\rangle$ en i), obtenemos j).

Obsérvese que en todas estas fórmulas de evolución hemos buscado $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = \Delta \cdot + \dots$. Es porque de ese modo podemos aplicar los "principios de máximo".

Principios del máximo 1

(Weak maximum principle for supersolutions of the heat equation). Let g_t be a family of metrics on a closed manifold M^n and let $u : M \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g_t} u$. If $u \geq c$ at $t = 0$ for some constant $c \in \mathbb{R}$, then $u \geq c$ for all $t \geq 0$.

(Weak (scalar) maximum principle. Suppose g_t is a family of metrics on a closed manifold M^n and $u : M \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta_{g_t} u + X_t \cdot \nabla u + F(u),$$

where X_t is a time-dependent vector field and F is a Lipschitz function. If $u \leq c$ at $t = 0$ for some $c \in \mathbb{R}$, then $u(x, t) \leq U(t)$ for all $x \in M$ and $t \geq 0$, where $U(t)$ is the solution to the ODE

$$\frac{dU}{dt} = F(U) \quad \text{with} \quad U(0) = c.$$

y los resultados correspondientes para las desigualdades opuestas.

Principios del máximo 2

Proposition 2 (Weak maximum principle for symmetric 2-tensors).. *Let g_t be a smooth 1-parameter family of Riemannian metrics on a closed manifold M^n . Let α_t be a symmetric 2-tensor satisfying*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \geq \Delta_t \alpha_t + \nabla_{X_t}^t \alpha_t + \beta_t,$$

where X_t is a time-dependent vector field and $\beta_t(x) = \beta_t(\alpha_t(x), g_t(x))$ is a symmetric $(2, 0)$ -tensor which is locally Lipschitz in all its arguments and satisfies the null-eigenvector assumption. that is: if A_{ij} is a nonnegative symmetric 2-tensor at a point (x, t) and if V is such that $A(V, \cdot) = 0$, then $\beta(A, g)(V, V) \geq 0$. If $\alpha_0 \geq 0$, then $\alpha_t \geq 0$ for all $t \geq 0$ as long as the solution exists.

Principios del máximo fuerte

(Strong maximum principle for supersolutions of the heat equation). Let g_t be a family of metrics on a closed manifold M^n and let $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g_t} u$. If $u \geq c$ at $t = 0$ for some constant $c \in \mathbb{R}$, then $u \geq c$ for all $t \geq 0$. Además, si $u(x, 0) > c$ en algún punto $x \in M$, entonces $u > c$ para $t > 0$.

(Strong maximum principle for symmetric 2-tensors) Let g_t be a smooth 1-parameter family of Riemannian metrics on a closed manifold M^n . Let α_t be a symmetric 2-tensor satisfying

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \geq \Delta_t \alpha_t + \nabla_{X_t}^t \alpha_t + \beta_t,$$

where X_t is a time-dependent vector field and $\beta_t(x) = \beta_t(\alpha_t(x), g_t(x))$ is a symmetric $(2, 0)$ -tensor which is locally Lipschitz in all its arguments and satisfies the null-eigenvector assumption. If $\alpha_0 \geq 0$, then $\alpha_t \geq 0$ for all $t \geq 0$ as long as the solution exists. Moreover, if at some point $x \in M$ and some $X \in T_x M$, $\alpha_x(X, X) > 0$, then $\alpha_t > 0$ for all $t > 0$ as long as the solution exists.

y los resultados correspondientes para las desigualdades opuestas.

Principio de no colisión 1

Lema: Let L be the differential operator

$$L(u) \equiv a^{ij}(x, Du, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^j(x, Du, t) \frac{\partial u}{\partial x^j}. \tag{1.12}$$

where a^{ij} and b^j are smooth and bounded and L is uniformly elliptic. Suppose that, in a domain $\Omega \times [0, T]$ of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, Ω compact, u is a smooth solution of $\frac{\partial u}{\partial t} = L(u)$. Then u attains its maximum (and its minimum) on the boundary of $\Omega \times [0, T]$.

grafos Si M es la gráfica $F(x) = (x, u(x))$ de una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, una referencia e_i de Ω induce una referencia de M $\bar{e}_i = F_* e_i = \bar{e}_i + u_i \bar{e}_0$, where $u_i = e_i(u)$. In this frame, the matrix of the metric g of the submanifold and its inverse, and the dual frame θ^i are given by:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= u_i u_j + \delta_{ij}, \\ g^{ij} &= \delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\widehat{\nabla} u|^2} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Principio de no colisión 2

A unit normal vector to $F(M)$ can be found using $\xi = a\widehat{\nabla}u + b\bar{e}_0$, imposing the condition $\langle \xi, \bar{e}_i \rangle = 0$ and dividing by the g -norm. We choose

$$N = \frac{-\widehat{\nabla}u + \bar{e}_0}{\sqrt{|\widehat{\nabla}u|^2 + 1}}. \quad \text{Then } \langle N, \bar{e}_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\nabla}u|^2 + 1}}.$$

The gradient of u in M can be computed using

$$\bar{\nabla}u = \bar{e}_0, \quad \nabla u = \bar{\nabla}u^\top = \bar{e}_0 - \langle \bar{e}_0, N \rangle N =: \bar{e}_0^\top \quad (1.14)$$

or $\nabla u = g^{ij}u_i e_j$. In both cases we obtain:

$$\nabla u = \frac{\widehat{\nabla}u + |\widehat{\nabla}u|^2 \partial_u}{1 + |\widehat{\nabla}u|^2} \quad (1.15)$$

where $\widehat{\nabla}u$ is the gradient of the function u in \mathbb{R}^n .

Principio de no colisión 3

From the above one gets

$$|\nabla u|^2 = 1 - \langle N, \bar{e}_0 \rangle^2 = \frac{|\widehat{\nabla}u|^2}{1 + |\widehat{\nabla}u|^2} \quad (1.16)$$

and

$$|\widehat{\nabla}u|^2 = \frac{|\nabla u|^2}{1 - |\nabla u|^2} = \frac{1 - \langle N, \bar{e}_0 \rangle^2}{\langle N, \bar{e}_0 \rangle^2} \quad (1.17)$$

If we define $\sigma = \langle N, \bar{e}_0 \rangle$ and $v = \frac{1}{\sigma}$, the above formulae read

$$|\nabla u|^2 = 1 - \frac{1}{v^2}, \quad |\widehat{\nabla}u|^2 = v^2 - 1 \quad (1.18)$$

From the above formulae we also get

$$N = \frac{-\widehat{\nabla}u + \bar{e}_0}{v}, \quad \widehat{\nabla}u = -vN + \bar{e}_0 \quad \widehat{\nabla}u = v^2 \nabla u - (v^2 - 1)\bar{e}_0.$$

Principio de no colisión 4

$$\begin{aligned} \langle A\bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle &= -\langle \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} N, \bar{e}_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\nabla}u|^2 + 1}} \left\langle -\bar{\nabla}_{\bar{e}_i + u_i \bar{e}_0} (-\widehat{\nabla}u + \bar{e}_0), e_j + u_j \bar{e}_0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{v} \left\langle \widehat{\nabla}_{e_i} \widehat{\nabla}u, e_j \right\rangle \end{aligned}$$

$$H = g^{ij} \langle A\bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \left(\delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2} \right) \frac{1}{v} \left\langle \widehat{\nabla}_{e_i} \widehat{\nabla}u, e_j \right\rangle = \frac{1}{v} \left(\delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2} \right) \widehat{\nabla}_{ij}^2 u$$

Ayuda a ver que esto es un operador elíptico el tomar $e_1 = \widehat{\nabla}u/|\widehat{\nabla}u| = \widehat{\nabla}u/\sqrt{v^2 - 1}$, con lo que $\left(\delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2} \right) \widehat{\nabla}_{ij}^2 u = \widehat{\Delta}u - \frac{1}{v^2} \left\langle \widehat{\nabla}_{\widehat{\nabla}u} \widehat{\nabla}u, \widehat{\nabla}u \right\rangle = \widehat{\Delta}u - \frac{v^2 - 1}{v^2} \widehat{\nabla}_{e_1 e_1}^2 u$.

En estas coordenadas la ecuación del MCF se escribe, usando $F(x, t) = (x(t), u(x(t), t))$, $x'(t) + \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) \bar{e}_0 = \frac{1}{v} \left(\delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2}\right) \widehat{\nabla}_{ij}^2 u \left(-\widehat{\nabla} u + \bar{e}_0\right)$. Igualando las componentes, la solución del MCF ha de verificar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\nabla} u|^2 + 1}} \left(\delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2}\right) \widehat{\nabla}_{ij}^2 u - \langle \widehat{\nabla} u, x'(t) \rangle$$

Principio de no colisión 5

Principio de separación Sean M_t, \mathcal{M}_t dos superficies completas moviéndose por MCF. Si inicialmente son disjuntas, permanecen disjuntas

Si no es así, sea t_0 el instante en que se cortan por primera vez. En ese instante serán tangentes en los puntos de contacto. Sea p uno de esos puntos de contacto, y escribamos M_t y \mathcal{M}_t en un entorno de (p, t_0) como gráficas de funciones u y w sobre $T_p M_{t_0}$. Con estas parametrizaciones tendremos, en esos entornos, si $z = u - w$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{|\widehat{\nabla} u|^2 + 1}} \left(\delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2}\right) \widehat{\nabla}_{ij}^2 u - \langle \widehat{\nabla} u, x'(t) \rangle \\ &\quad - \left(\frac{1}{\sqrt{|\widehat{\nabla} w|^2 + 1}} \left(\delta^{ij} - \frac{w_i w_j}{v^2}\right) \widehat{\nabla}_{ij}^2 w - \langle \widehat{\nabla} w, x'(t) \rangle \right) \\ &= a^{ij}(\widehat{\nabla} u, x, t) \widehat{\nabla}_{ij}^2 z + a^{ij}(\widehat{\nabla} u, x, t) \widehat{\nabla}_{ij}^2 u - a^{ij}(\widehat{\nabla} w, x, t) \widehat{\nabla}_{ij}^2 w. \end{aligned}$$

Principio de no colisión 6

Pero

$$\begin{aligned} a^{ij}(\widehat{\nabla} u, x, t) - a^{ij}(\widehat{\nabla} w, x, t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left(a^{ij}(s \widehat{\nabla} u + (1-s) \widehat{\nabla} w, x, t) \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial a^{ij}}{\partial y^k} (\widehat{\nabla}(u-w))^k ds = \frac{\partial z}{\partial x^k} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y^k} \left(a^{ij}(s \widehat{\nabla} u + (1-s) \widehat{\nabla} w, x, t) \right) ds. \end{aligned}$$

