GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
ESCUELA DE ANÁLISIS GEOMÉTRICO
GRANADA, 1-5 DE JUNIO DE 2009

SANTIAGO R. SIMANCA

Contenido

1. Introducción

Los objetivos en estas notas son el introducir la Geometría Riemanniana a través del estudio de superficies desarrollando la intuición métrica usando modelos elementales, el relacionar el promedio de la curvatura Gaussiana con la topología de la variedad para así motivar el estudio de propiedades topológicas usando métodos geométricos, y el proponer un modelo métrico para el estudio de representantes canónicos de clases de homología enteras dentro de una variedad Riemanniana ambiente fija. Un buen conocimiento de cálculo diferencial e integral por parte del lector debería ser suficiente para seguir con detalle la exposición toda, siempre y cuando se entienda que su parte final es aún trabajo en desarrollo.

Aún en los aspectos más elementales de nuestro trabajo esperamos hacer que el lector adopte siempre un punto de vista global. La Geometría Riemanniana tiene una característica particular: si bien los conceptos básicos que la definen son de naturaleza local, la description topológica de la variedad ambiente requiere entender la combinación global de las contribuciones locales sobre el espacio entero, y como tales, influyen y son influidas por su topología. Así pues, si se desea estudiar la topología usando recursos geométricos, debemos hacer un análisis global promediando las propiedades locales. En nuestras notas hemos querido facilitar esa transición de pensamiento.

Así, comenzamos discutiendo el problema clásico de encontrar la curva de menor longitud entre dos puntos dados, problema evidentemente de naturaleza global, e introducimos inmediatamente después, el concepto de curvatura usando ecuaciones diferenciales parciales, mucho antes de demostrar que este coincide con la definición tensorial usual.

En el caso de la curvatura, tenemos un motivo especial para introducirla de esa manera. Podemos pensar ingenuamente al análisis global como el estudio de las soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales parciales en el espacio entero. Luego, si nos damos una función de curvatura, tal definición nos produce una ecuación diferencial parcial en la superficie donde la métrica es la incógnita que nos proponemos encontrar. De esta manera, llegamos inmediatamente a un problema típico de ese análisis global al cual deseamos llevar al lector. Y aún más, practicamente lo resolvemos para el caso de curvatura constante, si bien lo hacemos tan solo para superficies.

La primera parte de nuestras notas están basadas en una serie de seminarios que dimos en Guanajuato, México, algunos años atrás, recolectados sumariamente en [17] y expandidos notablemente en nuestra presentación en la XIII Escuela de Geometría Diferencial, San Paulo, 2004. Los hemos revisado nuevamente en esta ocasión para adaptarlos a los objetivos del momento. En particular, después del estudio detallado de los modelos de superficies Riemannianas de curvatura constante negativa, positiva ó nula, introducimos los conceptos de conexión de Levi-Civita, transporte paralelo, y tensor de curvatura. Una vez desarrollados detalles de tipo técnico relativos a las coordenadas geodésicas polares e normales, demostramos el teorema de Gauss el cual nos dice que dados una pareja de puntos suficientemente cercanos uno al otro, las geodésicas más corta que los une realiza la distancia entre ellos.

La segunda parte es usada para demostrar el teorema de Chern-Gauss-Bonnet para superficies. Si bien el método usado refleja la evolución histórica del tema, dejamos explicitamente sugerida la idea que subyace la generalización del resultado a variedades orientables compactas de dimensión arbitraria.

La tercera parte tiene su punto de partida en una identidad clásica también debida a Gauss. La usamos para definir un funcional métrico natural que intenta seleccionar ciertas subvariedades como representantes canónicos de una clase de homología entera prefijada con anterioridad. La variedad ambiente se supone provista de una métrica Riemanniana fija, y las subvariedades son deformadas dentro de ella en el conjunto de representantes de la clase de homología, dándoles a cada una de las subvariedades en este conjunto la métrica inducida por esa del ambiente. Los mínimos del funcional de menor volumen son los deseados representantes canónicos, en caso que existan.

Terminamos incluyendo un esbozo histórico de la evolución de los temas estudiados, sobre todo aquellos en la primera parte, y haciendo referencias a los artículos originales y algunos otros más. En caso en que el lector así lo desee, las referencias más contemporaneas pueden ser usadas como punto de partida para investigaciones adicionales.

2. Geodésicas y Curvatura

Comenzaremos nuestra discusión considerando el caso en el cual la superficie está inmersa en $\mathbb{R}^3$ y la proveemos con la métrica en ella que la estructura Euclideana induce. Usando los conceptos naturales que resultan en esta situación como motivación, eventualmente pasamos al caso general y definimos la noción de superficie Riemanniana, sus curvas geodésicas, y la curvatura seccional de su métrica.

2.1. **Geodésicas en superficies.** Aunque nos parezca un hecho trivial, cuando consideramos una superficie S contenida en $\mathbb{R}^3$, ella adquiere una estructura métrica inducida por la métrica Euclidiana en el espacio ambiente. Esto es tautologicamente obvio: dados vectores X, Y tangentes a S en el punto p, podemos pensarlos como vectores en $\mathbb{R}^3$ basados en el punto en cuestión, y definir su producto interno por

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^3} \,.$$

En particular, podemos definir la norma de X en p por la expresión

$$\|X\|_p = \langle X, X\rangle_{\mathbb{R}^3}^{\frac{1}{2}} \,.$$

Con esto en mente, podemos ahora proponernos el problema de medir la longitud de una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en S, es decir, una curva tal que $\gamma(t) \in S$ para cada t de su dominio de definición. La solución a este problema es relativamente simple. Si consideramos un arco de la curva γ infinitesimalmente pequeño, entre t y $t+dt$, la longitud dl de este arco, el cual llamaremos elemento diferencial de longitud, será dado por $dl = \|\dot{\gamma}\|_{\gamma(t)} dt$. La longitud de la curva entre los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ es la suma de estas contribuciones infinitesimales de t_0 a t_1, ó integral

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dl = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|_{\gamma(t)} dt \,. \tag{1}$$

Dicha expresión tiene sentido siempre que sepamos medir la longitud del vector velocidad de la curva, independientemente si la superficie está contenida ó no en el espacio Euclidianao. Observemos que para poder medir sus longitudes, necesitamos considerar curvas que sean diferenciables por lo menos una vez. En todo el trabajo, las curvas que consideraremos serán por lo menos continuas.

Ejemplo 1. Las curvas $\gamma_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y $\gamma_2(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, t)$ yacen en el cilindro $\{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 = 1\}$, comienzan en $p = (1, 0, 0)$ cuando $t = 0$, y pasan por el punto $q = (1, 0, 2\pi)$ cuando $t = 2\pi$. Sus longitudes entre esos dos puntos son

$$L(\gamma_1) = 2\sqrt{2}\pi \quad \text{y} \quad L(\gamma_2) = 2\sqrt{5}\pi\,,$$

respectivamente. ¿Por qué es $L(\gamma_1)$ menor que $L(\gamma_2)$? $\square$

Sabiendo el cómo medir las longitudes de curvas en una superficie, podemos entonces formularnos problemas un poco mas complicados. Entre otros, si nos damos un par de puntos p y q en S, podemos preguntarnos si existen curvas sobre la superficie que conectan a dichos puntos, y de ser así, si dentro del conjunto de tales curvas existe alguna cuya longitud sea mínima.

La primera parte del problema precedente es resoluble con facilidad. A veces ciertos puntos de S no pueden ser conectados por curvas continuas sobre la superficie, como es el caso, por ejemplo, de la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, un hiperboloide de dos hojas en el cual los puntos de una de ellas no pueden conectarme continuamente con los puntos de la otra. Por ese motivo, consideraremos solamente superficies conexas, ó en el peor de los casos, consideraremos apenas una componente conexa de la superficie dada. Si p y q están en la misma componente, siempre existirán curvas continuas que los conectan.

Bajo esta hipótesis, la segunda parte del problema adquiere sentido: entre las curvas que conectan los dos puntos p y q, podemos preguntarnos si existe una cuya longitud sea la menor posible. Tal curva será, por definición, una *curva geodésica* que conecta a p y q. De un modo más general, definimos como una geodésica entre p y q a cualquier curva en S que conecta a dichos puntos y que sea un punto crítico del funcional longitud descrito en (1).

