Introducción a las variedades de Kähler

(Escuela de análisis geométrico, Granada, 1-5 de Junio de 2009)

I Variedades complejas

La noción de variedad $\underbrace{\text{compleja}}_{}$ de dimensión n se define de la misma manera que la de variedad diferencial de dim. n, solo que los cambios de coordenadas en vez de ser difeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ son biholomorfismos entre abiertos de $\mathbb{C}^n$. Toda aplicación holomorfa es infinitamente diferenciable. En consecuencia, toda var. compleja de dimensión n es una var. diferencial de dim. $2n$.

Ejemplos

1) $\mathbb{C}^n$

2) Se denota $\mathbb{C}P^n = P(\mathbb{C}^{n+1})$ el conjunto de todas las rectas

lineales $[v] = \mathbb{C}v \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

La aplicación suryectiva $v \mapsto [v]$, $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$, induce sobre $\mathbb{C}P^n$ la topología cociente. El espacio topológico $\mathbb{C}P^n$ es de Hausdorff y posee una base numerable, además es compacto y conexo. Estas propiedades se verifican $\underbrace{}_{}$facilmente a partir de la <u>fibración de Hopf</u>:

$$\begin{array}{c} S^{2n+1} \\ \cap \\ \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \end{array} \longrightarrow \mathbb{C}P^n, \quad v \mapsto [v].$$

$$\mathcal{U}_\alpha := \{ [z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_\alpha \neq 0 \}, \quad \alpha = 0, \ldots, n,$$

es un recubrimiento abierto de $\mathbb{C}P^n$.

Definimos $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{C}^n$ por

$$\varphi_\alpha([z_0, \ldots, z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_\alpha}, \ldots, \widehat{\frac{z_\alpha}{z_\alpha}}, \ldots, \frac{z_n}{z_\alpha} \right).$$

φ_α es un homeomorfismo con aplicación inversa $\varphi_\alpha^{-1}: (\zeta_1, .., \zeta_n) \longmapsto [\underset{0}{\zeta_1}, .., \underset{\alpha-1}{\zeta_\alpha}, \underset{\alpha}{1}, \underset{\alpha+1}{\zeta_{\alpha+1}}, .., \underset{n}{\zeta_n}]$

El cambio de coordenadas $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$:

$$\underbrace{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}_{\{\zeta_\beta \neq 0\}} \longrightarrow \underbrace{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)}_{\{\zeta_{\alpha+1} \neq 0\}} \quad \text{para } \alpha < \beta$$

es

$$(\zeta_1, .., \zeta_n) \longmapsto \left(\underset{1}{\frac{\zeta_1}{\zeta_\beta}}, \dots, \underset{\alpha}{\frac{\zeta_a}{\zeta_\beta}}, \underset{\alpha+1}{\frac{1}{\zeta_\beta}}, \underset{\alpha+2}{\frac{\zeta_{\alpha+1}}{\zeta_\beta}}, \dots, \widehat{\frac{\zeta_\beta}{\zeta_\beta}}, \dots, \underset{n}{\frac{\zeta_n}{\zeta_\beta}}\right)$$

y, por lo tanto, es biholomorfo. Por consiguiente,

$(\varphi_\alpha)_{\alpha=0,1,..,n}$ es un atlas holomorfo que define sobre $\mathbb{C}P^n$ una estructura de var compleja de dimensión n. (Espacio proyectivo complejo)

[$\mathbb{C}P^n$ es una var. cj. homog.: El gp $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ opera trans. por biholomorfismos.]

$\underline{n=1}$: $\mathbb{C}P^1 \underset{\text{difeo.}}{\cong} S^2$

Conjetura: S^2 es la única esfera de dimensión positiva que admite una estructura de var. compleja.

Se sabe que S^2 y S^6 son las únicas esferas que admiten una estructura casi compleja.

<u>Def.</u> Una <u>estructura casi compleja</u> sobre una var. diferencial M es un campo de endomorfismos $J \in \Gamma(\mathrm{End}\, TM)$ t.q. $J^2 = -\mathbb{1}_{TM}$.

Se dice que J es <u>integrable</u> si el <u>tensor de Nijenhuis</u>

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY] = 0$$

$\forall X, Y$. En este caso se dice que J es una <u>estructura compleja</u>.

<u>Teorema</u> (Newlander-Nirenberg) $N_J = 0 \iff$

$\exists^{(1)}$ una estr. de var. compleja sobre M t.q. $d\varphi \circ J = i\, d\varphi$ $\forall$ carta holomorfa $\varphi : \underset{\hat{M}}{\mathcal{U}} \to \mathbb{C}^n$.