Y, sustituyendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= a^{ij}(\widehat{\nabla} u, x, t) \widehat{\nabla}_{ij}^2 z + b^k \frac{\partial z}{\partial x^k}, \text{ donde} \\ b^k &= \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y^k} \left(a^{ij}(s \widehat{\nabla} u + (1-s) \widehat{\nabla} w, x, t) \right) ds \right) \widehat{\nabla}_{ij}^2 w \end{aligned}$$

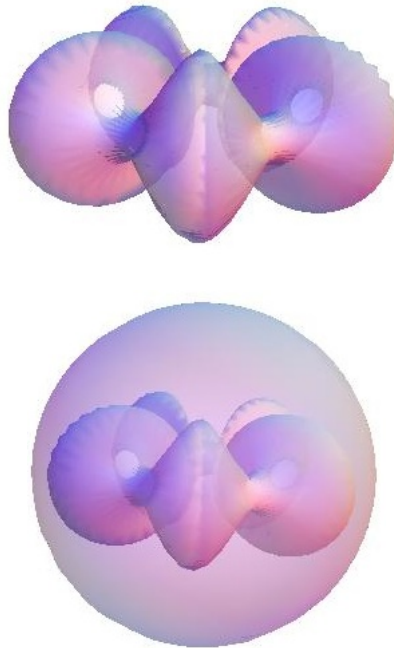
Si hemos tomado $u \leq w$, entonces en el punto en que hemos calculado, que es un punto interior de Ω y de $[0, T[$, z tiene un máximo, lo que está en contradicción con el principio de máximo fuerte para la ecuación que acabamos de obtener.

Consecuencias de PNC: Extinción

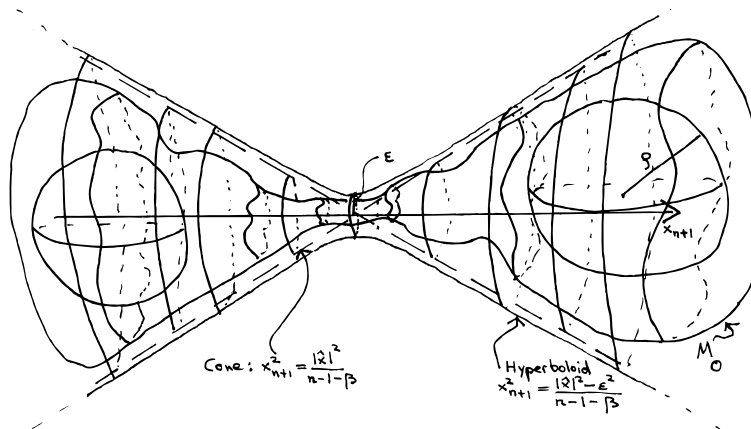
Las superficies compactas desarrollan singularidades ("y se extinguen") en un tiempo finito.

Recordemos que para una esfera de radio R , $r(t) = \sqrt{R^2 - 2 n t}$, luego desaparece en $T = \frac{R^2}{2 n}$

Por el principio de no colisión,



Consecuencias de PNC: Formación de singularidades para $n \geq 2$



Fórmulas de monotonía 1

Una fórmula de Minkowski. Usaremos $r(x) = |F(x)|$ (sin flujos) $\Delta \left(\frac{1}{2}|F|^2\right) = E_i \langle \nabla_{E_i} F, F \rangle = \langle \nabla_{E_i} E_i, F \rangle + \langle E_i, E_i \rangle = n + H \langle N, F \rangle$

Fórmula de Monotonía de Huisken $F : M \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a maximal solution of MCF, $\tau = T - t$

$$\frac{d}{dt} \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r}{4\tau}} d\mu_t = - \int_M \left(H + \frac{\langle F, N \rangle}{2\tau} \right)^2 (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r}{4\tau}} d\mu_t$$

Demostración Simplifiquemos la escritura: $u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r}{4\tau}}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M u \mu_t &= \int_M \frac{du}{dt} \mu_t + \int_M u \frac{d}{dt} \mu_t \text{ (recordar } r^2 = \langle F, F \rangle) \\ &= \int_M \left(2\pi n \frac{u}{4\pi\tau} + u \left(-\frac{r^2}{4\tau^2} - \frac{2\langle F, \frac{\partial F}{\partial t} \rangle}{4\tau} \right) \right) \mu_t + \int_M u (-H^2) \\ &= \int_M u \left(\frac{n}{2\tau} - \frac{r^2}{4\tau^2} - \frac{H \langle F, N \rangle}{2\tau} - H^2 \right) \mu_t \end{aligned} \quad (1.19)$$

Fórmulas de monotonía 2

Usando la fórmula de Minkowski

$$\begin{aligned} \int_M (n + H \langle N, F \rangle) u \mu_t &= \int_M \Delta \left(\frac{1}{2}|F|^2 \right) u \mu_t = -\frac{1}{2} \int_M \langle \nabla r^2, \nabla u \rangle \mu_t \\ &= - \int_M \left\langle r \nabla r, u \frac{-1}{2\tau} r \nabla r \right\rangle \mu_t = \int_M \frac{1}{2\tau} r^2 |\nabla r|^2 u \mu_t = \int_M \frac{1}{2\tau} |F^\top|^2 u \mu_t \end{aligned}$$

de aquí se deduce que $\int_M \frac{1}{4\tau^2} r^2 u \mu_t = \int_M \frac{1}{4\tau^2} (|F^\top|^2 + \langle F, N \rangle^2) u \mu_t = \int_M \left(\frac{n}{2\tau} + \frac{H \langle N, F \rangle}{2\tau} + \frac{\langle F, N \rangle^2}{4\tau^2} \right) u \mu_t$, que sustituido en la expresión anterior para $\frac{d}{dt} \int_M u \mu_t$ da

$$\frac{d}{dt} \int_M u \mu_t = \int_M u \left(-\frac{H \langle F, N \rangle}{\tau} - \frac{\langle F, N \rangle^2}{4\tau^2} - H^2 \right) \mu_t \quad (1.20)$$

que es la fórmula de Huisken.

2 Existencia local y global

2.1 Existencia para tiempos cortos

La ecuación 1

El MCF es una PDE, así es que vamos a escribirlo con ese aspecto (en general, no para grafos como hicimos en la primera sesión). Primero recordemos una fórmula para la curvatura media H de una inmersión F

$$\begin{aligned} HN &= g^{jk} \bar{\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial x^j}, \frac{\partial F}{\partial x^k} \right) = g^{jk} \left(\nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \frac{\partial F}{\partial x^k} - F_* \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \frac{\partial F}{\partial x^k} \right) \\ &= g^{jk} \left(\frac{\partial^2 F^a}{\partial x^j \partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^j}} \frac{\partial F}{\partial x^k} (F^a) \right) u_a = \Delta F^a u_a = \Delta F. \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde u_a es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . Por lo tanto, el MCF se puede escribir como

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F.$$

que parece una ecuación del calor (prototipo de las parabólicas). Pero solo “parece”, porque Δ depende de $g_t = F_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle$. Para saber exactamente de que tipo es esta ecuación hay que escribirla en coordenadas y calcular su símbolo.

La ecuación 2

$$\begin{aligned} \Delta F^a &= g^{ij} (\nabla_{ij}^2 F^a) = g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} F^a - \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) F^a \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 F^a}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \right) \\ &= g^{ij} \frac{\partial^2 F^a}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right) \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \text{ (y usando } g_{ij} = \frac{\partial F^a}{\partial x^i} \frac{\partial F^a}{\partial x^j} \text{)} \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 F^a}{\partial x^i \partial x^j} - g^{k\ell} \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \frac{\partial F^b}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 F^b}{\partial x^i \partial x^j} \right). \end{aligned}$$

Para calcular el símbolo de este operador, calculamos primero su linealizado \mathfrak{L} en F^a actuando sobre Y^a :

$$\mathfrak{L}Y^a = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g_s^{ij} \left(\frac{\partial^2 (F^a + sY^a)}{\partial x^i \partial x^j} - g_s^{k\ell} \frac{\partial (F^a + sY^a)}{\partial x^k} \frac{\partial (F^b + sY^b)}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 F^b}{\partial x^i \partial x^j} \right)$$

Observemos primero que de $g_s^{ij} g_{s^j k} = \delta_k^i$ se deduce $\frac{\partial g_s^{ij}}{\partial s} \Big|_{s=0} = g^{kj} g^{il} (Y_j^a F_k^a + F_\ell^a Y_k^a)$. Aprovechando este cálculo para hacer la derivada:

La ecuación 3

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}Y^a &= g^{kj} g^{il} (Y_\ell^a F_k^a + F_\ell^a Y_k^a) \left(\frac{\partial^2 (F^a)}{\partial x^i \partial x^j} - g^{k\ell} \frac{\partial (F^a)}{\partial x^k} \frac{\partial (F^b)}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 F^b}{\partial x^i \partial x^j} \right) \\ &\quad + g^{ij} \frac{\partial^2 Y^a}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} g^{r\ell} g^{ku} (Y_u^a F_r^a + F_r^a Y_u^a) \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \frac{\partial F^b}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 F^b}{\partial x^i \partial x^j} \\ &\quad + g^{ij} g^{k\ell} \left(\frac{\partial F^a}{\partial x^k} \frac{\partial F^b}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 Y^b}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial Y^a}{\partial x^k} \frac{\partial F^b}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 F^b}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \frac{\partial Y^b}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 F^b}{\partial x^i \partial x^j} \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 Y^a}{\partial x^i \partial x^j} - g^{k\ell} \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \frac{\partial F^b}{\partial x^\ell} \frac{\partial^2 Y^b}{\partial x^i \partial x^j} \right) + \left(\text{términos con derivadas} \right) \text{ (2.2)} \\ &\quad \text{en } Y^a \text{ de orden inferior} \end{aligned}$$

Por lo tanto el símbolo de \mathfrak{L} (y de Δ es :

$$\sigma(\mathfrak{L})(u, \xi)(v) = g^{ij} \left(\delta^{ab} - g^{k\ell} \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \frac{\partial F^b}{\partial x^\ell} \right) \xi_i \xi_j v^b u_a$$

La ecuación del MCF es parabólica si $\langle \sigma(\mathfrak{L})(u, \xi)(v), v \rangle \geq \lambda |\xi|^2 |v|^2$, $\lambda > 0$, para todo $\xi \in TM$ y todo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. En nuestro caso, cuando $v = \frac{\partial F}{\partial x^r}$, se tiene

La ecuación 4

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma(\mathcal{L})(u, \xi)(v), v \rangle &= g^{ij} \xi_i \xi_j \left(\frac{\partial F^a}{\partial x^r} \frac{\partial F^a}{\partial x^r} - g^{k\ell} \frac{\partial F^a}{\partial x^k} \frac{\partial F^b}{\partial x^\ell} \frac{\partial F^b}{\partial x^r} \frac{\partial F^a}{\partial x^r} \right) \\
 &= g^{ij} \xi_i \xi_j \left(\left| \frac{\partial F}{\partial x^r} \right|^2 - g^{k\ell} \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^k}, \frac{\partial F}{\partial x^r} \right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^\ell}, \frac{\partial F}{\partial x^r} \right\rangle \right) \\
 &= g^{ij} \xi_i \xi_j \left(\left| \frac{\partial F}{\partial x^r} \right|^2 - \left| \frac{\partial F}{\partial x^r} \right|^2 \right) = 0. \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Luego $\sigma(\mathcal{L})$ se anula a lo largo de las direcciones $v = \frac{\partial F}{\partial x^r}$ que son tangentes a la inmersión y que, como veremos, corresponden al hecho de que el MCF no cambia geoméricamente si hacemos, en cada instante t , un cambio de parametrización de M_t . Para poder aplicar la teoría de las PDE parabólicas hemos de fijar de alguna manera esas parametrizaciones.