Antes de analizar algunos ejemplos, observemos que la solución al problema de cómo medir longitudes de curvas en una superficie S nos abre un gran espectro de posibilidades para estudiar a S. De hecho, puesto que dados puntos p y q en S existen curvas que los conectan y cuyas longitudes sabemos medir, podemos definir la función

$$d_S(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)\,, \tag{2}$$

calculando el ínfimo sobre todas las curvas en S que conectan a los puntos dados. Siendo $L(\gamma)$ acotada inferiormente, $d_S(p, q)$ está bien definida, y claramente satisface las siguientes propiedades:

a) $d_S(p, q) \geq 0$, y es cero si $p = q$;
b) $d_S(p, q) = d_S(q, p)$;
c) $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$.

Con la excepción de una propiedad que queda aún por ser verificada, d_S define una noción de distancia en la superficie S. La propiedad en cuestión es el recíproco de la propiedad indicada en (a): $d_S(p,q)$ puede anularse solamente cuando $p = q$.

La función d_S dota a la superficie S de la estructura de un espacio métrico. Podemos así pregúntarnos si esta estructura métrica determina de alguna manera, entre todas las curvas sobre S, cuales son geodésicas. La respuesta es sí, y está codificada en la *desigualdade triangular* (c). Porque si definimos una noción de triángulo sobre la superficie cuyos lados tengan longitudes que satisfagan esta desigualdad, los arcos de curvas que limitan a tales triángulos serán necesariamente segmentos de curvas geodésicas en el espacio métrico (S, d_S).

Más aún, la métrica d_S induce una topología en S, y es natural entonces el pregúntarnos también si dicha topología coincide con la topología que S tenía de partida. De ser así, esperaríamos el que fuese posible estudiar propiedades topológicas de S adoptando un punto de vista métrico. Véamos.

Ejemplo 2. ¿Cuáles son las geodésicas de un plano con la métrica Euclidiana?

En primer lugar, podemos cambiar las coordenadas, de ser necesario, de modo tal que el plano en cuestión sea el plano xy. Y en lo se refiere a esta problema, identificaremos a dicho plano con $\mathbb{R}^2$ provisto con su métrica usual, olvidándonos de que está contenido en $\mathbb{R}^3$. Hacemos esto sin perder generalidad porque las métricas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son compatibles. La noción de distancia entre puntos $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$ del plano está dada por $d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.

La distancia d ha sido usada por muchos siglos en el estudio de los triángulos, conjuntos limitados por tres segmentos de rectas. Las longitudes de los lados de un triángulo arbitrario es la distancia entre sus correspondientes vértices, y tales longitudes satisfacen la desigualdad triángular. Esto basta para concluir que los segmentos de líneas rectas son curvas geodésicas en el plano.

Pues dados puntos p y q en $\mathbb{R}^2$, existen curvas que los conectan, y como sus longitudes están acotadas inferiormente, podemos también definir $d_S(p,q) = \inf_\gamma L(\gamma)$. Supongamos que este ínfimo es alcanzado por alguna curva $\gamma(t)$. Si tal curva no es un segmento de recta, estudiémosla en una porción suficientemente pequeña de ella, digamos entre $t = a$ y $t = b$, donde esto se manifiesta. Consideremos los puntos $p_0 = \gamma(a)$ y $q_0 = \gamma(b)$, y un punto intermediario $r = \gamma(t)$ para algun $t \in (a,b)$. Como γ no es un segmento de recta en ese intervalo, los puntos p_0, q_0 y r definen un triángulo. Si el intervalo $[a,b]$ tuviese medida muy pequeña, el segmento de recta entre p_0 y r tendría una longitud l_1 aproximadamente igual a la longitud de γ entre dichos puntos. De manera similar, el segmento de recta entre r y q_0 tendría longitud l_2 aproximadamente igual a la longitud de γ entre tales puntos. Consecuentemente, la longitud de γ entre p_0 y q_0 es aproximadamente igual a l_1+l_2, y la aproximación es cada vez mejor si la medida del intervalo $[a,b]$ se torna cada vez menor. Luego, si l es la longitud del segmento de recta entre p_0 y q_0, usando la desigualdade triángular podemos concluir que $l < l_1 + l_2$. Así, obtendríamos una curva entre p y q cuya longitud sería estrictamente menor que $L(\gamma)$ si sustituyésemos a la curva γ en el intervalo $[a,b]$ por el segmento de recta que conecta a los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. Más esto contradiría el hecho de que γ realiza la distancia d_S entre p e q, y por lo tanto, no es posible el encontrar una curva entre tales puntos de longitud menor que la longitud de γ. Luego, γ es una recta, y $d_S(p,q) = L(\gamma) = d(p,q)$. $\square$

Ejemplo 3. Ataquemos ahora el problema resuelto en el ejemplo anterior usando tecnicas de Cálculo Diferencial. Nos damos la función longitud de γ, $L(\gamma)$, para curvas γs que conectan a p y q, y nos proponemos encontrar su mínimo. Hacemos esto encontrando los puntos críticos de L, es decir, aquellos de sus argumentos donde su derivada es cero. ¿Qué queremos decir con esto? Puesto que L es una función de γ, la interpretación de esta afirmación debe hacerse con un cierto cuidado.

Comencemos aclarando un poco el dominio de la función L, el cual hemos ignorado hasta ahora. Este está contenido en el conjunto de curvas que conectan a p y q. No perdemos generalidad si suponemos que las curvas conectando a dichos puntos lo hacen en tiempo igual a 1, comenzando en p cuando $t=0$ y terminando en q cuando $t=1$. Y puesto que deseamos calcular sus longitudes, suponemos adicionalmente que estas curvas son diferenciables con respecto a t. Ó dicho de otra manera, ellas tienen vector velocidad bien definido en cada punto. También necesitaremos que tengan vector aceleración, para lo que se requiere la existencia de derivadas segundas. Terminamos así considerando al conjunto

$$\mathcal{C}_{pq} = \{\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2 : \ \gamma \text{ es una función } C^2, \ \gamma(0)=p, \ \gamma(1)=q\}$$

como el dominio de la función L,

$$L : \mathcal{C}_{pq} \mapsto \mathbb{R}\,,$$

de tal manera que si representamos a γ en coordenadas como $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, tenemos que

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2}\, dt\,.$$

¿Cómo podemos calcular la derivada de L? Lo hacemos reduciendo dicho cálculo al cálculo de la derivada de una función de variable real, como aquellas encontradas en cursos elementales. Véamos.

Sea $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función arbitraria de tipo C^2 y tal que $h(0) = h(1) = (0,0)$. Para un parametro real τ y una curva γ en $\mathcal{C}_{pq}$, la función $\gamma_\tau = \gamma + \tau h$ también será un elemento de $\mathcal{C}_{pq}$, es decir, una curva de tipo C^2 que conecta a los puntos p y q.

No parece ser el que hayamos ganado mucho, más el argumento aún no termina. Supongamos que γ sea un punto crítico de L, y mas especificamente, supongamos que γ sea un mínimo. Entonces $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ para cualquier curva $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}_{p,q}$. En particular, para una h arbitraria como esa del párrafo anterior, tendremos que $L(\gamma) \leq L(\gamma_\tau)$, y la función $\tau \mapsto L(\gamma_\tau)$ tendrá un mínimo local en $\tau = 0$. Consecuentemente, su derivada con respecto a τ deber ser cero en $\tau = 0$.

Como función de τ, $L(\gamma_\tau)$ es una función como aquellas estudiadas en cursos de Cálculo Diferencial, una función de una variable real. Determinaremos ahora su derivada, y usaremos el resultado para deducir la conclusión apropiada con respecto al problema de minimización que originalmente nos propusimos.