3) La variedad grassmanniana compleja.

Se denota $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ el conjunto de todos los subespacios de dim. $k \leq n$ de $\mathbb{C}^n$. Es facil de ver que $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ posee una estructura de var. compleja de dim $k(n-k)$.
$GL_n(\mathbb{C})$ opera trans. $\Rightarrow Gr_k(\mathbb{C}^n)$ var. cj. homog.

4) El producto $M \times N$ de var. complejas M, N es una var. compleja de $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

5) El cociente M/Γ de una var. compleja M por un grupo Γ propiamente discontinuo de transformaciones holomorfas que opera libremente es una var. compleja de $\dim(M/\Gamma) = \dim M$.

[Esto es un caso especial del cociente de M por un gp. de Lie G cj. que opera propia- y libremente por transf. hol.; $\dim M/G = \dim M - \dim G$.]

Les recuerdo que el grupo Γ es propiamente discontinuo si $\forall$ compacto $K \subset M$ $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ es finito,
[$\Leftrightarrow$ $(\gamma, p) \mapsto (p, \gamma p)$ es una apl. propia $\Gamma \times M \to M \times M$ y las órbitas de Γ son discretas]

<u>Subejemplo</u>: Sea $\Gamma \subset (\mathbb{C}^n, +)$ un subgrupo discreto $\cong \mathbb{Z}^{2n}$. El cociente $\mathbb{C}^n/\Gamma$ es una var. compleja compacta, un <u>toro complejo.</u> $\mathbb{C}^n/\Gamma \underset{\text{difeo.}}{\cong} \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} = T^{2n}$.

$[\, \mathbb{C}^n/\Gamma \underset{\text{bihol.}}{\cong} \mathbb{C}^n/\Gamma' \iff \exists A \in GL_n(\mathbb{C}) : \Gamma' = A\Gamma \,]$

6) <u>Subvariedades complejas</u>, es decir

$N \subset M$ t.q. $\forall p \in N$ $\exists$ contorno abierto $\mathcal{U}$ y funciones hol. $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, k$, t.q. $\mathcal{U} \cap N = \{ q \in \mathcal{U} \,/\, f_1(q) = \dots = f_k(q) = 0 \}$ y $df_1(q), \dots, df_k(q)$ lin. indep. $\forall q \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ N var. compleja $\dim N = \dim M - k$.

<u>Subejemplo</u>: El <u>embebimiento de Plücker</u>

$$Gr_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow P(\Lambda^k \mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}P^N, \quad N = \binom{n}{k} - 1.$$

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \longmapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]$$

($v_i \in \mathbb{C}^n$ lin. indep.)

realiza la grassmanniana como subvariedad de $\mathbb{C}P^N$. E.g. $Gr_2(\mathbb{C}^4) \hookrightarrow \mathbb{C}P^5$ hipersuperficie compleja.

$[\, \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23} = 0, \ \sum \lambda_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 \mathbb{C}^4 \,]$

II Métricas de Kähler

Def Sea M una variedad compleja y $J \in \Gamma(\operatorname{End} TM)$ su estructura compleja.

Una métrica de Kähler sobre M es una métrica riemanniana g tal que

(i) J es antisimétrica y

(ii) la 2-forma $\omega = g(\cdot, J\cdot)$ es cerrada.

En este caso se dice que (M, J, g) es una variedad de Kähler.

La forma simpléctica ω se llama forma de Kähler.

Ejemplos:

1) El producto escalar canónico

$$g = \sum_{i=1}^{n} (dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i) \quad \text{sobre}$$

$M = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ con las coordenadas holomorfas $z^i = x^i + \sqrt{-1}\, y^i$ es una métrica de Kähler con forma de Kähler

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \Big(dx^i \otimes \underbrace{(dx^i \circ J)}_{-dy^i} + dy^i \otimes \underbrace{(dy^i \circ J)}_{dx^i} \Big)$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i .$$

$$h = g + i\omega = \sum_{i=1}^{n} dz^i \otimes d\bar{z}^i$$

es la forma hermítica canónica de $\mathbb{C}^n$.

2) La métrica de Kähler del 1er ejemplo es invariante bajo traslaciones y, por lo tanto, induce una métrica de Kähler sobre todo toro complejo $\mathbb{C}^n/\Gamma$.

3) (Métrica de Fubini-Study)

Sea h la forma hermítica can. de $\mathbb{C}^{n+1}$. La proyección can.