Evoluciones equivalentes salvo difeomorfismos 1

$F : M \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ solución del MCF y $\phi_t : M \rightarrow M$ familia de difeomorfismos, $\tilde{F} : M \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $\tilde{F}(x, t) = F(\phi(x, t), t)$ verifica la ecuación

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + F_* \frac{\partial \phi}{\partial t} = HN + F_* \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ de donde } \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}, N \right\rangle = H$$

Esta es, pues, la ecuación que verifican todos los flujos que difieren del MCF por una familia de difeomorfismos. Recíprocamente, si \tilde{F} es un flujo solución de $\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}, N \right\rangle = H$, definamos la familia ϕ_t^{-1} de difeomorfismos de M solución del problema de ODE

$$\frac{\partial \phi_t^{-1}}{\partial t} = -\tilde{F}_*^{-1} \left(\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \right)^\top \circ \phi_t^{-1} \right), \quad \phi_0^{-1} = \text{Identidad},$$

si ahora definimos $F(x, t) = \tilde{F}(\phi_t^{-1}(x), t)$,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + F_* \frac{\partial \phi_t^{-1}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \right)^\top \circ \phi_t^{-1} = \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}, N \right\rangle N = HN.$$

Evoluciones equivalentes salvo difeomorfismos 2

Luego las soluciones equivalentes al MCF salvo difeomorfismos son exactamente las soluciones de $\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}, N \right\rangle = H$. Pero la aplicación de la teoría parabólica a una ecuación de este tipo tiene los mismos problemas que la del MCF. Vamos a seleccionar una entre ellas que sea solución de una PDE parabólica. Observemos primero que toda solución de una ecuación de la forma $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = HN + V$ (con $V : M \times [0, T[\rightarrow TM$ una familia de campos vectoriales) es solución de la ecuación anterior. Vamos a seleccionar un V de modo que la ecuación $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = HN + V$ tenga solución única. Si lo logramos, esto determinará una

exactamente una solución F del MCF que difiere de \tilde{F} por la familia de difeomorfismos determinada por V (que es, en este caso, la parte tangencial de $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}$) como en la transparencia anterior. Pero esta será la única solución del MCF, salvo difeomorfismos, como ya hemos visto.

Existencia y “unicidad” de la solución

La parte del operador Δ_{g_t} que provoca la degeneración de su símbolo es $-g^{ij}(\nabla_{\partial_i}\partial_j)X^a$. Por lo tanto, si tomamos el campo vectorial $V = g^{ij}(\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}^0\partial_j)$, con ∇^0 la conexión de Levi-Civita de g_0 y definimos el flujo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}^a}{\partial t} &= HN^a + V(\tilde{F}^a) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \tilde{F}^a}{\partial x^i \partial x^j} - \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tilde{F}^a \right) \\ &\quad + g^{ij} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^0 \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tilde{F}^a \\ &= g^{ij} \frac{\partial^2 \tilde{F}^a}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^0 \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tilde{F}^a \end{aligned} \quad (2.4)$$

y el símbolo del correspondiente operador es $\langle \sigma(\mathfrak{L})(x, \xi)v, v \rangle = g^{ij}\xi_i\xi_j|v|^2$, por lo tanto se trata de una ecuación parabólica, que tiene una solución única que verifica $\tilde{F}_0 = F_0$, que da una solución del MCF con condición inicial F_0 .

2.2 Existencia a largo plazo (global)

Esquema prolongación solución

Teorema: Si M es compacta sin borde, existe solución del MCF mientras $|\alpha|$ acotada. Es decir, si $[0, T[$ es el intervalo maximal donde la solución está definida, o bien $T = \infty$, o bien $\lim \max_{x \in M} |A|^2 = \infty$

Estrategia de la demostración: Sea $F(\cdot, t)$ definida en $[0, T[$. Si $|\alpha|$ está acotada en $[0, T[$ por una cota independiente de $t \in [0, T[$,

- 1 $F(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow T} F(\cdot, T)$ continua (de modo uniforme).
- 2 Si $F(\cdot, T)$ es C^1 entonces $F(\cdot, T)_*$ es inyectiva
- 3 $F(\cdot, T)$ es C^∞

En resumen, tendríamos *If $T < \infty$, then X_t converges (as $t \rightarrow T$, in the C^∞ -topology) to a unique smooth limit X_T which represents a smooth hypersurface.*

Tomada $X(\cdot, T) = \lim_{t \rightarrow T} X(\cdot, t)$ C^∞ como nueva condición inicial del flujo permite prolongarlo más allá de T .

Paso 1

Si $|A|^2 \leq C^2$, entonces $|H|^2 \leq n|A|^2 \leq nC^2$ para todo $0 \leq s \leq t < T$ y

$$\begin{aligned} \text{dist}(F(\cdot, t), F(\cdot, s)) &= \sup_{x \in M} |F(x, t) - F(x, s)| \\ &\leq \sup_{x \in M} \int_s^t \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| dt = \sup_{x \in M} \int_s^t |H| dt \leq \sqrt{n}C(t - s) \end{aligned}$$

y, del mismo modo, $|F(\cdot, t)| < \sqrt{n}CT < \infty$,

luego F_t es acotada y de Cauchy, luego converge uniformemente a una función continua F_T cuando $t \rightarrow T$.

Paso 2 **1**

Lema[Hamilton, 1982] Sea $\{g_t\}_{t \in [0, T]}$ una familia de métricas sobre M . Si $\int_0^T \max_M \left| \frac{\partial g_t}{\partial t} \right| dt \leq C < \infty$, entonces las métricas g_t para diferentes tiempos son equivalentes y convergen uniformemente (cuando $t \rightarrow T$) a una métrica g_T que es continua y equivalente.

Demo: Dados $0 \neq v \in T_x M$, $t_0 \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{g_{t_0}(v, v)}{g_0(v, v)} \right| &= \left| \int_0^{t_0} \frac{\partial_t g_t(v, v)}{g_t(v, v)} dt \right| = \left| \int_0^{t_0} \partial_t g_t \left(\frac{v}{|v|_t}, \frac{v}{|v|_t} \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial g_t}{\partial t} \right|_t dt \leq C, \text{ luego } e^{-C} g_0(v, v) \leq g_{t_0}(v, v) \leq e^C g_0(v, v) \end{aligned}$$

lo que prueba que las métricas son equivalentes. Definimos ahora $f(x, v) = \lim_{t \rightarrow T} g_t(v, v)$, que existe porque $g_t = \langle F_{t*}, F_{t*} \rangle$.

A partir de f , definimos $g_T(x)(v, w)$ por polarización. De este modo tenemos que $g_t \xrightarrow{t \rightarrow T} g_T$ y g_T está acotada por ambos lados, luego g_T es una métrica no degenerada sobre M . □

Paso 2 **2**

Usaremos esto para probar que si el límite F_T de F_t es diferenciable, entonces su diferencial es inyectiva.

La familia de métricas que tenemos asociada a las inmersiones es $g_t = \langle F_{t*}, F_{t*} \rangle$ y, usando la ecuación de evolución de g por el MCF,

$$\int_0^T \max_{M_t} \left| \frac{\partial g_t}{\partial t} \right| dt = \int_0^T \max_{M_t} |2H_t \alpha_t| dt \leq 2\sqrt{n}C^2T$$

luego podemos aplicar el lema para concluir que las g_t convergen a una métrica no degenerada g_T . Si la convergencia de F_t a F_T es C^1 , entonces $g_t = \langle F_{t*}, F_{t*} \rangle$ converge también a $\langle F_{T*}, F_{T*} \rangle$, luego $g_T = \langle F_{T*}, F_{T*} \rangle$ y, como g_T es no degenerada, entonces F_{T*} es inyectiva.

Paso 3 **1**

En las próximas transparencias mostraremos que si $|A|^2$ está acotado, entonces $|\nabla^m A|^2$ también lo está para todo m y, como consecuencia, también $\left| \frac{\partial \nabla^m F}{\partial t} \right|$. (explicar significado de $\nabla^m F$). Supuesto esto, se tiene:

$$|\nabla^m F(\cdot, t) - \nabla^m F(\cdot, \tau)| \leq \int_\tau^t \sup_{x \in M} \left| \frac{\partial \nabla^m F}{\partial t} \right| dt \leq C(m, T)(t - \tau).$$

De aquí se deduce que el límite F_T es C^m para todo m .

Vamos a ver que se tienen las acotaciones anunciadas. Primero necesitamos algunas fórmulas de evolución más y, para ello, la siguiente fórmula de G.R.:

Lema For any tensor A ,

$$-\nabla\Delta A + \Delta\nabla A = Rm * \nabla A + \nabla Rm * A,$$

where, given two tensors A and B , $A * B$ denote some linear combinations of some contractions of $A \otimes B$

Con respecto a esta notación: $|A * B| \leq c(n)|A||B|$.