Usemos la notación $\dot{\gamma}$ para referirnos a la derivada con respecto a t, el argumento de la curva γ (y también de h). Por la regla de la cadena, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} L(\gamma + \tau h) \mid_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d(\gamma_1 + \tau h_1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(\gamma_2 + \tau h_2)}{dt} \right)^2} dt \mid_{\tau=0} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} (\dot{\gamma}_1 \dot{h}_1 + \dot{\gamma}_2 \dot{h}_2) dt \,. \end{aligned}$$

Ahora podemos integrar por partes. Ya que $h(0) = h(1) = (0,0)$, los términos de borde se anulan, y obtenemos como resultado

$$\frac{d}{d\tau} L(\gamma_\tau) \mid_{\tau=0} = -\int_0^1 \left(h_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}_1}{\|\dot{\gamma}\|} \right) dt + h_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}_2}{\|\dot{\gamma}\|} \right) \right) dt \,.$$

Para que $\gamma = \gamma_\tau|_{\tau=0}$ sea un mínimo de L, la expresión anterior debe ser identicamente nula para cualquier $h = (h_1, h_2)$ del tipo considerado. Escojamos a h de la forma

$$h = \eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) ,$$

donde $\eta(t)$ es una función no negativa en $[0,1]$ la cual se anula en 0 y en 1, y que es identicamente igual a 1 en *casi toda* la porción restante del intervalo. Por la positividad del integrando, concluimos que γ es un punto crítico sí, y solo sí,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) = 0 \,. \tag{3}$$

Reescribamos el resultado precedente con respecto a un parámetro más conveniente que el parámetro t. Después de todo, t fué escogido arbitrariamente y, por conveniencia, podemos cambiarlo a nuestro gusto. Así, consideremos el parámetro *longitud de arco* s, relacionado con t por la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\| \,.$$

Luego, como función de s, el vector velocidad de γ tiene norma 1. De hecho,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}\,,$$

y esto hace obvio lo afirmado. La ecuación (3) es equivalente a

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0\,.$$

En otras palabras, como función de la longitud de arco, $\gamma(s)$ tiene aceleración nula, y por lo tanto, debe ser una función lineal de s. Puesto que conecta los puntos p y q, si l es su longitud entre dichos puntos, tendremos que

$$\gamma(s) = \frac{l-s}{l}p + \frac{s}{l}q\,.$$

Observemos que $\dot{\gamma}(s) = (q-p)/l = (q-p)/\|q-p\|$. Y observemos también que en este caso, la unicidad del punto crítico del funcional L en (1) es suficiente para concluir que la curva γ é es en realidad un mínimo.

Las geodésicas del plano que pasan a través de un punto dado nunca se vuelven a tocar. Por otro lado, dada una geodésica y un punto fuera de ella, existe una única geodésica que contiene a ese punto y que no intersecta a la geodésica original. $\square$

Ejemplo 4. ¿Cuáles son las geodésicas de la esfera de radio a? Responderemos a esta pregunta de una manera muy simple, usando una vez mas el argumento del Ejemplo 2.

El radio a caracteriza a la esfera de una manera esencial, y por estar contenida en $\mathbb{R}^3$, la esfera hereda una noción de distancia inducida por la noción de distancia en ese espacio. De hecho, aprendemos sobre esta noción muy rapidamente en cursos de Geometría Euclidiana. Porque dados dos puntos p y q de la esfera de radio a, la distancia entre ellos es igual a $a\theta$, donde θ es el ángulo que sustenta el arco de p a q sobre el *meridiano* definido por esos puntos. Llamaremos meridiano de una esfera a cualquier circunferencia que tenga el mismo radio y centro de la esfera dada. Ellas son el resultado de intersectar la esfera con planos que contienen a su centro. Dos puntos no antipodales de la esfera determinan un meridiano de forma única, pues ellos, junto con el centro, determinan de manera única un plano.

De este modo, sabemos ya medir las distancias entre puntos de una esfera dada. Ahora podemos definir un triángulo esférico. Comenzaremos por decir que tres puntos de la esfera p, q y r se dicen no colineales si los tres no se encuentran simultaneamente sobre el mesmo meridiano. Dados tales puntos, el triángulo esférico que ellos definen es el conjunto de los puntos de la esfera limitado por los arcos de meridianos determinados por p y q, q y r, y r y p, respectivamente.

Las longitudes de los lados de triángulos esféricos satisfacen la desigualdad triángular. En consecuencia, repitiendo el argumento del Ejemplo 2, podemos concluir que las geodésicas de la esfera son los segmentos de meridianos.

Las geodésicas esféricas (en otras palabras, los meridianos) que pasan por un punto se cruzan otra vez en el punto antipodal. Y dada una geodésica y un punto exterior a ella, no existe ninguna otra geodésica que contenga a dicho punto y que no intersecte a la geodésica inicial. □

Ejercicio 1. Convenzase que los triángulos esféricos satisfacen la desigualdade triángular (relacione este hecho con las propiedades de los conos sólidos sustentados por los triángulos esféricos). □

Ejercicio 2. Demuestre que las geodésicas esféricas son segmentos de meridianos usando un principio variacional como aquel del Ejemplo 3. ¿Cuál sistema de coordenadas sería conveniente utilizar? ¿Cómo debe ser el vector acelaración de una geodésica esférica en relación a la propia esfera? □

Ejemplo 5. Finalmente, consideraremos un caso que nos será de gran utilidad. Por ahora nós ilustrará la dependencia estrecha que existe entre la noción de geodésica y la métrica en la superfície en cuestión.

Por razones históricas, imitaremos la notación empleada en Física. Consideremos el conjunto de puntos $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ que satisfacen la relación $x^2 + y^2 - t^2 = -a^2$ para algun número real $a > 0$ dado:

$$H_a = \{(x, y, t) : \; x^2 + y^2 - t^2 = -a^2\} \, .$$

Como conjunto, H_a yace dentro de $\mathbb{R}^3$, mas le proveeremos de una estructura métrica distinta a aquella inducida por la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^3$. Véamos.

Dar una métrica en una superficie es lo mismo que dar una manera de medir el producto interno de vectores tangentes a la superficie en cualquier punto de ella. Si $U = u_1\partial_x + v_1\partial_y + w_1\partial_t$ y $V = u_2\partial_x + v_2\partial_y + w_2\partial_t$ son vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$, definimos una forma bilineal Q por la expresión

$$Q(U, V) = u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2 \, .$$

A $\mathbb{R}^3$ provisto de una tal estructura lo llamaremos *espacio-tiempo*, terminología usada por los Físicos, y análoga al concepto de espacio Euclidiano, término usado por los Matemáticos para referirse a $\mathbb{R}^3$ provisto de su estructura métrica usual. Observemos que la forma bilineal usual de $\mathbb{R}^3$ y Q no son equivalentes, pues las correspondientes matrices simétricas yacen en diferentes componentes, una en el conjunto de matrices de determinante negativo, y la otra en el conjunto de determinante positivo.

Usando esta forma cuadrática Q, el conjunto H_a se torna en la Q-esfera de radio $\sqrt{-a^2}$.

La forma bilineal Q no es un producto interno porque, en general, $Q(U, U)$ no es mayor ó igual a cero. De hecho, podemos clasificar los vectores tangentes en tres tipos: decimos que U es un vector *espacial* si $Q(U, U) > 0$; U es un vector *temporal* si $Q(U, U) < 0$; y U es un vector *nulo* ó en el *cono de luz* si $Q(U, U) = 0$.

Daremos a H_a la métrica que la forma bilineal Q induce. Es decir, definiremos el producto interno de vectores tangentes a H_a en un punto cualquiera por la expresión

$$\langle U, V\rangle \stackrel{def}{=} Q(U,V)\,. \tag{4}$$

Es evidente que antes de proceder debemos verificar algo de cuidado, pues dado que Q no define un producto interno en $\mathbb{R}^3$, no está claro el por qué la expresión anterior define un producto interno en H_a. Para poder concluir eso, todos los vectores no triviales tangentes a H_a tendrían que ser espaciales, y eso no parece óbvio, ¿verdad?