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n ,$$

$$z = (z^0, .., z^n) \longmapsto [z]$$

es una submersión holomórfa y

$$d\pi_z : T_z(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{C}^{n+1} \to T_{\pi(z)} \mathbb{C}P^n$$

induce un isomorfismo

$$\mathbb{C}^{n+1} / \mathbb{C} \cdot z \xrightarrow{\sim} T_p \mathbb{C}P^n , \quad p = \pi(z).$$

Definimos

$$(*) \quad h'_p(d\pi_z X, d\pi_z Y) :=$$

$$\frac{h(X,Y)h(z,z) - h(X,z)h(z,Y)}{h(z,z)^2} , \quad X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{C}^{n+1}.$$

$g' = \mathrm{Re}\, h'$ es una métrica de Kähler sobre $\mathbb{C}P^n$, la <u>métrica de Fubini-Study</u>.

<u>dem</u>. Es fácil de ver que la ecuación (*) define una forma hermítica definida positiva $h' = g' + i\omega'$, $\omega' = g'(\cdot, J\cdot)$.

Queda por verificar que $d\omega' = 0$.

La ecuación

$$(**) \qquad \omega'(d\pi_z X, d\pi_z Y) = \frac{\omega(X,Y)}{h(z,z)}$$

$\forall\, X, Y \in [z]^\perp$

implica que $\pi^*\omega'$ coincide con ω sobre la esfera $S = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de radio 1. Por consiguiente,

$$\pi^* d\omega' = d(\pi^*\omega') = d\omega = 0$$

sobre S, lo que conlleva $d\omega' = 0$. $\boxtimes$

Ya hemos observado que el grupo $GL(n+1, \mathbb{C})$ opera transitivamente por transformaciones holomorfas sobre $\mathbb{C}P^n$. El subgrupo $U(n+1) \subset GL(n+1, \mathbb{C})$ preserva la forma hermítica h de $\mathbb{C}^{n+1}$ y, por lo tanto, la métrica de F.S. de $\mathbb{C}P^n$ y sigue siendo transitivo.

Encontramos, pues, que la variedad de Kähler $\mathbb{C}P^n$ es homogénea y se puede identificar con $U(n+1)/U(1) \times U(n)$.

<u>Prop.</u> Sea (M, J, g) una variedad de Kähler y $N \subset M$ una subvar. compleja, $\imath : N \to M$ la inclusión. Entonces la métrica ~~riemanniana~~ inducida $g_N = \imath^* g$ es una métrica de Kähler.

<u>dem.</u> $\omega_N = g_N(\cdot, J\cdot) = \imath^*\omega \Longrightarrow$
$d\omega_N = d(\imath^*\omega) = \imath^* d\omega = 0.$ ▨

<u>Ejemplo</u>. Toda variedad proyectiva algebraica lisa es kähleriana.

En particular, $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ hereda una métrica de Kähler $U(n)$-invariante gracias al embebimiento de Plücker $\hookrightarrow \mathbb{C}P^N$, $N = \binom{n}{k} - 1$.

Esta métrica es la única métrica riem. $U(n)$-invariante sobre la grassmanniana

$$Gr_k(\mathbb{C}^n) \cong U(n) \big/ U(k) \times U(n-k),$$

salvo factor constante.

III Propiedades topológicas elementales de las variedades de Kähler

Prop. Toda variedad compleja posee una orientación canónica.

dem. Todo atlas holomorfo define una orientación, pues $\det_{\mathbb{R}} d\varphi > 0$ para toda aplicación biholomorfa φ entre abiertos de $\mathbb{C}^n$.

En efecto, $A + iB \in GL_n(\mathbb{C})$ corresponde a $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ bajo la identificación

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{2n}$$

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

y

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} A+iB & -B+iA-iA+B=0 \\ B & A-iB \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{pmatrix} = |\det(A+iB)|^2 > 0. \quad \blacksquare$$

Ejemplo. Sea M una superficie (real). Entonces <u>M posee una estructura compleja ssi M es orientable</u>. En efecto, toda var. diferencial admite una métrica riemanniana g (partición de la unidad) y una métrica riem. en una superficie orientada define una estructura casi compleja J; la rotación por $90°$ en el sentido definido por la orientación. J es integrable:

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY] = 0 \quad \forall X,Y.$$

Es suficiente verificar $N_J(X,Y)=0$ para $Y=JX$.

Además la forma de Kähler ω es automaticamente cerrada, al ser $d\omega$ una 3-forma en 2 dimensiones. Por lo tanto obtenemos

<u>Prop.</u> Toda superficie orientable admite una estructura de Kähler.