Paso 3 **2**

Aunque se puede calcular directamente la evolución de ∇ , por comodidad de cálculo, vamos a obtener en su lugar la

Lemma 3 (Evolution of the Christoffel symbols).

$$\frac{\partial\Gamma_t}{\partial t} = A_t * \nabla A_t \tag{2.5}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial t} &= \frac{1}{2}g^{il} \left\{ \partial_j \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial t} \right) + \partial_k \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial t} \right) - \partial_l \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial t} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{il}}{\partial t} \left\{ \frac{\partial g_{kl}}{\partial j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial l} \right\} \\ &= -g^{il} \{ \partial_j (H_t \alpha_{kl}) + \partial_k (H_t \alpha_{jl}) - \partial_l (H_t \alpha_{jk}) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} H_t \alpha^{il} \left\{ \frac{\partial g_{kl}}{\partial j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial l} \right\} \\ &= A_t * \nabla A_t \end{aligned}$$

Evolution of the higher derivatives of A_t **1**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^m A_t) &= \Delta (\nabla^m A_t) + K(m, n) \nabla^m A_t \\ &\quad + \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A_t * \nabla^j A_t * \nabla^k A_t. \end{aligned}$$

Let us begin by proving the above formula for $m = 1$. Using the definition of covariant derivative, and then commuting space and time derivatives,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla A_t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\partial A_t + \Gamma_t * A_t) = \nabla \left(\frac{\partial A_t}{\partial t} \right) + \frac{\partial\Gamma_t}{\partial t} * A_t \\ &= \nabla (\Delta A_t + A_t * A_t * A_t + K(n)A_t) + A_t * \nabla A_t * A_t \end{aligned}$$

Applying now Lemma in order to commute the covariant derivative and the laplacian, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla A_t) &= \nabla\Delta A_t + \nabla A_t * A_t * A_t + K(m, n)\nabla A_t + A_t * \nabla A_t * A_t \\ &= \Delta\nabla A_t + Rm * \nabla A_t + A_t * \nabla Rm + \nabla A_t * A_t * A_t + K(n)\nabla A_t \\ &= \Delta\nabla A_t + \nabla A_t * A_t * A_t + K(n)\nabla A_t \end{aligned}$$

where the last equality follows from $Rm = A_t * A_t$ (i.e. by the Gauss equation applied to a submanifold of \mathbb{R}^{n+1}).

Evolution of the higher derivatives of A_t2

Reasoning by induction over m , let us assume that (??) is true for m . Then we have to prove that it is also satisfied for $m + 1$. Indeed,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^{m+1} A_t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla(\nabla^m A_t)) = \nabla \left(\frac{\partial \nabla^m A_t}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Gamma_t}{\partial t} * \nabla^m A_t \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \nabla \left(\frac{\partial \nabla^m A_t}{\partial t} \right) + A_t * \nabla A_t * \nabla^m A_t \\ &= -\nabla \Delta (\nabla^m A_t) + K(m, n) \nabla^{m+1} A_t + \sum_{i+j+k=m+1} \nabla^i A_t * \nabla^j A_t * \nabla^k A_t, \end{aligned}$$

where we have used the hypothesis of induction in the last step. Now, again by the auxiliary lemma, we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^{n+1} A_t) &= \Delta (\nabla^{n+1} A_t) + Rm * \nabla^{n+1} A_t + \nabla Rm * \nabla^n A_t + K(m, n) \nabla^{n+1} A_t \\ &\quad + \sum_{i+j+k=n+1} \nabla^i A_t * \nabla^j A_t * \nabla^k A_t \\ &= \Delta (\nabla^{n+1} A_t) + A_t * A_t * \nabla^{n+1} A_t + \nabla A_t * A_t * \nabla^n A_t + K(m, n) \nabla^{n+1} A_t \\ &\quad + \sum_{i+j+k=n+1} \nabla^i A_t * \nabla^j A_t * \nabla^k A_t. \end{aligned}$$

Thus, including the second and third addend in the last and summatory, respectively, we reach the desired formula.

Evolution of the higher derivatives of A_t3

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m A_t|^2 &= \Delta |\nabla^m A_t|^2 - 2|\nabla^{m+1} A_t|^2 + K(m, n) |\nabla^m A_t|^2 \\ &\quad + \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A_t * \nabla^j A_t * \nabla^k A_t * \nabla^m A_t. \end{aligned}$$

Demostración $\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m A_t|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla^m A_t, \nabla^m A_t \rangle$

$$= 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^m A_t), \nabla^m A_t \right\rangle + \left(\frac{\partial g^\sharp \otimes \cdots \otimes g^\sharp}{\partial t} \right) (\nabla^m A_t, \nabla^m A_t)$$

Usando las ecuaciones de evolución anteriores,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m A_t|^2 &= 2 \langle \Delta (\nabla^m A_t), \nabla^m A_t \rangle + K |\nabla^m A_t|^2 \\ &\quad + \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A_t * \nabla^j A_t * \nabla^k A_t * \nabla^m A_t + 2H_t A_t * \nabla^m A_t * \nabla^m A_t \\ &= \Delta |\nabla^m A_t|^2 - 2|\nabla^{m+1} A_t|^2 + K |\nabla^m A_t|^2 \\ &\quad + \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A_t * \nabla^j A_t * \nabla^k A_t * \nabla^m A_t + 2H_t A_t * \nabla^m A_t * \nabla^m A_t \end{aligned}$$

The stated formula follows by including the last addend in the suitable summatories.

Evolution of the higher derivatives of $|A_t|$4

As a consequence of the above evolution formula for the higher derivatives of the shape operator, usando $|A * B| \leq c(n)|A||B|$, we have

Corollary 4. *The derivatives of order $m \geq 0$ of the second fundamental form satisfy*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m A_t|^2 &\leq \Delta_t |\nabla^m A_t|^2 - 2|\nabla^{m+1} A_t|^2 + K(m, n) |\nabla^m A_t|^2 \\ &\quad + c_1 \sum_{i+j+k=m} |\nabla^i A_t| |\nabla^j A_t| |\nabla^k A_t| |\nabla^m A_t| \end{aligned} \quad (2.6)$$

where c_1 only depends on n and m .

Vamos a usar estas acotaciones para probar que $|\alpha|^2$ acotado implica $|\nabla^m A|^2$ acotado.

$|A_t|$ acotado implica $|\nabla^m A_t|$ acotado 1

If there is a constant $C_0 = C_0(n, M_0)$ such that $|A_t|^2 \leq C_0$, then for every $m > 0$, there is a constant $C_m = C_m(n, M_0)$ such that

$$|\nabla^m A_t|^2 \leq C_m \quad (2.7)$$

Demostraci3n First, observe that we suppose that the case $m = 0$ is proved. Then assume that $|\nabla^s A_t| \leq C_m$ for every $s \leq m$. Using this in the evolution equation of $|\nabla^{m+1} A_t|$, we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^{m+1} A_t|^2 &\leq \Delta_t |\nabla^{m+1} A_t|^2 + K |\nabla^{m+1} A_t|^2 \\ &\quad + c_1 P_3(C_0, C_1, \dots, C_m) |\nabla^{m+1} A_t| + c_1 P_2(C_0) |\nabla^{m+1} A_t|^2 \\ | \text{donde } P_i \text{ denota un polinomio de orden } i \text{ de coeficientes positivos} | \\ &= \Delta_t |\nabla^{m+1} A_t|^2 + K_1 (|\nabla^{m+1} A_t|^2 + |\nabla^{m+1} A_t|) \\ &\leq \Delta |\nabla^{m+1} A_t|^2 + |K_1| ((|\nabla^{m+1} A_t| + 1)^2 - |\nabla^{m+1} A_t|) \\ &\leq \Delta |\nabla^{m+1} A_t|^2 + |K_1| (|\nabla^{m+1} A_t| + 1)^2 \leq \Delta_t |\nabla^{m+1} A_t|^2 + K_2 (|\nabla^{m+1} A_t|^2 + 1), \end{aligned}$$

where $K_1 = K_1(n, m, M_0) = \max\{c_1 P_2 + K, c_1 P_3\}$ and $K_2 = 2|K_1|$. The last inequality follows from the facts that, if $|\nabla^{m+1} A_t| < 1$ there is nothing to prove and, if $|\nabla^{m+1} A_t| \geq 1$, then $|\nabla^{m+1} A_t|^2 \geq |\nabla^{m+1} A_t|$.

$|A_t|$ acotado implica $|\nabla^m A_t|$ acotado 2

Next we set $f_t := |\nabla^{m+1} A_t|^2 + N |\nabla^m A_t|^2$, being N a constant to be specified later. If we take time derivatives of f_t , the above computation yields

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \leq \Delta_t |\nabla^{m+1} A_t|^2 + K_2 (|\nabla^{m+1} A_t|^2 + 1) + N \frac{\partial}{\partial t} |\nabla^m A_t|^2 \quad (2.8)$$

Notice that the last addend on the right hand side of the above inequality can be estimated using again (2.6) and the hypothesis of induction. In fact,

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\nabla^m A_t|^2}{\partial t} &= \Delta_t |\nabla^m A_t|^2 - 2|\nabla^{m+1} A_t|^2 + \underbrace{K C_m + c_1 C_m^4 + c_2 C C_m^3}_{=: K_3 = K_3(n, m, \lambda, M_0)}. \end{aligned}$$

Substituting in (2.8), we get

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \leq \Delta_t f_t + K_2 (|\nabla^{m+1} A_t|^2 + 1) - 2N |\nabla^{m+1} A_t|^2 + NK_3$$

$|A_t|$ **acotado implica** $|\nabla^m A_t|$ **acotado** **3**

If we choose $N \geq 2K_2$, then

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t}{\partial t} &\leq \Delta_t f_t + \left(\frac{N}{2} - 2N\right) |\nabla^{m+1} A_t|^2 + K_4 = \Delta_t f_t - \frac{3N}{2} |\nabla^{m+1} A_t|^2 + K_4 \\ &\leq \Delta_t f_t - N |\nabla^{m+1} A_t|^2 + K_4, \end{aligned}$$

where $K_4 = NK_3 + K_2$. By the definition of f_t , we reach

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \leq \Delta_t f_t - N f_t + N^2 |\nabla^m A_t|^2 + K_4 \leq \Delta f - N f + N^2 C_m + K_4$$

$|A_t|$ **acotado implica** $|\nabla^m A_t|$ **acotado** **4**

Now we are in position to apply a scalar maximum principle for the last inequality. This allows us to conclude that f_t is bounded from above by the solution of the following initial value problem

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -N\varphi + D \\ \varphi(0) = \max_{M_0} f \end{cases} \quad (\text{being } D = N^2 C_m + K_4)$$

Thus

$$f_t \leq e^{-Nt} \max_{M_0} f + \frac{D}{N} \leq \max_{M_0} f + \frac{D}{N} = \max_{M_0} |\nabla^{m+1} A_t|^2 + NC_m + \frac{D}{N} =: C_{m+1}$$

Finally, the statement follows because, by definition of f_t , $|\nabla^{m+1} A_t|^2 \leq f_t$.