De hecho, no es obvio, mas podemos verificar que es así. Consideremos un vector tangente a H_a en el punto (x, y, t):

$$U = u\partial_x + v\partial_y + w\partial_t\,.$$

Ya que U es tangente a H_a en (x, y, t), tenemos que

$$xu + yv - tw = 0\,,$$

y consecuentemente,

$$\begin{array}{rcl} \langle U, U\rangle & = & uu + vv - ww \\ & = & u^2 + v^2 - \dfrac{(xu+yv)^2}{t^2} \\ & \geq & \dfrac{t^2(u^2+v^2) - (u^2+v^2)(x^2+y^2)}{t^2} \\ & = & \dfrac{a^2}{t^2}(u^2+v^2)\,, \end{array}$$

resultado para el cual hicimos uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La cota inferior de la última expresión solamente puede ser cero si $u = v = 0$, y en tal caso, w es también cero. En otras palabras, $\langle U, U\rangle \geq 0$, y la igualdad 0 se alcanza solamente cuando U es el vector nulo. Así pués, (4) define un producto interno en el espacio tangente a H_a en cada uno de sus puntos.

Ahora que sabemos el cómo medir la longitud de un vector tangente a una curva en cada uno de sus puntos, usando (1) podemos calcular la longitud de la curva misma. ¿Cuáles son entonces las curvas que minimizan este funcional en H_a? La respuesta es sencilla, y la daremos usando un método variacional.

Puesto que H_a no es conexo, consideraremos su componente H_a^+ formada por los puntos (x, y, t) de este conjunto para los cuales $t > 0$. Y llamaremos s al parámetro de la curva $\gamma(s) = (x(s), y(s), t(s))$ que conecta a dos puntos dados p y q en H_a^+. La expresión $\dot{f}$ indicará la derivada de la función f con respecto a s, y por ahora, tomaremos el parámetro s de tal manera que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Así pués, si $h = (h_1(s), h_2(s), h_3(s))$ es cualquier función tal que

$$x(s)h_1(s) + y(s)h_2(s) - t(s)h_3(s) = 0\,, \tag{5}$$

y tal que $h(0) = h(1) = (0, 0, 0)$, entonces $\gamma_\tau = \gamma + \tau h$ define una deformación infinitesimal de la curva γ en H_a a través de curvas que conectan a p con q.

De tal manera que si γ es un punto crítico de (1), luego de una integración por partes, obtendremos que

$$0 = \frac{d\gamma_\tau}{d\tau} \,|_{\tau=0} = \int_0^1 \left(h_1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}}{\|\dot{\gamma}\|}\right) + h_2 \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{y}}{\|\dot{\gamma}\|}\right) - h_3 \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{t}}{\|\dot{\gamma}\|}\right)\right) ds\,,$$

donde $\|\dot{\gamma}\|$ es calculada usando la forma bilineal (4).

Reparametricemos ahora la curva como lo hicimos en el Ejemplo 3, y usemos la longitud de arco como parámetro al cual llamaremos s también para evitar cambios notacionales innecesarios. En ese caso, $\|\dot{\gamma}\| = 1$, y usando el multiplicador de Lagrange (5), la ecuación anterior, que debe ser válida para todo tal h, implica que $\ddot{\gamma} := \frac{d\dot{\gamma}}{ds} = \lambda\gamma$ para alguna función a valores reales λ. En otras palabras, el vector aceleración de una curva crítica debe ser proporcional al vector posición. Ahora bien, puesto que $\langle\gamma,\gamma\rangle = -a^2$, tenemos que $\langle\dot{\gamma},\gamma\rangle = 0$, y por lo tanto, $\langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle + \langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = 0 = -\lambda a^2 + 1$. Así pués, λ es constante e igual a $1/a^2$. Luego, la ecuación geodésica, escrita con respecto a la longitud de arco, está dada por

$$\ddot{\gamma} = \frac{d\dot{\gamma}}{ds} = \frac{1}{a^2}\gamma\,,$$

y su solución está dada por la curva

$$\gamma(s) = p\cosh\left(\frac{s}{a}\right) + av\,\mathrm{senh}\left(\frac{s}{a}\right),$$

donde el vector velocidad inicial v, el cual satisface $\langle v,v\rangle = 1$, se escoge de tal manera que $\gamma(l) = q$ para cierto número real positivo l, la longitud de γ entre p y q. Vemos así que

$$v = \frac{a^2 q + \langle p,q\rangle p}{a\sqrt{\langle p,q\rangle^2 - a^4}}\,,$$

y que la longitud de γ entre los puntos p y q está dada por

$$l = a\log\left(\frac{-\langle p,q\rangle + \sqrt{\langle p,q\rangle^2 - a^4}}{a^2}\right).$$

En estas expresiones, $\langle p,q\rangle = Q(p,q)$ cuando vemos a p y a q como vectores en el espacio-tiempo.

Recordemos que las geodésicas esféricas se pueden obtener como intersecciones de la esfera con los planos que pasan por su centro. Las geodésicas de la pseudo-esfera H_a se pueden obtener da manera similar, como intersecciones con planos. Sean p y q puntos distintos en H_a^+. Ellos, junto con $(0,0,0)$ determinan de manera única un plano. La geodésica en H_a que conecta a p y a q es un segmento de curva que se obtiene intersectando tal plano con H_a. Tal afirmación se puede demostrar a partir de la expresión para la geodésica $\gamma(s)$ encontrada anteriormente, la cual, para cada valor de s, es una combinación lineal de los vectores p y q que yacen en H_a.

La pseudo-esfera H_a tiene una realización *visualmente* acotada. Consideremos el ramo H_a^+, y sobre este la función

$$(x,y,t) \mapsto (u,v) = \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) .$$

Ella define un difeomorfismo isométrico entre H_a^+ y el disco $D_a = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \; u^2+v^2 < a^2\}$ cuando se dota a este último de la métrica*

$$ds^2 = \frac{(1-\frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)(du^2+dv^2) + \frac{1}{a^2}(udu+vdv)^2}{(1-\frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)^2} , \tag{6}$$

y las geodésicas vistas en D_a son segmentos de rectas. No obstante, desde el punto de vista métrico, el disco D_a no es acotado. Su métrica (6) difiere notablemente de du^2+dv^2, la estructura inducida por la métrica habitual del plano, y con ella, el borde $\partial D_a = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \; u^2+v^2 = a^2\}$ está a una distancia infinita de cualquiera de sus puntos interiores.

Las geodésicas en H_a se comportan de una manera interesante. Dada una y un punto exterior a ella, existe un número infinito de geodésicas a través de tal punto que no intersectan a la geodésica original. □

Los ejemplos discutidos anteriormente tienen un comportamiento radicalmente distinto. Esto se debe a una propiedad que estudiaremos en la sección próxima, y que ya se ha manifestado en las cosas que hemos hecho hasta ahora.

A titulo de ejemplo ilustrativo, consideremos la esfera $\mathbb{S}^2$ de radio 1, el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, y la pseudo-esfera H de (pseudo) radio $\sqrt{-1}$. En cada uno de estos casos, consideremos circunferencias y calculemos sus longitudes. Por definición, las circunferencias se describen dando un punto en el espacio, su centro, y un número real positivo r, su radio, y consisten del conjunto de puntos en la superficie que distan r unidades de su centro. Para los ejemplos estudiados, las longitudes de tales circunferencias no dependen del punto escogido como centro, y son iguales a $2\pi \operatorname{sen} r$, $2\pi r$ y $2\pi \operatorname{senh} r$, respectivamente.

En el caso de $\mathbb{S}^2$, el radio puede variar en el intervalo $(0,\pi)$, y la longitud de la circunferencia de radio r es una función acotada que alcanza su máximo cuando $r = \pi/2$, lo cual ocurre cuando la circunferencia es el meridiano ecuatorial, visto considerando su centro como uno de los dos polos esféricos.

Para el plano, las circunferencias de radio r tienen longitudes que varian linealmente con r, y puesto que este varia en $(0,\infty)$, tales longitudes no son acotadas superiormente.