Sea M una var. cp. orientada de dim. m y ν una m-forma sin zeros. Entonces ν define un elemento no trivial

$$[\nu] \in H^m_{dR}(M) = \Gamma(\Lambda^m T^*M) \big/ d\Gamma(\Lambda^{m-1} T^*M).$$ En efecto,

$$\int_M \nu \begin{cases} >0 & \text{si } \nu > 0 \text{ (con respecto a la or. de } M) \\ <0 & \text{si } \nu < 0. \end{cases}$$

Si ν fuera exacta, $\nu = d\eta$, entonces

$$\int_M \nu \overset{\text{(Stokes)}}{=} \int_{\underbrace{\partial M}_{=\emptyset}} \eta = 0.$$ Por lo tanto $[\nu] \neq 0$.

<u>Corolario</u> Sea M una var. cp. simpléctica (por ejemplo una var. de Kähler). Entonces $b_{2k}(M) = \dim H^{2k}(M, \mathbb{R}) > 0$,

$k = 0, 1, 2, \dots, n = \frac{m}{2}$, $m = \dim_{\mathbb{R}} M$.

<u>dem.</u> La forma simpléctica ω define una forma de volumen $\nu = \omega^n$ y $0 \neq [\nu] = [\omega^n] = [\omega]^n$ implica $[\omega]^k \neq 0$ $\forall k \leq n$. $\boxtimes$

Corolario La var. de Hopf $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\langle\lambda\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $|\lambda| \neq 1$, es de Kähler ssi $n=1$.

dem $(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\langle\lambda\rangle \underset{\text{difeo.}}{\cong} S^{2n-1} \times S^1 \Rightarrow$

$$H^2\left((\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\langle\lambda\rangle\right) \cong \sum_{p+q=2} H^p(S^{2n-1}) \otimes H^q(S^1)$$

$= 0$ si $n \geq 2$. $\Rightarrow S^{2n-1} \times S^1$ no admite forma simpléctica.

Para $n=1$ obtenemos el toro de Hopf

$\mathbb{C}^*/\langle\lambda\rangle \underset{\text{difeo.}}{\cong} S^1 \times S^1 = T^2$, biholomorfo a $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$, $\Gamma_\tau = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{1, \tau\}$,

$\lambda = \exp(2\pi i \tau)$. ▨

IV Geometría riem. local de las variedades de Kähler

<u>Teorema</u> Sei J una estructura casi compleja antisimétrica sobre una var. riem. (M, g). Entonces (M, J, g) es Kähleriana ssi $\nabla J = 0$.

<u>dem</u> "$\Rightarrow$" Al ser J integrable, existen localmente campos de vectores $X_1, \dots, X_{2n}$, lin. indep. en cada punto, $n = \dim_{\mathbb{C}} M$, t.q. $[X_i, X_j] = [JX_i, JX_j] = [X_i, JX_j] = 0$.

Por lo tanto, en el cálculo siguiente, podemos suponer que los campos de vectores X, Y, Z, JX, JY, JZ conmutan de par en par.

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = 2g(\nabla_X(JY), Z) \underbrace{- 2g(J\nabla_X Y, Z)}_{= 2g(\nabla_X Y, JZ)}$$

$$\underset{\text{Koszul}}{=} \cancel{X g(JY, Z)} + (JY)g(X, Z) - Zg(X, JY)$$
$$\cancel{X g(Y, JZ)} + Y g(X, JZ) - (JZ)g(X, Y)$$

$$= -(JY)\,\omega(X, JZ) - Z\omega(X,Y) + Y\omega(X,Z) + (JZ)\,\omega(X, JY)$$

$$= -(JY)\omega(X,JZ) - (JZ)\omega(JY,X) - Z\omega(X,Y) - Y\omega(Z,X)$$

$$= X\omega(JZ,JY) + X\omega(Y,Z) = 0.$$

$$d\omega = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{\text{cícl.}} X\omega(Y,Z) - \underbrace{\sum_{\text{cícl.}} \omega([X,Y],Z)}_{=0} = 0$$

Por consiguiente, hemos demostrado que $N_J = 0$, $d\omega = 0 \Rightarrow \nabla J = 0$.