Según indicamos en el paso 3.1, sólo nos queda probar que $|A|$ y $|\nabla^m A|$ acotados implican $\left| \frac{\partial \nabla^m F}{\partial t} \right|$ acotados.

$|A_t|$ **acotado implica** $\left| \frac{\partial \nabla^m F}{\partial t} \right|$ **acotado** **1**

Para $m = 1$ entendíamos $\bar{\nabla} F$, y se tiene, $\frac{\partial \bar{\nabla} F}{\partial t}(X) = \bar{\nabla}_X \frac{\partial F}{\partial t} = (XH)N + H\bar{\nabla}_X N = \langle \nabla H, X \rangle N - HAX$. De donde:

$$\left| \frac{\partial \bar{\nabla} F}{\partial t} \right|^2 = |\nabla H|^2 + H^2 |A|^2$$

Para $m = 2$, $\frac{\partial \nabla^2 F}{\partial t}(X, Y) = \frac{\partial \nabla \bar{\nabla} F}{\partial t}(X, Y) = \frac{\partial}{\partial t} ((\nabla_X \bar{\nabla} F)(Y))$, que, calcu-

lado en coordenadas sin escribir las coordenadas,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nabla^2 F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla(\bar{\nabla} F)) = \frac{\partial}{\partial t} (\partial(dF) + \Gamma * \partial F) \\
&= \partial \left(\frac{\partial}{\partial t} (dF) \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} * dF + \Gamma * \frac{\partial}{\partial t} (dF) = \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} (dF) \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} * dF. \\
&= \nabla(dH) * N + dH * \nabla N + \nabla A * A + A * \nabla A * dF \\
&= \nabla^2 A * N + \nabla A * A + A * \nabla A * dF.
\end{aligned}$$

$|A_t|$ **acotado implica** $\left| \frac{\partial \bar{\nabla}^m F}{\partial t} \right|$ **acotado****2**

Prove by induction the following equality: for $m \geq 2$, it holds

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^m F) = \nabla^m A * N + \sum_{\substack{i+j+k=m \\ k \neq 0, m}} \nabla^i A * \nabla^j A * \nabla^k F + \sum_{i+j=m-1} \nabla^i A * \nabla^j A.$$

Just before we have proved the result for $m = 1$, $m = 2$. Let us now assume, by hypothesis of induction, that “above” is true for m , and compute

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\nabla^{m+1} F)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla(\nabla^m F)) = \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^m F) \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} * \nabla^m F \\
&\stackrel{(\text{??})}{=} \underbrace{\nabla^{m+1} A * N + \underbrace{\nabla^m A * A}_{(a)}}_{(3)} + \underbrace{\sum_{\substack{i+j+k=m+1 \\ k \neq 0, m+1}} \nabla^i A * \nabla^j A * \nabla^k F}_{(1)} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i+j=m} \nabla^i A * \nabla^j A}_{(3)} + \underbrace{A * \nabla A * \nabla^m F}_{(c)},
\end{aligned}$$

where we have also used the evolution of Γ . So the formula for $m + 1$ follows if we realize that the addends (a) and (c) can be plugged into the sums (3) and (1), respectively.

$|A_t|$ **acotado implica** $\left| \frac{\partial \bar{\nabla}^m F}{\partial t} \right|$ **acotado****3**

Once formula has been established, we can use it to estimate

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^m F) \right| &\leq |\nabla^m A| + c(n, m) \left(\sum_{\substack{i+j+k=m \\ k \neq 0, m}} |\nabla^i A| |\nabla^j A| |\nabla^k F| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i+j=m-1} |\nabla^i A| |\nabla^j A| \right) \\
&\leq C_m^{1/2} + c(n, m) \left(\tilde{C}_m^2 \sum_{j=1}^{m-1} |\nabla^j F| + \sqrt{n} C_0 \tilde{C}_m \sum_{k=1}^{m-1} |\nabla^k F| \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{n} C_0 C_{m-1}^{1/2} + \tilde{C}_{m-1}^2 c_2(m) \right),
\end{aligned}$$

being $\tilde{C}_m := \max_{0 \leq j \leq m} \{\sqrt{C_j}\}$ and C_j are the upper bounds coming from (??). Hence

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^m F) \right| \leq B_1 + B_2 \sum_{k=1}^{m-1} |\nabla^k F|$$

for B_1 and B_2 depending on n, m, C_0 and M .

$|A_t|$ acotado implica $\left| \frac{\partial \bar{\nabla}^m F}{\partial t} \right|$ acotado 7

With this aim, assume that $|\nabla^j F| \leq K_j$ for all $j < m$. Then

$$\left| \frac{\partial (\nabla^m F)}{\partial t} \right| \leq B_1 + B_2 \sum_{j=1}^{m-1} K_j =: B_m(n, m, C_0, M).$$

Esto acaba la hipótesis de inducción y prueba lo que buscábamos.

Now since X_T is smooth, there is a solution \tilde{X}_t of (??) satisfying $\tilde{X}_0 = X_T$ and which exists on $[0, \varepsilon[$ for some $\varepsilon > 0$. As $X_t \rightarrow X_T$ smoothly, it follows that

$$\bar{X}_t := \begin{cases} X_t & 0 \leq t < T \\ \tilde{X}_{t-T} & T \leq t < T + \varepsilon \end{cases} .$$

is a smooth solution of (??) such that $\bar{X}_0 = X_0$. This contradicts the assumption that T is maximal.

Addenda a...

las soluciones del MCF, salvo difeomorfismos, son exactamente las soluciones de $\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}, N \right\rangle = H$.

Esto, no solo ayuda a probar la existencia y "unicidad" de la solución, sino que también permite

usar en cada caso la ecuación que resulte más cómoda.

3 Clasificación de las singularidades de tipo I. Solitones.

Singularidades tipo I 1

Lema Si F es una solución maximal del MCF en $[0, T[$, entonces $U_t = \max_{x \in M_t} |A_t|^2 \geq \frac{1}{2(T-t)}$ **Dem** Como $\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4$, por el

ppio de máximo, para todo $t \in [t_0, T[$, U_t es menor que la solución de $\varphi' = 2\varphi^2$ que verifica $\varphi(t_0) = U_{t_0}$, que resolviendo es $-\frac{1}{\varphi} = 2t + C$, $\varphi = \frac{1}{K - 2t}$, $K > 0$,

luego, si $U_{t_0} = \varphi(t_0) = \frac{1}{K - 2t_0}$, se tiene $U(t) < \frac{1}{K - 2t}$ para $t > t_0$.

Si $U_{t_0} < \frac{1}{2T - 2t_0}$ entonces existe un $k_0 > 2T$ tal que $U_{t_0} = \frac{1}{k_0 - 2t_0}$.

Si fuese $U_{t_0} < \frac{1}{2(T-t_0)}$, por la comparación anterior $U(t) < \frac{1}{k_0 - 2t}$ y $\lim_{t \rightarrow T} U_t < \frac{1}{k_0 - 2T} < \infty$ y T no sería un tpo maximal. \square

Definición Diremos que un flujo maximal en $[0, T[$ es d tipo I si existe un $C > 0$ tal que $\max_{x \in M_t} |A|^2 \leq \frac{C}{T-t}$.

Singularidades tipo I 2

Para estudiar la forma de F cuando $t \rightarrow T$, tomemos un punto p tal que exista una sucesión (x_n, t_n) tal que $F(x_n, t_n) \xrightarrow{t_n \rightarrow T} p$ y $|A_{t_n}(x_n)| \xrightarrow{t_n \rightarrow T} \infty$ y reescalamos en tiempo y en espacio así:

$$\tilde{F}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2(T-t)}}(F(x, t) - p), \quad \tau = T - t = Te^{-2\tilde{t}}, \quad \tilde{t} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{T-t}{T} \right)$$

$$\tilde{F}(x, \tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{2Te^{-2\tilde{t}}}}(F(x, t(\tilde{t})) - p)$$

$\tilde{F}_{\tilde{t}}$ difiere de F_t por una traslación $-p$ y una homotecia de razón $\frac{1}{2(T-t)}$, luego $|\nabla^m \tilde{A}|^2 = 2(T-t)|\nabla^m A|^2$ para todo m, luego

$$|\tilde{A}|^2 \leq 2(T-t)\frac{C}{T-t} = 2C$$

Singularidades tipo I 3

Derivando \tilde{F} respecto de t , $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = (2(T-t))^{3/2}(F-p) + \frac{1}{\sqrt{2(T-t)}}HN = 2(T-t)\tilde{F} + 2(T-t)\tilde{H}\tilde{N}$, mientras que $\frac{dt}{d\tilde{t}} = Te^{-2\tilde{t}} = T-t$, luego \tilde{F} verifica la ecuación

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{H}\tilde{N} + \tilde{F} \tag{3.1}$$

(¿es un flujo asociado a una densidad?) De aquí, calculando como en las acotaciones de $|\nabla^m A|^2$ obtenidas a partir de las de $|A|^2$ se comprueba que también $|\nabla^m \tilde{A}|^2$ están acotadas.

El mismo argumento hecho para el MCF muestra que $\tilde{F}_{\tilde{t}} \xrightarrow{\tilde{t} \rightarrow \infty} \tilde{F}_{\infty}$.

Singularidades tipo I 4

Y, usando la fórmula de monotonía de Huisken, las relaciones entre H y \tilde{H} y entre F y \tilde{F} , μ_t y $\tilde{\mu}_t$ y $\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d\tilde{t}}{d\tau} \frac{d}{d\tilde{t}} = 2\tau \frac{d}{d\tilde{t}}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M u \mu_t &= -2\tau \int_M \frac{1}{2\tau} (\tilde{H} + \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 u \mu_t \\ &= - \int_M (\tilde{H} + \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\tilde{r}/2} \tilde{\mu}_{\tilde{t}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $\tilde{t} > 0$,

$$-\int_{\tilde{t}}^{\infty} \int_M \tilde{u}(\tilde{H} + \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 \tilde{\mu}_{\tilde{t}} = \int_{\tilde{t}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_M \tilde{u} \tilde{\mu}_{\tilde{t}} = -\int_M \tilde{u} \tilde{\mu}_{\tilde{t}} + \int_M \tilde{u} \tilde{\mu}_{\infty}.$$

que es finito, luego $\int_M \tilde{u}(\tilde{H} + \langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle)^2 \tilde{\mu}_{\tilde{t}} \xrightarrow{\tilde{t} \rightarrow \infty} 0$, luego \tilde{M}_{∞} verifica

$$\langle \tilde{F}, \tilde{N} \rangle + \tilde{H} = 0.$$

Singularidades tipo I 5

Salvo difeomorfismos y homotecias, los límites normalizados de las soluciones de tipo I son las condiciones iniciales de las soluciones autosemejantes de la forma $F_t = a(t)F_0$ con $a'(0) < 0$ (solitones contractivos)

Enefecto: Una solución del MCF de la forma $F_t = a(t)F_0$, verifica $a'(t)F_0 = HN$, luego, en $t = 0$, $\langle F_0, N \rangle = \frac{1}{a'(0)}H = -H$ sii $a'(0) = -1$. Recíprocamente, si F_0 verifica esa ecuación, tomando F_t como antes, tenemos una solución del MCF (única salvo difeomorfismos). Los demás posibles valores negativos de $a'(0)$ los obtendremos por homotecias.