---

*La expresión ds^2 es una notación clásica para referirse al producto interno de vectores, de tal manera que si $U = \alpha(u,v)\partial_u + \beta(u,v)\partial_v$ y $V = \tilde{\alpha}(u,v)\partial_u + \tilde{\beta}(u,v)\partial_v$ son vectores tangentes a D_a en el punto (u,v), su producto interno en la métrica (6) es la función

$$\frac{(1-\frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)(\alpha\tilde{\alpha}+\beta\tilde{\beta}) + \frac{1}{a^2}(u\alpha+v\beta)(u\tilde{\alpha}+v\tilde{\beta})}{(1-\frac{1}{a^2}(u^2+v)^2)^2} .$$

Cuando $U = V$ es el vector tangente a una curva, la raiz cuadrada de esta expresión, es decir, ds, produce el elemento diferencial de longitud de la curva.

Para la pseudo-esfera H, el radio puede variar en $(0, \infty)$ y la función longitud de una circunferencia de radio r no está acotada superiormente tampoco, así como ocurre en el caso del plano. No obstante, esta vez la longitud crece exponencialmente como función del radio.

Por ejemplo, si escogemos al metro como unidad de longitud, las circunferencias de radio $\pi/2$ en cada uno de los tres casos tendrían longitudes de $6,283$ m, $9,870$ m, y $14,459$ m, respectivamente. Si escogemos un radio de 20 metros, la circunferencia correspondiente en H tendría una longitud del orden de 10^9 m, es decir, del orden de un millón de kilómetros. En el plano, tal circunferencia tendría una longitud del orden de 125 m. En $\mathbb{S}^2$, un tal radio es excesivamente grande, y no podemos hablar de una circunferencia con estas características. De cualquier manera, sabemos ya que la mayor longitud posible de circunferencia alguna en esta superficie es de $6,283$ m.

Los resultados anteriores no dependen del punto escogido como centro porque las superficies estudiadas tienen una grand cantidad de simetrías. En torno a cualquier punto, tales superficies aparecen metricamente del mismo modo como aparecerian si cambiasemos al punto por otro.

2.2. **Curvatura.** En las tres superficies analizadas en la sección precedente, las geodésicas exhiben un comportamiento completamente distinto. Para la esfera, las geodésicas que pasan por un punto común inicialmente se separan para eventualmente invertir esa tendencia y volverse a intersectar en el punto antipodal. Para el plano, las geodésicas a través de un punto nunca se vuelven a encontrar, y la longitud de la circunferencia con centro en tal punto crece proporcionalmente con la distancia a él. En el hiperboloide ó pseudo-esfera, las geodésicas a través de un punto común tampoco vuelven a encontrar, más esta vez la longitud de la circunferencia centrada en tal punto crece exponencialmente con la distancia al punto en cuestión. ¿Qué propiedad de la métrica en la superficie es responsable por este comportamiento tan distinto de las geodésicas que pasan por un punto común?

La propiedad en cuestión es local, es decir, lo que contribuye a este comportamiento es algo intrínseco a la métrica en la superficie cuyo efecto en un punto dado solamente depende de lo que acontece metricamente *cerca* de ese punto. El efecto total que produce *enfocamiento* ó *dispersión* de las geodésicas es la "suma de estas contribuciones locales" cuando nos movemos a lo largo de la curva. Por ahora, nos concentraremos en la definición y estudio de esta propiedad local, ó *curvatura*.

El término es apropiado. Analicemos el concepto primeramente a través del caso de una superficie dentro del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $z = f(x, y)$. Queremos ver cómo se deforma esta superficie en el punto $(0, 0, f(0, 0))$.

Por simplicidad, redefinimos las coordenadas, de ser necesario, para ponernos en la situación donde $f(0, 0) = 0$. El plano tangente en el punto $(0, 0, 0)$, cuya ecuación es $xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) - z = 0$, nos permite aproximar linealmente a la superficie. En otras palabras, si intentamos encontrar puntos (x, y, z) en S con x y y muy próximos a cero, la mejor aproximación lineal está dada por $z = xf_x(0,0) + yf_y(0,0)$, donde (x, y) varia en el entorno de $(0,0)$ donde consideramos la aproximación. Eso es bastante bueno, mas tal aproximación solamente refleja la estructura lineal de la superficie S en el punto $(0,0,0)$. Y nosotros queremos ver la deformación de S en $(0,0,f(0,0))$ que nos indica su curvatura.

Parece entonces razonable estudiar la diferencia $z = f(x,y) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0)$, y ver el comportamiento de la superficie resultante en un entorno de $(0,0,0)$. Puesto que hemos removido los términos que aproximan linealmente a la superficie S en $(0,0,0)$, el estudio de esta nueva ecuación nos permitirá comprender la deformación de S en el entorno de $(0,0,0)$ que no es lineal, y por lo tanto, envuelve la torción local que la superficie experimenta. Tal torción dependerá de los términos cuadráticos de la función f que define a la superficie S en $(0,0,0)$, y resultará ser cero si estos se anulan en el punto. El concepto que intentamos entender es un concepto diferencial de orden por lo menos 2.

Así, supongamos que

$$z = f(x,y)\,, \tag{7}$$

donde

$$f(0,0) = 0\,, \quad (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)\,. \tag{8}$$

¿En qué sentido se tuerce la superficie S en el punto $(0,0,0)$?

Teniendo en cuenta las condiciones en (8), el plano tangente a S en el punto $(0,0,0)$ es horizontal (y coincide con el plano xy). La convexidad de S en $(0,0,0)$ mide su curvatura, siendo positiva, como la de la esfera, cuando todos los puntos de S cercanos a $(0,0,0)$ se encuentran del mismo lado del plano tangente, ó negativa si en cualquier entorno de $(0,0,0)$ hay puntos que se encuentran en distintos lados de tal plano. Esta explicación heurística adquiere precisión si definimos la curvatura K en $(0,0,0)$ como

$$K = \det \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(0,0) & \partial_y\partial_x f(0,0) \\ \partial_x\partial_y f(0,0) & \partial_y\partial_y f(0,0) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

el determinante del Hessiano de la función f en el origen.

Como el Hessiano de f es una matriz simétrica, se le puede diagonalizar. Si λ_1 y λ_2 son sus autovalores, $K = \lambda_1\lambda_2$. Luego, $K > 0$ si ambos autovalores son no nulos y del mismo signo, $K < 0$ si los autovalores son no nulos de signos opuestos, y $K = 0$ si por lo menos uno de los autovalores es cero. La explicación heurística del concepto de curvatura dada en el párrafo anterior es perfectamente clara si escogemos las coordenadas (x, y, z) de tal manera que $f(x,y) = \frac{1}{2}\lambda_1 x^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 y^2 + o(x^2 + y^2)$, y estudiamos el gráfico de $z = f(x,y)$ en un entorno suficientemente pequeño del origen.

Usemos (9) para calcular la curvatura del plano. Esto es relativamente elemental. Dado cualquier punto p del plano xy, pensado como un plano contenido en $\mathbb{R}^3$, podemos escoger las coordenadas de manera que p corresponda a $(0,0,0)$ y que z sea dada por la función $f(x,y) \equiv 0$. El Hessiano de tal función es la matriz cero. Luego, $K(p) = 0$ para cualquier punto p, lo cual era de esperarse pues el plano es exactamente eso, plano.

Ahora usemos (9) para calcular la curvatura de la esfera de radio a. Podemos hacerlo así pues la esfera también está inmersa en $\mathbb{R}^3$ y tiene la métrica que tal espacio induce sobre ella. El centro de la esfera es irrelevante, y dado un punto p cualquiera en ella, escogemos las coordenadas (x, y, z) de tal manera que p se corresponda con el punto $(0, 0, 0)$ y la esfera sea dada localmente por $z = -a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ con la función de (x, y) a la derecha satisfaciendo la condición (8). Luego,

$$K(p) = \det \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(0,0) & \partial_y \partial_x f(0,0) \\ \partial_x \partial_y f(0,0) & \partial_y \partial_y f(0,0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}\,.$$

Este resultado nos muestra que la curvatura de la esfera es positiva y no depende del punto donde se le calcula. Su valor a^{-2} disminuye cuadraticamente con el radio, lo cual es bastante razonable. Una esfera de radio cada vez mayor y mayor parece cada vez más y más plana. La Tierra, una (cuasi) esfera con un radio de aproximadamente $6.378, 15$ km, se pensaba plana hasta hace relativamente poco tiempo. Esto no es sorprendente por parte del común de la gente, pues la curvatura terrestre (en km^{-2}) es del orden de $2, 46 \times 10^{-8}$.