"$\Leftarrow$" $\nabla J = 0$ implica $N_J = 0$:

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

$$\overset{T=0}{=} \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - [X,Y] - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y(JX)) - J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY}X)$$

$$\overset{\nabla J=0}{=} -[X,Y] + J^2\nabla_Y X - J^2\nabla_X Y = -[X,Y] - J^2[X,Y] = 0.$$

$\nabla J = 0$ también implica $d\omega = 0$:

$$(\nabla_X \omega)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X J)Z) = 0 \quad \forall X,Y,Z \Rightarrow$$

$$0 = \sum_{\text{cícl.}} (\nabla_X \omega)(Y,Z) = \sum_{\text{cícl.}} \Big(X\omega(Y,Z) \underbrace{- \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z)}_{-(\omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(\nabla_X Z, Y))} \Big)$$

$$= \sum_{\text{cícl.}} \Big(X\omega(Y,Z) - \big(\omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(\nabla_Y X, Z)\big)\Big)$$

$$\overset{T=0}{=} \sum_{\text{cícl.}} \big(X\omega(Y,Z) - \omega([X,Y],Z) \big)$$

$$= d\omega(X,Y,Z). \quad \boxtimes$$

<u>Cor.</u> 1 (identidades de Kähler)

El tensor de curvatura de una var. kähleriana (M,J,g) cumple las siguientes identidades:

(i) $[R(X,Y),J] = 0$, (ii) $R(JX,JY) = R(X,Y)$

$\forall X,Y$.

dem. (i) es una consecuencia inmediata de $\nabla J = 0$.

(ii) se obtiene a partir de (i) utilizando la simetría en pares:

$$g(R(JX,JY)Z,W) = g(R(Z,W)JX,JY)$$

$$\overset{(i)}{=} g(JR(Z,W)X,JY) = g(R(Z,W)X,Y). \quad \blacksquare$$

Cor 2 Para toda var. de Kähler $\underbrace{}_{}$ (M,J,g) se cumple

(i) $Ric(JX,JY) = Ric(X,Y)$ y

(ii) $Ric(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} JR(X,JY)$

$\forall X,Y$.

dem.

(i) $Ric(JX,JY) = \sum_{i=1}^{m} g(\underbrace{R(e_i,JX)JY}, e_i)$

$\overset{Cor.1(i)}{=} JR(e_i,JX)$

$\overset{Cor.1(ii)}{=} -JR(Je_i,X)$

(e_i) base o.n.

$\Downarrow$

(Je_i) base o.n.

J antisim.

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{m} g(R(Je_i,X)Y,Je_i)$$

$$= Ric(X,Y)$$

(ii) $\mathrm{Ric}(X,Y) \overset{(i)}{=} \mathrm{Ric}(JX,JY) = \mathrm{Ric}(JY,JX)$

$= \mathrm{tr}(Z \mapsto R(Z,JY)JX)$

$$R(Z,JY)JX \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cor. 1 (i)}}}{=} J\,R(Z,JY)X \underset{\text{1. Bianchi}}{=}$$

$= -J(R(JY,X)Z + R(X,Z)JY)$

$$\underset{\text{Cor. 1 (i)}}{=} +JR(X,JY)Z + \underbrace{R(X,Z)Y}_{-R(Z,X)Y}$$

$$\overset{\mathrm{tr}}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\, JR(X,JY) - \mathrm{Ric}(X,Y). \blacksquare$$

Ejemplos 1) Los espacios de curvatura constante

$$\underset{c}{R}(X,Y)Z = c\,(g(Y,Z)\cdot X - g(X,Z)\cdot Y), \quad c \neq 0,$$

no son Kählerianos en $\dim_{\mathbb{R}} M > 2$.

En efecto, $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n > 2 \Rightarrow \exists\, P \subset T_pM$ plano t.q. $P \cap JP = 0$.

Sea X, Y una base de P.

Entonces $R_c(X,Y)Z \in P$ y $R_c(JX,JY)Z \in JP$ $\forall Z \in T_pM$ y la identidad de Kähler $R(X,Y) = R(JX,JY)$ solo se cumple si $c=0$.

2) $(\mathbb{C}P^1, g_{F.S.}) \cong S^2_{r=\frac{1}{2}}$ $(c=4)$

<u>Def.</u> Sea (M,J,g) una var. Kähleriana. Se dice que (M,J,g) tiene curvatura <u>seccional holomorfa constante</u> c, si $K(P)=c$ $\forall$ plano $P \subset T_pM$ J-invariante.

Esta condición es equivalente a

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY\big) + \frac{c}{2}g(X,JY)JZ,$$

V. [KN II].

Ejemplos: 1) $(\mathbb{C}P^n, g_{F.S.})$ tiene curvatura seccional hol. const. $= 1$.