Clasificación de M compacta con $\langle F, N \rangle + H = 0$ y $H > 0$ 1

Usando una referencia local ortonormal de M con derivadas covariantes nulas en el punto de cálculo,

$$\begin{aligned} \nabla_{ij}^2 H &= E_i E_j (-\langle F, N \rangle) = -E_i \langle F, \bar{\nabla}_{E_j} N \rangle = \langle E_i, AE_j \rangle + \langle F, \bar{\nabla}_{E_i}(AE_j) \rangle \\ &= \alpha(E_i, E_j) + \langle F, \nabla_{E_i}(AE_j) \rangle + \langle F, \alpha(E_i, AE_j)N \rangle \\ &= \alpha(E_i, E_j) + \langle \nabla_{F^\top} AE_i, E_j \rangle + \langle A^2 E_i, E_j \rangle \langle F, N \rangle \\ &= \alpha(E_i, E_j) - \langle A^2 E_i, E_j \rangle H + \langle \nabla_{F^\top} AE_i, E_j \rangle. \end{aligned}$$

de donde

$$\Delta H = H - |A|^2 H + \langle F, \nabla H \rangle.$$

Para curvas da $\kappa'' = \kappa - \kappa^3 + \langle c, \kappa' c' \rangle$, ecuación integrada por Abresch-Langer que da como única curva embebida compacta la circunferencia (de radio 1 si queremos que verifique la condición de la definición).

Para $n \geq 2$, estudiemos $|A|^2/H^2$ que es constante sobre las esferas.

Clasificación de M compacta con $\langle F, N \rangle + H = 0$ y $H > 0$ 2

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{|A|^2}{H^2} \right) &= E_i \left(\frac{HE_i |A|^2 - 2|A|^2 E_i H}{H^3} \right) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \frac{|A|^2}{H^2} - \frac{\langle \nabla H, \nabla |A|^2 \rangle}{H^3} - 2 \frac{|A|^2 \Delta H}{H^3} - 3 \left\langle \frac{\nabla H}{H}, \nabla \frac{|A|^2}{H^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, de la fórmula para $\nabla^2 H$ anterior

$$\langle \alpha, \nabla^2 H \rangle = |\alpha|^2 - H \operatorname{tr} A^3 + \langle \nabla_{F^\top} \alpha, \alpha \rangle$$

y usando esto en la fórmula de $\Delta |A|^2$:

$$\begin{aligned} \Delta |A|^2 &= 2 \langle \nabla^2 H, \alpha \rangle + 2H \operatorname{tr} A^3 + 2|\nabla A|^2 - 2|A|^4 \\ &= 2|A|^2 + 2|\nabla A|^2 + 2 \langle \nabla_{F^\top} A, A \rangle - 2|A|^4 \end{aligned}$$

Clasificación de M compacta con $\langle F, N \rangle + H = 0$ y $H > 0$ 3

Y, sustituyendo las expresiones de ΔH y $\Delta |A|^2$ en la de $\Delta \left(\frac{|A|^2}{H^2} \right)$, resulta

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{|A|^2}{H^2} \right) &= E_i \left(\frac{H^2 E_i |A|^2 - 2|A|^2 H E_i H}{H^4} \right) \\ &= \dots \dots \dots \\ &= \frac{2}{H^4} \left(H^2 |\nabla A|^2 - \frac{1}{2} H \langle \nabla H, \nabla |A|^2 \rangle \right) \\ &\quad + \left\langle \nabla \frac{|A|^2}{H^2}, F \right\rangle - 3 \left\langle \nabla \frac{|A|^2}{H^2}, \frac{\nabla H}{H} \right\rangle \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\left\langle \nabla \frac{|A|^2}{H^2}, \frac{\nabla H}{H} \right\rangle = \dots = \frac{2}{H^4} \left(\frac{H}{2} \langle \nabla |A|^2, \nabla H \rangle - |A|^2 |\nabla H|^2 \right)$$

luego:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{H^4} \left(H^2 |\nabla A|^2 - \frac{1}{2} H \langle \nabla H, \nabla |A|^2 \rangle \right) - \left\langle \nabla \frac{|A|^2}{H^2}, \frac{\nabla H}{H} \right\rangle \\ &= \frac{2}{H^4} |H \nabla A - \nabla H \otimes A|^2 \end{aligned}$$

Clasificación de M compacta con $\langle F, N \rangle + H = 0$ y $H > 0$ 4

y, sustituyendo todo en la expresión que buscamos,

$$\Delta \left(\frac{|A|^2}{H^2} \right) = \frac{2}{H^4} |H \nabla A - \nabla H \otimes A|^2 + \left\langle \nabla \frac{|A|^2}{H^2}, F^\top - \frac{\nabla H}{H} \right\rangle$$

que es ≥ 0 en un punto crítico, luego, por el principio de máximo fuerte (análogo a aplicaciones subarmónicas sobre M compacta), $\frac{|A|^2}{H^2} = \text{cte}$ y $H \nabla A - \nabla H \otimes A = 0$. Como consecuencia, la parte “antisimétrica” $\beta(X, Y) = -\langle \nabla H, X \rangle \otimes AY + \langle \nabla H, Y \rangle \otimes AX$ de $H \nabla A - \nabla H \otimes A$ se ha de anular, luego

$$0 = |\beta|^2 = 2|\nabla H|^2 |A|^2 - 2|A \nabla H|^2$$

Si para calcular normas tomamos una base ortonormal en la que $e_1 = \nabla H / |\nabla H|$, $0 = |\beta|^2 = 2|\nabla H|^2 (|A|^2 - |A e_1|^2)$, de donde

o bien $\nabla H = 0$ en todo punto (finish)

o existe un punto en que $A e_2 = \dots = A e_n = 0$, en el que $H^2 = |A e_1|^2 = |A|^2$.

Pero, como, además, $\frac{|A|^2}{H^2} = \text{cte}$, se tiene $\frac{|A|^2}{H^2} = 1$ en todo punto.

Clasificación de M compacta con $\langle F, N \rangle + H = 0$ y $H > 0$ 5

Sustituyendo entonces en la ecuación de la laplaciana de H , e integrando, da

$$\Delta H = H - H^3 + \langle F, \nabla H \rangle, \quad 0 = \int_M (H - H^3 + \langle F, \nabla H \rangle) \mu.$$

tomando de nuevo para calcular e_i de derivada covariante 0 en el punto de cálculo, $\langle F, \nabla H \rangle = \langle F, e_i \rangle e_i(H) = e_i(\langle F, e_i \rangle H) - H e_i \langle F, e_i \rangle = \text{div}(\mathbf{H}F^\top) - H \langle \bar{\nabla}_{e_i} F, e_i \rangle - H \langle F, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = \text{div}(\mathbf{H}F^\top) - nH - H \langle F, N \rangle H$. Integrando y sustituyendo en la integral anterior, y usando $\langle F, N \rangle = -H$

$$0 = \int_M (H - H^3 - nH - H^2 \langle F, N \rangle) \mu = \int_M H(1 - H^2 - n + H^2) \mu < 0$$

si $n \geq 2$, lo que es una contradicción. Luego, necesariament, $H = cte$ (por la ecuación, $H = n$, y M es una esfera centrada en el origen con que medimos F y de radio 1.

Singularidades tipo I Resumen

Salvo difeomorfismos y homotecias, el límite normalizado de las soluciones de tipo I del MCF es una esfera de radio 1, y el límite del propio flujo es un punto.

4 Evolución de hipersuperficies compactas estrictamente convexas y su forma asintótica.

Conservación de la convexidad 1

Si $\alpha \geq 0$ en $t = 0$ y $\alpha > 0$ en algún punto para alguna dirección, entonces $\alpha > 0$ para $t > 0$.

En efecto: Recordemos $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \Delta \alpha - 2 H \alpha A + |A|^2 \alpha$. Si $\alpha(v, \cdot) = 0$, i.e., $Av = 0$, entonces $2 H \alpha(Av, \cdot) + |A|^2 \alpha(v, \cdot) = 0$, y $\alpha_t > 0$ para todo $t \in]0, T[$ por el ppio max fuer tens. \square

Esto permite suponer que la condición para cualquier $t_0 > 0$ es $\alpha_{t_0} > 0$. Ahora bien: *ser estrictamente convexo equivale (si M compacta) a existan ε, β tales que $0 < \varepsilon \leq 1/n < \beta < 1$ tales que*

$$\varepsilon H g \leq \alpha \leq \beta H g$$

En efecto, M estrictamente convexa y compacta sii $\alpha(V, V) \geq \varepsilon' g(V, V)$. Si Λ y λ son el máximo y el mínimo respectivamente de H en M , entonces

$$\varepsilon' g(V, V) = \frac{\varepsilon'}{H} H g(V, V) \geq \varepsilon H g(V, V) \text{ con } \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\Lambda}.$$

Por otro lado, tomando $e_1 = V/|V|$, $\frac{\alpha(V, V)}{g(V, V)} < \alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn} = H$ (el $<$ es porque $\alpha(e_i, e_i) > 0$). De aquí se deduce lo afirmado. \square

Conservación de la convexidad 2

Si en t_0 , $\varepsilon H g \leq \alpha \leq \beta H g$, el mismo pinching se tiene para todo $t > t_0$

En efecto: Definamos $M = \alpha - \varepsilon Hg$, usando las fórmulas de variación,

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} g - \varepsilon H \frac{\partial g}{\partial t} \\ &= \Delta \alpha - 2H\alpha A + |A|^2 \alpha - \varepsilon(\Delta H + |A|^2 H)g + \varepsilon H 2H\alpha \\ &= \Delta(\alpha - \varepsilon Hg) - 2H\alpha A + 2\varepsilon H^2 \alpha + |A|^2(\alpha - \varepsilon Hg)\end{aligned}$$

Si tomamos ahora v tal que $Av = \varepsilon Hv$, es claro, puesto que $-2H\alpha A + 2\varepsilon H^2 \alpha = -2H(\langle A(A - \varepsilon H)\cdot, \cdot \rangle)$, que el término independiente sale 0 y, por el ppio de max tensorial, $M \geq 0$ para todo $t > t_0$.