Ejercicio 3. Considere las superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas por las ecuaciones

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\,.$$

Por la definición anterior, sabemos que sus curvaturas en el punto $(0, 0, 0)$ son 1 y -1, respectivamente. Calcule la curvatura de cada una de estas superficies en un punto arbitrario. ¿Qué signo tienen los correspondientes resultados? $\square$

Ejercicio 4. Demuestre que la curvatura de un cilindro en cualquiera de sus puntos es cero. ¿Por qué tiene el cilindro la misma curvatura que el plano? $\square$

A pesar del avance que hemos hecho en el estudio del concepto de curvatura, la definición ha sido dada solamente para el caso de superficies contenidas en el espacio Euclidiano, hecho no aplicable a la pseudo-esfera H_a discutida en el Ejemplo 5. ¿Cómo podemos dar una definición intrínseca, es decir, una definición que solamente dependa de S y no del espacio ambiente donde S pueda estar contenida? Podemos responder a tal pregunta de varias formas, y naturalmente, todas envuelven a la estructura métrica de la superficie.

Una primera forma consiste en definir la curvatura en el punto p por la expresión

$$K(p) = -3 \lim_{r \to 0} \Delta(\log r)\,. \tag{10}$$

Aquí, Δ es el Laplaciano de la métrica en S, y $r = r(q)$ es la distancia geodésica de q al punto p. El Laplaciano actúa sobre la función $\log r$ como función de q.

Veamos lo que (10) nos da en el caso del plano. La distancia geodésica de q a un punto fijo p es la longitud Euclidiana del vector $q - p$. Tomemos coordenadas que identifiquen a p con el origen. Luego, $r = \|q\|$ es la distancia geodésica entre p y q. Ahora bien, en coordenadas polares (r, θ), el Laplaciano Δ es el operador dado por

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 \, .$$

Para funciones que solamente dependen del radio, el Laplaciano envuelve tan solo el cálculo de dos de sus derivadas con respecto a r. De tal manera que

$$-3\Delta(\log r) = -3\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right)\log r = -3\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right) = 0 \, ,$$

y por lo tanto, $K(p) = 0$, como sabíamos ya.

Veamos ahora lo que (10) nos da en el caso de la esfera de radio a. Sea p un punto dado en ella, y escojamos *coordenadas polares* (r, θ) en la esfera en torno a él: r es la distancia geodésica al punto p, el cual tomamos como uno de los polos de la esfera, y θ es el ángulo longitudinal del punto parametrizado por (r, θ) medido, modulo 2π, desde un meridiano fijo. En estas coordenadas, el Laplaciano de la esfera es el operador

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{a\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r + \left(\frac{1}{a\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)}\right)^2 \partial_\theta^2 \, .$$

Para calcular $\Delta(\log r)$ podemos ignorar nuevamente el término que envuelve las derivadas con respecto a θ. Obtenemos

$$\Delta(\log r) = \left(\partial_r^2 + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{a\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r\right)\log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{ar\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)} = -\frac{1}{3a^2} + O(r^2) \, ,$$

donde la última igualdad sigue de una expansión de Taylor a orden 2 en torno a $r = 0$. Luego,

$$K(p) = -3 \lim_{r \to 0} \Delta(\log r) = \frac{1}{a^2} \, ,$$

reproduciendo el resultado para la curvatura de la esfera de radio a obtenido anteriormente.

Ejemplo 6. Ya que (10) parece funcionar bien para calcular la curvatura del plano y de la esfera, usemos tal definición calcular la curvatura de H_a en un punto p.

En *coordenadas polares* centradas en p, la métrica de H_a se escribe como

$$ds^2 = dr^2 + a^2 \mathrm{senh}^2\left(\frac{r}{a}\right) d\theta^2 \, .$$

Implicitamente habiamos visto tal cosa al calcular la longitud de la circunferencia de radio geodésico igual a r para esta superficie. Teniendo esto en cuenta, el Laplaciano de H_a está dado por

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{a \operatorname{senh}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r + \left(\frac{1}{a \operatorname{senh}\left(\frac{r}{a}\right)}\right)^2 \partial_\theta^2 \,,$$

análogo al Laplaciano de la esfera con el papel de las funciones trigonométricas jugado esta vez por las funciones trigonométricas hiperbólicas. Luego,

$$\Delta(\log r) = \left(\partial_r^2 + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{a \operatorname{senh}\left(\frac{r}{a}\right)}\partial_r\right)\log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{ar \operatorname{senh}\left(\frac{r}{a}\right)} = \frac{1}{3a^2} + O(r^2)\,,$$

y por lo tanto,

$$K(p) = -3\lim_{r\to 0}\Delta(\log r) = -\frac{1}{a^2}\,.$$

Así vista, la curvatura de la pseudo-esfera H_a no depende del punto donde se le calcula, y es igual a la constante negativa $-1/a^2$. □

Ejercicio 5. ¿Qué ocurre con los Laplacianos de la esfera de radio a y de H_a cuando $a \to \infty$? ¿Por qué sucede tal cosa? □

Ejercicio 6. El ejercicio anterior sugiere el que podemos pensar al plano como un cierto límite de superficies de curvatura positiva, y como un cierto límite de superficies de curvatura negativa. ¿Qué propiedad topológica permitiría diferenciar tales límites? □

Los resultados precedentes indican que las expresiones (9) y (10) producen resultados coherentes. ¿Cómo podemos justificar la equivalencia entre ambos conceptos? Responderemos a esta pregunta usando un argumento elemental, justificando nuestra respuesta a través del uso de un sistema de coordenadas muy útil.

Observemos que el plano tangente a la superficie S en el punto $(0,0,0)$ coincide con el plano xy, y que las direcciones a lo largo de los ejes de coordenadas son *perpendiculares*. Tomemos el vector $u\partial_u + v\partial_v$ en el punto $(u,v,0)$, y por translación pensemos en él como un vector en $(0,0,0)$. Queremos encontrar la geodésica $\gamma(s) = (x(s), y(s), f(x(s), y(s)))$ que en el origen tiene a tal vector como su vector velocidad.

Puesto que S es una superficie contenida en $\mathbb{R}^3$, tiene perfecto sentido el calcular $\ddot{\gamma}$, y podemos definir tal expresión como el vector aceleración de la curva γ. Un argumento sencillo nos muestra que la curva es una geodésica sí, y solamente sí, su aceleración es perpendicular a la superficie, y como los vectores $\partial_x + f_x\partial_z$ y $\partial_y + f_y\partial_z$ son tangentes a S en $(x, y, f(x,y))$, concluimos que la ecuaciones para las componentes $x(s)$ y $y(s)$ de una geodésica estan dadas por

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + \frac{f_x(f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2)}{\sqrt{(1+f_x^2+f_y^2)}} &= 0\,, \\
\ddot{y} + \frac{f_y(f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2)}{\sqrt{(1+f_x^2+f_y^2)}} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Usamos tal resultado para encontrar el desarrollo en serie de Taylor de $\dot{x}(s)$ y $\dot{y}(s)$ a orden 2, y tomando el valor de γ correspondiente al parámetro $s = 1$, obtenemos un punto p en la superficie S cuyas coordenadas x y y tienen expansiones dadas por

(11)

$$
\begin{aligned}
x = x(u,v) &= u - \frac{(f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2)(f_{xx}u + f_{xy}v)}{6} + o((u^2+v^2)^{\frac{3}{2}})\,, \\
y = y(u,v) &= v - \frac{(f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2)(f_{xy}u + f_{yy}v)}{6} + o((u^2+v^2)^{\frac{3}{2}})\,,
\end{aligned}
$$

donde las derivadas de f son todas evaluadas en $(0,0)$.