2) $\mathbb{C}H^n = \left\{ \begin{bmatrix} z^0 \\ \vdots \\ z^n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}P^n \;\middle|\; -|z^0|^2 + |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 < 0 \right\}$

$\subset \mathbb{C}P^n$ tiene curv. sec. hol. const $= -1$ con resp. a la métrica de Kähler

$g' = \mathrm{Re}\, h'$,

$$h'_p(d\pi_z X, d\pi_z Y) := -\frac{h(X,Y)h(z,z) - h(X,z)h(z,Y)}{h(z,z)^2},$$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$, $p \in \mathbb{C}H^n$,

$z \in \pi^{-1}(p)$, $X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{C}^{n+1}$,

$$h = -dz^0 \otimes d\bar{z}^0 + dz^1 \otimes d\bar{z}^1 + \dots + dz^n \otimes d\bar{z}^n.$$

Igual que $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{C}H^n$ es una variedad kähleriana <u>homogénea</u>:

$$\mathbb{C}H^n = \frac{U(1,n)}{U(1) \times U(n)}$$

V Variedades de Calabi-Yau

Estructura general de las variedades kählerianas Ricci-llanas

se analiza a partir los teoremas siguientes de geom. riem.:

Teorema (Cheeger-Gromoll '72)

Sea M una var. riem. cp. con $Ric \geq 0$. Entonces el recubrimiento universal

$$\tilde{M} \underset{\text{isométr.}}{\cong} \mathbb{R}^k \times N, \quad k \geq 0, \quad N \text{ cp. } Ric_N \geq 0.$$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema de descomposición de de Rham y de la clasificación de Berger de los grupos de holonomía riemannianos.

Teorema Sea M una var. kähleriana completa y s.c. Entonces $M \underset{\text{isométr.}}{\cong} \mathbb{C}^\ell \times N$, $\ell \geq 0$, $N = N_1 \times \dots \times N_r$,

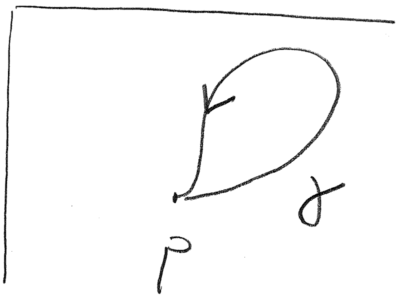
$$Hol(N_i) = \begin{cases} U(1)\cdot H, \ H \subset SU(n_i) \text{ irred.} \\ SU(n_i) \quad , \quad n_i = \dim_{\mathbb{C}} N_i \\ \cup \\ Sp(n_i/2) := U(n_i) \cap Sp(\mathbb{C}^{n_i}) \quad (\text{en este caso } n_i \text{ es par}) \end{cases}$$

$$\mathrm{Ric}_M = 0 \iff \forall i : \mathrm{Hol}(N_i) = SU(n_i) \text{ o } Sp\left(\tfrac{n_i}{2}\right)$$

Recuerden que $\mathrm{Hol}_p = \langle P_\gamma \mid \gamma \text{ lazo en } p \rangle$,

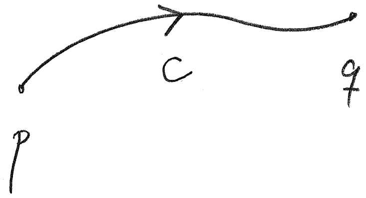
donde $P_\gamma \in O(T_pM)$

es el <u>transporte paralelo</u>.



$$\mathrm{Hol}_q = \tau\, \mathrm{Hol}_p\, \tau^{-1},$$

$$\tau = P_c$$



Por lo tanto, como M es conexa, el subgrupo $\mathrm{Hol} \subset O(\dim M)$ está bien definido, salvo conjugación.

Combinando estos dos teoremas obtenemos:

<u>Teorema</u> (Beauville '83) Sea M una var. kähleriana compacta Ricci-llana. Entonces $\exists$ recubrimiento <u>finito</u> $\overline{M} \to M$ t.q. $\overline{M} \underset{\text{isométr.}}{\cong} F \times N$, F var. de Kähler llana, $N = N_1 \times \ldots \times N_r$, N_i cp. s.c. $\mathrm{Hol}(N_i) = \left\{ \begin{matrix} SU(n_i) \\ Sp(n_i/2) \end{matrix} \right.$, $n_i = \dim_{\mathbb{C}} N_i$.

dem. Los resultados previous implican que $\tilde{M} \cong \mathbb{C}^l \times N$, donde N es como se afirma en el teorema de Beauville. Ahora

$$\Gamma = \pi_1(M) \subset \mathrm{Isom}(\tilde{M}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{C}^l) \times \mathrm{Isom}(N).$$

$\mathrm{Isom}(N)$ es finito, pues $\mathrm{Ric} \leq 0$ en una var. compacta implica que los campos de Killing son paralelos (Bochner).
($\Leftarrow$ $\nabla^* \nabla X = \mathrm{Ric}\, X$, $\forall$ campo de Killing X)