Conservación de la convexidad 3

Si ahora consideramos $\beta Hg - \alpha$, usando las fórmulas de variación,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta Hg - \alpha}{\partial t} &= \beta \frac{\partial H}{\partial t} g + \beta H \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ &= \beta(\Delta H + |A|^2 H)g - \beta H^2 2\alpha - \Delta \alpha + 2H\alpha A - |A|^2 \alpha \\ &= \Delta(\beta Hg - \alpha) - 2H(\langle A(\beta H - A)\cdot, \cdot \rangle + |A|^2(\beta Hg - \alpha))\end{aligned}$$

Si tomamos ahora v tal que $Av = \beta Hv$, es claro que el término independiente sale 0 y, por el ppio de max tensorial, $M \geq 0$ para todo $t > t_0$.

Lema de convexos: Si M compacta convexa y para todo $x \in M$ $\frac{k_{Nmax}}{k_{Nmin}} \leq C$, entonces $\frac{r_{ext}}{r_{int}} \leq C$.

Flujo de un convexo 1

Teorema El flujo de M compacta y convexa es de tipo I

Función soporte $\sigma = -\langle F, N \rangle$, con el origen en un punto p interior del convexo. Por el ppio de no separación, si tomamos como p el centro de una inbola, este punto permanecerá siempre interior al convexo evolucionando. Entonces F apunta hacia afuera y N hacia adentro (para que $H > 0$), luego $\sigma > 0$.

Ya calculamos cuando estudiamos los solitones $H + \langle F, N \rangle = 0$ que $\Delta \sigma = -\Delta \langle F, N \rangle = H + \langle F, \nabla H \rangle - \sigma |A|^2$, luego

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N \right\rangle - \left\langle F, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle = -H + \langle F, \nabla H \rangle = \Delta \sigma - 2H + \sigma |A|^2$$

Vamos a calcular ahora la evolución de $W = \frac{H}{\sigma - c}$, para c una constante que elegiremos después la que más nos convenga. A partir de las evoluciones de H y de σ , tenemos

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{(\sigma - c)(\Delta H + H|A|^2) - H(\Delta \sigma - 2H + \sigma |A|^2)}{(\sigma - c)^2}.$$

Flujo de un convexo2

Calculemos ahora ΔW

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{\sigma-c} \Delta H + H \Delta \left(\frac{1}{\sigma-c} \right) + 2 \left\langle \nabla H, \nabla \frac{1}{\sigma-c} \right\rangle \\ \Delta \left(\frac{1}{\sigma-c} \right) &= E_i \left(\frac{-E_i \sigma}{(\sigma-c)^2} \right) = -\frac{1}{(\sigma-c)^2} \Delta \sigma - 2 \frac{1}{\sigma-c} \left\langle \nabla \sigma, \nabla \frac{1}{\sigma-c} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{(\sigma-c)^2} \Delta \sigma - 2 \frac{1}{\sigma-c} \left\langle \nabla \sigma, \frac{1}{H} \nabla W - \frac{1}{\sigma-c} \frac{\nabla H}{H} \right\rangle \\ \Delta W &= \frac{1}{\sigma-c} \Delta H - \frac{H}{(\sigma-c)^2} \Delta \sigma - \frac{2}{\sigma-c} \left\langle \nabla \sigma, \nabla W - \frac{1}{\sigma-c} \nabla H \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \nabla H, \nabla \frac{1}{\sigma-c} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sigma-c} \left(\Delta H - \frac{H}{\sigma-c} \Delta \sigma - 2 \langle \nabla \sigma, \nabla W \rangle \right)\end{aligned}$$

Flujo de un convexo3

Sustituyendo ahora en la fórmula de evolución de W

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= \Delta W + \frac{H}{(\sigma-c)^2} \Delta \sigma + \frac{2}{\sigma-c} \langle \nabla \sigma, \nabla W \rangle + \frac{H|A|^2}{\sigma-c} - \frac{H}{(\sigma-c)^2} \Delta \sigma \\ &\quad + \frac{2H^2}{(\sigma-c)^2} - \frac{H\sigma|A|^2}{(\sigma-c)^2} \\ &= \Delta W + \frac{2}{\sigma-c} \langle \nabla \sigma, \nabla W \rangle + \frac{H|A|^2}{\sigma-c} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma-c} \right) + 2W^2, \\ &\text{(como } |A|^2 \leq \frac{H^2}{n} \text{)} \\ &\leq \Delta W + \frac{2}{\sigma-c} \langle \nabla \sigma, \nabla W \rangle - \frac{cH^3}{n(\sigma-c)^2} + 2W^2 \\ &= \Delta W + \frac{2}{\sigma-c} \langle \nabla \sigma, \nabla W \rangle - \frac{c}{n} (\sigma-c) W^3 + 2W^2 \\ &\text{(si } \sigma-c > c \text{)} \leq \Delta W + \frac{2}{\sigma-c} \langle \nabla \sigma, \nabla W \rangle - \frac{c^2}{n} W^3 + 2W^2.\end{aligned}$$

Flujo de un convexo4

Para $t_0 \in [0, T[$, sea (x_1, t_1) donde W alcanza su máximo en $M \times [0, t_0]$. En ese punto

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{\partial W}{\partial t}(x_1, t_1) &\leq \left(\Delta W + \frac{2}{\sigma-c} \langle \nabla \sigma, \nabla W \rangle + W^2 \left(2 - \frac{c^2}{n} W \right) \right) (x_1, t_1) \\ &\leq \left(W^2 \left(2 - \frac{c^2}{n} W \right) \right) (x_1, t_1)\end{aligned}$$

luego $\left(2 - \frac{c^2}{n} W \right) (x_1, t_1) \geq 0$, luego, en $M \times [0, t_0]$ se tiene $\frac{H}{\sigma-c} = W \leq$

$\sup_{M \times [0, t_0]} W \leq \frac{2n}{c^2}$, luego $H \leq 2n \frac{\sigma-c}{c^2}$ en $M \times [0, t_0]$.

Si ahora tomo p en el centro de una inbola de M_{t_0} , tengo $\sigma(x, t_0) = -\langle F, N \rangle \geq \text{dist}(p, M_{t_0}) = r_{int}(t_0)$. Además, $\sigma(x, t_0) \leq d_e(p, x) \leq \text{diámetro}_e(M_{t_0}) \leq 2r_{ext}(t_0) \leq 2Cr_{int}(t_0)$, siendo $C = \sup \frac{k_{Nmax}}{k_{Nmin}}(t_0)$. Por la hipótesis de pinching que se conserva, para v, w unitarios, $\frac{\alpha(v, v)}{\alpha(w, w)} \leq \frac{\beta H}{\varepsilon H} = \frac{\beta}{\varepsilon}$, luego $C \leq \frac{\beta}{\varepsilon}$. Resulta de aquí: $H_{t_0} \leq 2n \frac{2(\beta/\varepsilon)r_{int}(t_0) - c}{c^2}$

Flujo de un convexo5

Buscamos ahora una cota para $r_{int}(t_0)$.

M_t está contenida en una bola de radio $r_{ext}(t)$ y, por el ppio de no colisión, en un instante $t' > t$, $M_{t'}$ está contenida en una bola de radio $\sqrt{r_{ext}(t)^2 - 2n(t' - t)}$. Luego $r_{ext}(t') \leq \sqrt{r_{ext}(t)^2 - 2n(t' - t)}$ y $r_{ext}(t)^2 \geq r_{ext}(t')^2 + 2n(t' - t)$, por lo tanto $r_{ext}(t)^2 \geq 2n(T - t)$, de donde $\frac{\sqrt{2n(T - t)}}{r_{int}(t)} \leq \frac{r_{ext}(t)}{r_{int}(t)} \leq \frac{\beta}{\varepsilon}$ y

$$r_{int}(t) \geq \frac{\varepsilon \sqrt{2n(T - t)}}{\beta}$$

Si tomamos $c = r_{int}(t_0)$,

$$H_{t_0} \leq 2n \frac{(2(\beta/\varepsilon) - 1)}{r_{int}(t_0)} \leq \frac{2n\beta(2(\beta/\varepsilon) - 1)}{\varepsilon \sqrt{2n(T - t_0)}}$$

□

Flujo de un convexoResumen (Huisken 1984)

El flujo de una hipersuperficie cerrada convexa es de tipo I.

Como consecuencia

Salvo difeomorfismos y homotecias, el límite normalizado del flujo por la curvatura media de una hipersuperficie cerrada convexa es una esfera de radio 1, y el límite del propio flujo es un punto.

5 Singularidades y Flujo con cirugía

En curvas no hay singularidades

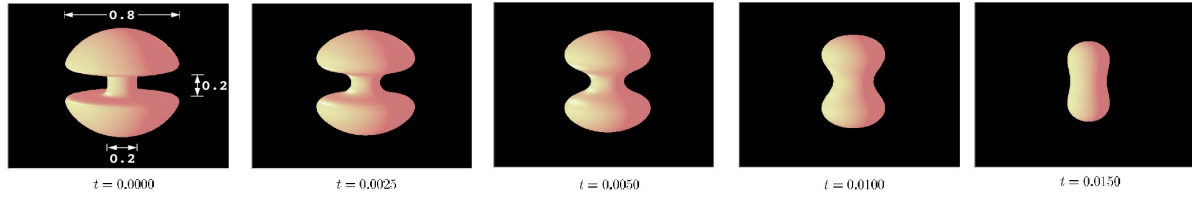
Teorema de Grayson *El FCM de cualquier curva cerrada embebida vuelve a la curva convexa en un tiempo anterior al tiempo de extinción $A/2\pi$.*

La demostración original de Grayson usa el teorema de oscilación de Sturm.

Una demostración algo más corta se basa en la técnica de los reescalamientos y la clasificación de las singularidades, de modo que estas también se pueden usar en curvas aunque solo sea para llegar a demostrar que no se dan.