Lo que el resultado precedente nos dice es que si tomamos a un punto de coordenadas (u,v) en el plano tangente al origen y nos movemos a lo largo de la geodésica $\gamma(s)$ cuyo vector velocidad inicial es $u\partial_u + v\partial_v$, cuando $s=1$ obtenemos un punto p en la superficie S cuyas coordenadas x y y poseen las expansiones dadas por (11). Decimos entonces que p tiene *coordenadas normales* (u,v), y que las expansiones nos dan aproximaciones cúbicas en u y v de las coordenadas $x(p)$ y $y(p)$ de p como un punto en $\mathbb{R}^3$.

Podemos ahora proseguir de dos maneras distintas. En coordenadas normales, el Laplaciano en $(0,0)$ está dado por el operador $\partial_u^2 + \partial_v^2$. Ciertamente, tenemos aún que definir este operador para superficies métricas en general, mas por ahora esto será suficiente, y esto es consistente con el Laplaciano de aquellas superficies métricas que conocemos bien al momento. Así, para calcular (10) y demostrar su equivalencia con (9), podríamos escribir la distancia geodésica r como función de (u,v) y usar (11) para encontrar su expansión en serie de Taylor a orden 3, a partir de lo cual sería fácil obtener el límite $\lim_{r\to 0}\Delta(\log r)$. En lugar de eso, demostraremos la equivalencia entre los dos conceptos usando un argumento que envuelve a las *coordenadas polares*, justificando así también la manera como fueron presentados los cálculos ya realizado donde usamos la noción dada por (10).

De hecho, decimos que el punto p, al cual le hicimos corresponder sus coordenadas normales (u,v), tiene coordenadas polares (r,θ) si $u = r\cos\theta$ y $v = r \operatorname{sen}\theta$. La función que asocia a (u,v) el valor en $s=1$ de la geodésica que posee tal vector como velocidad inicial, tiene diferencial que asocia los vectores ∂_r y ∂_θ con vectores tangentes a S *que son perpendiculares uno al otro*. Abusando de la notación, llamaremos ∂_r y ∂_θ a estos últimos vectores también. Es evidente que $\|\partial_r\| = 1$, y por la perpendicularidad de ∂_r y ∂_θ, que la métrica se expresa como

$$ds^2 = dr^2 + g(r,\theta)^2 d\theta^2 \,, \tag{12}$$

para cierta función no negativa $g(r,\theta)$. Claramente, tal función no es otra cosa sino la norma de ∂_θ.

¿Cómo podemos encontrar la expresión en coordenadas de ∂_θ? En otras palabras, ¿cómo podemos encontrar los coeficientes que producen la igualdad

$$\partial_\theta = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z$$

en el punto con coordenadas polares (r,θ)? Para eso, consideremos la curva $\gamma(s) = (x(u,v), y(u,v), f(x(u,v), y(u,v)))$ donde $u = u(s) = r\cos(\theta + s)$ y $v = v(s) = r\,\mathrm{sen}\,(\theta + s)$. Los coeficientes en cuestión estan dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{ds} x(u(s), v(s)) \mid_{s=0} \,, \\ B &= \frac{d}{ds} y(u(s), v(s)) \mid_{s=0} \,, \\ C &= \frac{d}{ds} f(x(u(s), v(s)), y(u(s), v(s)) \mid_{s=0} \,, \end{aligned}$$

y sus expansiones de Taylor son

$$\begin{aligned} A &= -v - \frac{\mathrm{II}(u,v)(-f_{xx}v + f_{xy}u)}{6} - \frac{\mathring{\mathrm{II}}\,(u,v)(f_{xx}u + f_{xy}v)}{3} \,, \\ B &= u - \frac{\mathrm{II}(u,v)(-f_{xy}v + f_{yy}u)}{6} - \frac{\mathring{\mathrm{II}}\,(u,v)(f_{xy}u + f_{yy}v)}{3} \,, \\ C &= (f_{xx}x(u,v) + f_{xy}y(u,v))A + (f_{xy}x(u,v) + f_{yy}y(u,v))B \,, \end{aligned}$$

donde $x(u,v)$ y $y(u,v)$ están dados por las expansiones (11), y

$$\mathrm{II}(u,v) = f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2$$

y

$$\mathring{\mathrm{II}}\,(u,v) = (f_{yy} - f_{xx})uv + f_{xy}(u^2 - v^2) \,,$$

respectivamente.

La función $g(r,\theta) = \|\partial_\theta\|$ se obtiene calculando $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Puesto que $r^2 = u^2 + v^2$, es sencillo ver que

$$g(r,\theta) = \sqrt{r^2 - \frac{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}{3} r^4 + o(r^4)} = r(1 - \frac{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}{6} r^2 + o(r^2)) \,.$$

Luego,

$$\Delta(\log r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\partial_r g}{rg} = -\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{3} + o(1) \,,$$

y la equivalencia entre (9) y (10) queda así claramente establecida.

En realidad, la demostración de la equivalencia requiere el estudio de los términos negativos de las expansiones que usamos en nuestro argumento, demonstrando que ellos no contribuyen al hallar el límite en cuestión. Esto se puede formalizar completamente si suponemos que la función f tiene por lo menos todas sus derivadas de hasta orden 3 continuas, porque en tal caso, la métrica es suficientemente regular para garantizar que tales términos se anulan, y todas las funciones usadas en el argumento son al menos continuas. De hecho, podemos hacer la demostración exigiendo un poco menos de la función f, mas omitiremos estos detalles técnicos aquí.

La definición de curvatura dada por (10) es intrínseca y nos permite que la calculemos para los tres modelos que hemos analizado hasta ahora. Ella envuelve al Laplaciano, operador diferencial asociado con la métrica de la superficie. Nos gustaría ver si podríamos redefinir este concepto apoyándonos en la noción de área en lugar del Laplaciano propiamente hablando.

La idea de cómo hacer esto es sugerida por los argumentos utilizados para llegar a la definición que nos dimos en el caso en el cual la superficie estaba contenida en el espacio Euclidiano. La curvatura $K(p)$ mide la distorsión local del disco de radio r en el plano tangente a la superficie en el punto p, cuando lo comparamos con el disco de radio r en la superficie misma. Tal distorsión es capturada a través de las áreas relativas de tales discos.

En efecto, dada la superficie S y un punto p en ella, trabajemos en coordenadas polares (r,θ) centradas en p, donde la métrica está dada como en (12) para cierta función no negativa $g(r,\theta)$. Sea D_r el disco en S de centro p y radio geodésico r. Sea D_r^0 el disco en el tangente a S en el punto p, de radio r. El tangente es un plano, y lo proveemos de la métrica usual, cosa que ya hicimos al hablar de la base ortonormal $\{\partial_u,\partial_v\}$. Luego, el área $A_0(r)$ de D_r^0 es igual a πr^2. Por otro lado, el área $A(r)$ del disco D_r en S puede calcular por la integral doble

$$A(r) = \iint_{D_r} g(s,\theta)ds\, d\theta\,. \tag{13}$$

Definimos entonces a $K(p)$ de acuerdo a la expresión

$$K(p) = 12 \lim_{r\to 0} \frac{A_0(r)-A(r)}{r^2 A_0(r)}\,, \tag{14}$$

la cual usaremos inmediatamente para recalcular las curvaturas de los tres modelos hasta ahora considerados.

Para el plano, $g(r,\theta)=r$, y (13) en tal caso nos dice que $A(r)=\pi r^2$, coincidiendo con $A_0(r)$. Esto es bien natural: los discos D_r y D_r^0 son congruentes uno al otro, y no hay distorsión alguna. Calculando el límite (14), obtenemos que $K(p)=0$.

Para la esfera de radio a, $g(r,\theta)=a\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{a}\right)$. Una integración sencilla nos dice que

$$A(r) = 2\pi a^2\left(1-\cos\left(\frac{r}{a}\right)\right)\,.$$

Una expansión de Taylor nos dirá entonces que

$$A_0(r)-A(r) = \frac{\pi}{12}\frac{r^4}{a^2} + O(r^6)\,,$$

y usando (14), obtenemos que $K(p)=1/a^2$.