Por consiguiente,

$$\bar{\Gamma} := \ker\left(\Gamma \to \mathrm{Isom}(N)\right)$$

es un subgrupo normal de índice finito

$$y \quad \bar{M} := \tilde{M}/\bar{\Gamma} \xrightarrow[\Gamma/\bar{\Gamma}]{} M = \tilde{M}/\Gamma$$

es el deseado recubrimiento finito,

$$\bar{M} = \underbrace{\mathbb{C}^l/\bar{\Gamma}}_{F :=} \times N. \quad \boxtimes$$

Variedades de Calabi-Yau

Def. Una <u>variedad de Calabi-Yau</u> (en el sentido estricto) es una variedad compacta compleja X que admite una métrica kähleriana con grupo de holonomía $SU(n)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

$n=1$: toros complejos $\mathbb{C}/\Gamma$

$n=2$: superficies K3

$n \geq 3$: la condición $Hol = SU(n)$ excluye productos y variedades híper-kählerianas; además asegura que los <u>números de Dolbeault</u>

$$\boxed{h^{p,0}(X) = 0} \quad \forall \quad 0 < p < n.$$

$$\left(h^{p,q}(X) := \dim H^q(X, \Omega^p) \right)$$

[sheaf = haz]

De hecho, $(p,0)$-formas hol. α en una $\underbrace{\text{var.}}_{\text{kähleriana}}$ compacta de $Ric \geq 0$ son paralelas por un argumento tipo Bochner ($\frac{1}{2}\Delta_d \alpha = \Delta_{\bar\partial} \alpha = \bar\partial^* \bar\partial \alpha = \nabla^* \nabla \alpha + \underbrace{\text{curv.}}_{\geq 0 \text{ si } Ric \geq 0}$ $\forall \alpha$ de tipo $(p,0)$).

Las formas paralelas, al ser invariantes bajo el grupo de holonomía y al ser $Hol = SU(n)$, solo existen $(p,0)$-formas paralelas para $p = 0, n$.

En consecuencia obtenemos:

<u>Prop.</u> Para toda var. de CY de dim. $n \geq 1$

$$\chi(X, \mathcal{O}) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{" " " impar} \end{cases}$$

$$\left(\chi(X, \mathcal{O}) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p h^{0,p}(X) \quad \text{y} \right.$$

$$\left. h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X) \quad \text{si } X \text{ es de Kähler} \right)$$

<u>Cor.</u> X CY $\Rightarrow$

(i) $\pi_1 X$ es finito

(ii) Si $\dim_{\mathbb{C}} X$ par $\Rightarrow X$ s.c.

<u>dem</u>

(i) es una consecuencia del teorema de Beauville que implica la existencia de un recubrimiento finito de X por una var. de CY s.c.

(ii) Por (i), $d := \# \pi_1 X < \infty$ y el recubrimiento universal $\tilde{X} \to X$ es de d hojas. $\Rightarrow \chi(\tilde{X}, \mathcal{O}) \overset{(*)}{=} d \cdot \chi(X, \mathcal{O})$, lo que fuerza $d = 1$, ya que $\chi(\tilde{X}, \mathcal{O}) = \chi(X, \mathcal{O}) = 2 \neq 0$. $\boxtimes$

($\chi(X, \mathcal{O})$ es una $\int$ sobre un polinomio en clases características de Chern en virtud del teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch $\Rightarrow$ multiplicatividad (*))

Otra consecuencia de $h^{p,0} = 0 \ \forall \ 0 < p < n$ es:

<u>Prop.</u> Sea X una var. de CY de $\dim_{\mathbb{C}} n \neq 2$. Entonces X es proyectiva algebraica.

<u>dem.</u> $h^{2,0}(X) = 0 \Rightarrow H^2(X, \mathbb{R}) = H^{1,1}(X, \mathbb{R}) = \{$ clases de coh. representadas

por formas cerradas de tipo $(1,1)\}$. $\Rightarrow$

$H^2(X, \mathbb{Q})$ es denso en $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$.

Como el cono formado por clases de Kähler $\mathcal{C}_X \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ es abierto, esto implica la existencia de una clase racional de Kähler y, en conclusión, la existencia de un embebimiento proyectivo de X por el <u>teorema de Kodaira</u>. $\boxtimes$

<u>El teorema de CY</u>

La curvatura de Ricci de una var. kähleriana (X, g) da lugar a una 2-forma cerrada $\left[\begin{array}{l} d^\nabla R = 0 + \text{Cor. 2 (ii)} \\ \Rightarrow d\rho = 0 \end{array}\right]$

$\rho = Ric(\cdot, J\cdot)$, la <u>forma de Ricci</u>.