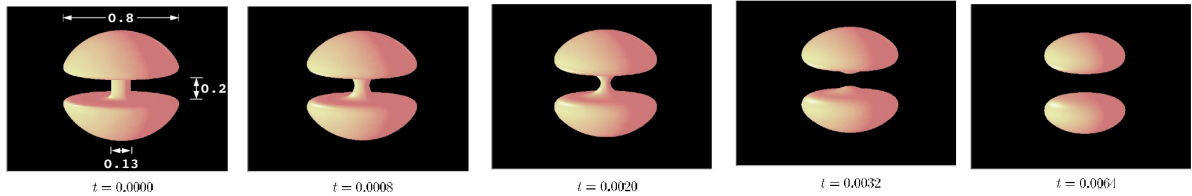
¿Cómo ocurren las singularidades?

Por la finitud del tiempo de existencia del flujo de una hipersuperficie compacta puede ocurrir



¿Cómo ocurren las singularidades?

O bien



Clasificación

- singularidades fáciles: “de tipo I”

$$\max_{F(M,t)} |\alpha|^2 \leq$$

$$\frac{C}{T-t}$$

- singularidades difíciles: “de tipo II”
son de tipo I

las que no

Singularidades de tipo I (resumen de lo visto)

Reescalamiento del flujo en entorno de punto singular

p punto singular: $\exists x \in M / F(x,t) \rightarrow p$ y $|\alpha(x,t)| \xrightarrow{t \rightarrow T} \infty$

$\tilde{F}(x, \tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{2(T-t(\tilde{t}))}}(F(x, t(\tilde{t})) - p)$, $t(\tilde{t}) = T(1 - e^{-2\tilde{t}})$ que verifica

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{F} + \tilde{H}\tilde{N}.$$

Tipo I $\implies |\tilde{\alpha}|^2 \leq 2C$ y $\tilde{F}(\cdot, \tilde{t}) \xrightarrow{\tilde{t} \rightarrow \infty} \tilde{F}_\infty(\cdot)$.

Para $H > 0$ \tilde{F}_∞ es S^n (o, no visto, $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ si no compacta)

Util porque

Si M_t , $t \in [0, T[$ es una familia de hipersuperficies compactas que evoluciona por la curvatura media y $H \geq 0$ para M_0 , entonces $H > 0$ para M_t para cada $t \in]0, T[$.

Singularidades de tipo II

Reescalamos: tomamos pares $(x_n, t_n) \in M \times [0, T - 1/n[$ tales que

$$|\alpha|^2(x_n, t_n) \left(T - \frac{1}{n} - t_n \right) = \max_{t \leq T - 1/n, x \in M} |\alpha|^2(x, t) \left(T - \frac{1}{n} - t \right).$$

Para cada n se definen los flujos (por la CM) reescalados

$$F_n(\cdot, \tilde{t}) = |\alpha|(x_n, t_n) \left(F\left(\cdot, \frac{\tilde{t}}{|\alpha|(x_n, t_n) + t_n}\right) - F(x_n, t_n) \right),$$

$$\tilde{t} \in \left[-|\alpha|(x_n, t_n) t_n, |\alpha|(x_n, t_n) \left(T - t_n - \frac{1}{n} \right) \right].$$

En una singularidad de tipo II, (intervalo variación \tilde{t}) $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}] -\infty, +\infty[$.

Singularidades de tipo II (1b)

Para $T_0 < T_1 < \infty$, $\tilde{t} \in [T_0, T_1]$ las superficies $F_n(M, \tilde{t})$ tienen $|\alpha|$ (y, por tanto, $|\nabla^m \alpha|$) uniformemente acotada para n suficientemente grande.

Por lo tanto existe una subsucesión de flujos $F_n(\cdot, \tilde{t})$ que converge a un flujo límite $\tilde{F}(\cdot, \tilde{t})$ definido para $\tilde{t} \in] -\infty, \infty[$.

Singularidades de tipo II (2)

$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ curvaturas ppales ordenadas.

M_t evolución de M_0 cerrada convexa con $H \geq 0$. Para cada $\eta > 0 \exists C(\eta, M_0)$ tal que $\lambda_1 \geq -\eta H - C$ sobre M_t para $t \in [0, T[$. i.e. las curvaturas negativas se hacen despreciables frente a las positivas cuando se aproxima el tiempo singular.

Consecuencia: Si $H \geq 0$ para M_0 , el flujo límite $\tilde{F}(\cdot, \tilde{t})$ de una singularidad de tipo II es convexo. Es más $\tilde{M}_{\tilde{t}} := \tilde{F}(M, \tilde{t}) = \Gamma_{\tilde{t}}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, con $1 \leq k \leq n$ y $\Gamma_{\tilde{t}}^k$ estrictamente convexa

y, por un teorema de Hamilton,

toda solución eterna estrictamente convexa del FCM es una solución autosemejante por traslación ($F + \vec{b}(\tilde{t})$) (tipo “guadaña”, pero hay más y todavía no están clasificadas)

$\Gamma_{\tilde{t}}^k$ es una solución autosemejante por traslación.

Flujo de hipersuperficies 2-convexas

$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ curvaturas ppales ordenadas.

Def.: M_0 2-convexa si $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$. Fuertemente 2-convexa si $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \alpha H$ para algún $\alpha > 0$ (una superficie compact 2-convexa es uniformemente 2-convexa).

Si M_0 es una superficie 2-convexa, su evolución M_t por FCM es 2-convexa 2-convexidad es invariante por dilataciones.

Ejemplo de 2-convexa: si $S_1 \geq 0, \dots, S_{n-1} \geq 0$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$. Si $n = 3$, $H \geq 0$ y $Sc \geq 0 \implies$ 2-convex.

Flujo con cirugía para $n \geq 3$

Teor[Huisken, Sinestrari, 2006]. $M_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ inmersa cerrada 2-convexa, $n \geq 3$. Existe un FCM con cirugía con valor inicial M_0 tal que, después de un número finito de cirugías, las componentes que han quedado son difeomorfas a S^n o $S^1 \times S^{n-1}$

Por propiedades 2-convexas, los únicos límites posibles de dilataciones de singularidades son S_t^n , $S_t^{n-1} \times \mathbb{R}$ y soluciones autosemejantes por traslación Γ_t^n .

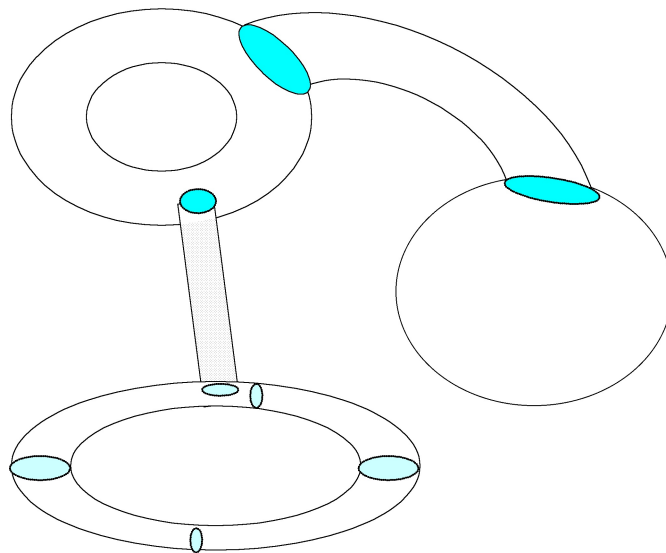
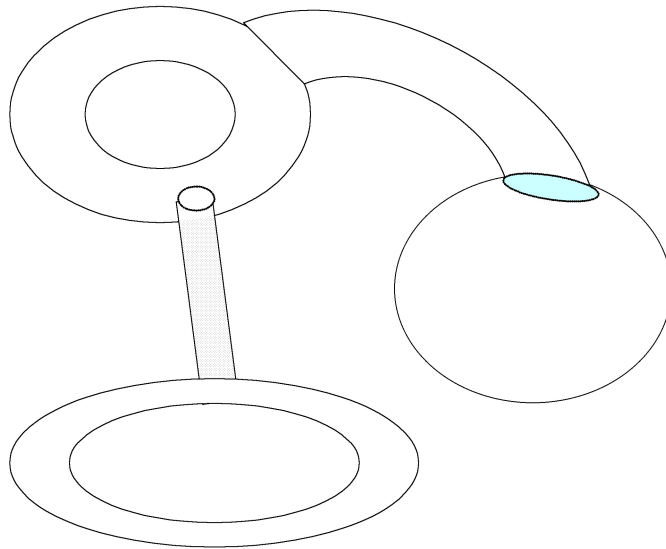
Si límite esfera: esa M_t (o componente después de cirugía) es una superficie convexa que colapsa a un punto redondo (es difeo a una esfera).

Si es un cilindro $S_t^{n-1} \times \mathbb{R}$, hacemos cirugía.

Si es Γ_t^n , el aspecto es como de una parábola, y, lejos de puntos de curvatura máxima, hacemos cirugía.

Y el resultado final sale como en los siguientes dibujos:

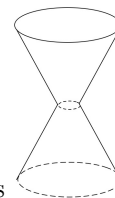
Flujo con cirugía para $n \geq 3$ (2)

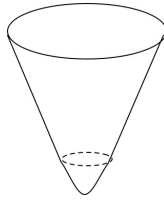


Flujo con cirugía para $n \geq 3$ (3)

Queda por ver que:

- La curvatura de la superficie decrece después de cortar cilindros





solitones traslación y estimaciones (para 2-convexas y $n \geq 3$) $\forall \eta > 0 \exists C_\eta s. t. |\lambda_1| \leq \eta H \implies |\lambda_j - \lambda_k| \leq c\eta H + C_\eta, j, k > 1.$ $\exists \gamma_2(n), \gamma_3(n, M_0) s. t. |\nabla \alpha|^2 \leq \gamma_2 |\alpha|^2 + \gamma_3. \exists c_1, c_2 s. t. |\partial_t \alpha| \leq c_1 |\alpha|^3 + c_2$

- Las constantes anteriores se pueden tomar las mismas para todo el flujo.
- El área decrece una cantidad fijada (su cota inferior) en cada cirugía.

Flujo con cirugía para $n \geq 3$ (2)

Resultado final:

Se deja a la imaginación del lector

Flujo con cirugía para $n = 2$

Anunciado por Kleiner-Colding, usando métodos teoría geométrica medida, en la línea de Brian White.

References

- [1] Xi-Ping Zhu. *Lectures on Mean Curvature Flows*. AMS/IP, 2002.
- [2] Kai Seng Chou, Xi-Ping Zhu. *The Curve Shortening Problem*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [3] Klaus Ecker. *Regularity Theory for Mean Curvature Flow*. Birkhäuser, 2004.
- [4] Claus Gerhardt. *Curvature Problems*. International Press, 2006.