La clase de coh. correspondiente $c_1(K_X) = \frac{1}{2\pi}[\rho] \in H^2(X, \mathbb{R})$ es
$(\mathbb{Z})$

precisamente la clase de Chern del fibrado canónico $K_X = \Omega^n_X$ y no depende de la métrica.

$$c_1(X) := c_1(K^*_X) = -c_1(K_X)$$

se llama 1ª clase de Chern de X.

Todos los ejemplos de var. de CY de $\dim_{\mathbb{C}} \geq 2$ se basan en la resolución de la conjetura de Calabi por Yau:

Teorema (Calabi '57, Yau '78)
Sea (X, g) una var. cp. de Kähler y ω su forma de Kähler. Si $c_1(X) = 0$, entonces $\exists^1$ métrica kähleriana Ricci-llana g' con clase de Kähler $[\omega'] = [\omega]$.

El problema se reduce a una edp nolineal del tipo $\det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right) =$ una función dada.

Yau demostró la existencia de una solución. La unicidad ya la había establecido Calabi.

Ejemplos

En virtud del teorema de Yau y de los resultados presentados, variedades de CY en $\dim_{\mathbb{C}} \geq 3$ son esencialmente (salvo verificación de $\# \pi_1 X < \infty$ y $h^{p,0}(\tilde{X}) = 0 \;\; \forall \; 0 < p < n$) lo mismo que variedades proyectivas alg. lisas X con fibrado canónico K_X trivial.

[Yau $\Rightarrow Hol_X \subset SU(n)$; $h^{p,0}(\tilde{X}) = 0 \;\; \forall p \neq 0, n$
$\Rightarrow Hol_X = SU(n)$.]

El caso más simple es el de una hipersuperficie $X \subset \mathbb{C}P^m$ definida por un polinomio homogéneo f de grado d.

La <u>fórmula de adjunción</u> permite calcular K_X :

$$\left[0 \to TX \to T\mathbb{C}P^m\big|_X \to \mathcal{N} \to 0 \Rightarrow \right.$$

$$\left. \det(TX \otimes \mathcal{N}) \cong \det T\mathbb{C}P^m \Rightarrow \right]$$

$$K_X \cong \underbrace{K_{\mathbb{C}P^m}}_{[-(m+1)H]} \otimes \underbrace{\mathcal{N}}_{[X]=[dH]}$$

$$= \left[\left(d-(m+1) \right) H \right] ,$$

donde $H \subset \mathbb{C}P^m$ es un hiperplano.

Por lo tanto, K_X trivial $\Leftrightarrow d = m+1$.

$d=3$) La familia de curvas cúbicas lisas $X \subset \mathbb{C}P^2$ (<u>curvas elípticas</u>).

$X \underset{\text{bihol.}}{\cong} \mathbb{C}/\Gamma$, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ subgrupo discreto cocompacto, admite métrica kähleriana llana.

(Esta familia depende de 1 parámetro complejo: $1 = \underset{\binom{5}{2}}{\underset{\|}{10}} - 9 = \dim S^3\mathbb{C}^3 - \dim GL_3(\mathbb{C})$)

$$\left[\dim S^d\mathbb{C}^d = \binom{2d-1}{d} = \binom{2d-1}{d-1}\right]$$

$d=4$) La familia de superficies cuárticas $\underbrace{}_{\text{lisas}}$ $X \subset \mathbb{C}P^3$, que depende de <u>19 parámetros</u> $(19 = 35 - 16 = \underbrace{\dim S^4\mathbb{C}^4}_{} - \dim GL_4(\mathbb{C}))$.

$$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 35$$

Se sabe que el espacio de módulos de las superficies K3 es de <u>dimensión 20</u> y que una superficie K3 genérica no es proyectiva.

También se sabe que todas las superficies K3 son difeomorfas.

$d=5$) La familia de hipersuperficies quínticas lisas $X \subset \mathbb{C}P^4$, que depende de 101 parámetros

$$(101 = \underbrace{126}_{} - 25).$$

$$= \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot \cancel{8}^{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{2 \cdot 3} \cdot \cancel{4}} = 140 - 14 \checkmark$$

[La cuenta de parámetros es correcta, pues se puede demostrar que el estabilizador en $GL_d(\mathbb{C})$ de un polinomio $p \in S^d(\mathbb{C}^d)^*$ $(d \geq 3)$ que define una hipersuperficie $X \subset \mathbb{C}P^{d-1}$ lisa es un grupo finito.]