Finalmente, para H_a, tenemos que $g(r,\theta) = a \operatorname{senh}\left(\frac{r}{a}\right)$. En este caso,

$$A(r) = -2\pi a^2 \left(1 - \cosh\left(\frac{r}{a}\right)\right) ,$$

y concluimos que

$$A_0(r) - A(r) = -\frac{\pi}{12}\frac{r^4}{a^2} + O(r^6) .$$

El límite definido por (14) produce entonces $K(p) = -1/a^2$.

Ejercicio 7. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por $z = f(x,y)$. Demuestre que la función K definida em (14) satisface la relación

$$(1 + f_x^2 + f_y^2)^2 K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 .$$

Concluya que (9) y (14) son equivalentes. □

2.3. **Superficies Riemannianas: geodésicas y curvatura.** Hasta ahora, a pesar de nuestro progreso en el entendimiento de las nociones de geodésicas y curvatura, no tenemos aún una definición general de lo que es una métrica en una superficie, y de hecho, ni siquiera una definición abstracta de lo que consideramos como una superficie. Dos de los tres modelos estudiados anteriormente están contenidos en $\mathbb{R}^3$, y el otro tuvo una realización específica que usamos a nuestro antojo. Mas ¿cómo procederíamos si tuviesemos que considerar superficies métricas en general?

Comenzaremos definiendo un concepto local. Suponemos de partida que S es un espacio topológico Hausdorff, y consideremos un punto p en S. Sea U un entorno de p y $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo de U a un abierto $\varphi(U)$ del plano. Decimos entonces que la pareja (U, φ) es una carta local en p, ó sistema de coordenadas en el entorno U de p. Las funciones $U \ni q \mapsto x^i(q)$, $i = 1, 2$, tales que $\varphi(q) = (x^1(q), x^2(q))$ son las coordenadas del punto q. La pareja $(\varphi(U), \varphi^{-1})$ en el sentido opuesto se dice ser una parametrización de S en el entorno U.

Una colección de cartas locales $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) :\ \alpha \in A\}$ se dice ser un *atlas* de S si $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha = S$, es decir, si los abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de las cartas constituyen un cubrimiento de S. El espacio S provisto de un atlas se dice ser una superficie topológica, el término superficie, ó dimensión 2, porque los abiertos de las cartas son homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^n$ con $n = 2$. La superficie S se dice ser de clase C^k si para el abierto de puntos comunes a cualquier pareja de entornos U_α y U_β, homeormorfos a través de φ_α y φ_β a abiertos de $\mathbb{R}^2$, la función de transición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es continuamente diferenciable de orden k como función entre subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$. Una superficie topológica S provista de un atlas *maximal* de tipo C^k con $k \geq 1$ se dice ser una superficie diferenciable. Todas las superficies que consideramos aqui son de tipo C^∞, o suaves como diremos también con frecuencia. Observemos que una superficie S de tipo C^k es automaticamente de tipo C^l para cualquier $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \leq k$. En todo nuestro trabajo, sería suficiente considerar superficies de tipo al menos C^3.

En la práctica, proveemos a S de un atlas de tipo C^k, y luego consideramos el atlas maximal que este genera para definir así la estructura diferenciable de S. El atlas maximal generado por el inicialmente dado consiste del conjunto de todas las cartas locales C^k compatibles con las cartas locales del atlas de partida.

Si en las definiciones dadas anterioremente reemplazasemos el 2 por un entero positivo general n, definiríamos lo que se conoce como una variedad C^k de dimensión n.

Ejercicio 8. Sea $\mathbb{RP}^2$ el conjunto de rectas a través del origen en $\mathbb{R}^3$, es decir, el cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ por la relación que identifica a $x = (x_0, x_1, x_2)$ con $\lambda x = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que $\mathbb{RP}^2$ es compacto y provéale de una estructura diferenciable que lo haga una superficie de tipo C^∞. Si en esta construcción se usa a $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}$, demuestre que el conjunto $\mathbb{CP}^2$ resultante es una variedad diferenciable compacta de dimensión 4. Generalice la construcción a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ó $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ para cualquier entero $n \geq 1$, y obtenga variedades compactas $\mathbb{RP}^n$ y $\mathbb{CP}^n$ de dimensiones n y $2n$, respectivamente. $\square$

La definición anterior no es sorprendente, y el concepto corresponde a la manera como pensamos sobre la superficie de la Tierra: cuando queremos describir los alrededores de Barcelona, elaboramos un mapa del área el cual presentamos como un plano. Si queremos describir los alrededores de Lisboa, hacemos lo mismo. A veces los mapas de estas dos regiones describen puntos comunes a ambos. Cuando nos encontramos frente a esta situación, deseamos observar una transición que sea al menos continua de un mapa al otro. Finalmente, decimos tener un atlas cuando nuestra colección de mapas es tal que cada punto de la superficie de la Tierra está representado en al menos uno de ellos.

Los conceptos familiares de funciones en espacios Euclidianos pueden ser ahora definidos en superficies diferenciables a través del uso de las cartas locales. En particular, una función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \mapsto S$, ó curva, es C^∞ si para toda carta (U, φ) en S tenemos que $\varphi \circ f$ es una función C^∞ del abierto $f^{-1}(U)$ en $\mathbb{R}$ al abierto $\varphi(U)$ en $\mathbb{R}^2$. De manera similar, podemos definir funciones de tipo C^k de una superficie a cualquier espacio Euclidiano, o funciones C^k entre dos superficies cualesquiera, etc.

El espacio tangente T_pS a una superficie S en un punto p será justamente el conjunto de velocidades en p de curvas que pasan a través del punto. La velocidad $\dot\gamma(0)$ en el punto $p = \gamma(0)$ de una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ es el vector velocidad en $t = 0$ de su expresión local en una carta (U, φ) tal que $p = \gamma(0) \in U$:

$$T_pS = \{\dot\gamma(0) : \ \gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto S\,,\ \gamma(0) = p\}\,.$$

La regla de la cadena hace de este un concepto bien definido si tan solo requerimos el que S sea de tipo C^1. Puesto que las velocidades expresadas localmente yacen en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, T_pS adquiere la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Si consideramos la unión de todos los espacios tangentes parametrizados por los puntos de S, obtenemos el fibrado tangente

$$TS = \{(p, v) : \ p \in S, \ v \in T_pS\} \, .$$

Demostraremos en seguida que TS es una variedad de dimensión $2n = 4$. Por ahora, utilicemos la función proyección $\pi : TS \to S$ obvia para introducir una noción esencial. Un *campo vectorial* X en S se define como una función $X : S \to TS$ tal que la composición $\pi \circ X : S \to S$ es la función identidad. Nuestros campos vectoriales serán todos C^∞.

Localmente, un campo vectorial X es bastante simple. Si $x = (x^1, x^2)$ es un sistema de coordenadas local, podemos expresar a X en la forma

$$X = a(x)\partial_{x^1} + b(x)\partial_{x^2} \, ,$$

para ciertas funciones $a(x)$ y $b(x)$ definidas en el entorno donde el sistema de coordenadas es válido. Vemos así que la función $x \mapsto (x^1, x^2, a(x), b(x))$ define un sistema de coordenadas local en TS. Y por cada carta (U, φ) de S, obtenemos una carta de la restriction $TS|_U$ de TS a U.

Si $y = y(x) = (y^1(x), y^2(x)$ es un otro sistema de coordenadas de S, la nueva representación de X se podrá determinar si usamos la regla de la cadena para concluir que

$$\partial_{x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\partial_{y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\partial_{y^2} \, , \quad \partial_{x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\partial_{y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\partial_{y^2} \, ,$$

y por lo tanto $X = \tilde{a}(y)\partial_{y^1} + \tilde{b}(y)\partial_{y^2}$, donde

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}(y) \\ \tilde{b}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x(y)) \\ b(x(y)) \end{pmatrix} \, .$$

Así pués, la función de transición en TS de la carta local $(x^1, x^2, a(x), b(x))$ a la carta local $(y^1, y^2, \tilde{a}(y), \tilde{b}(y))$ está dada por la función de transición de las xs a las ys, y la transpuesta de la matrix Jacobiana de $y = y(x)$. El atlas C^k de S determina un atlas C^{k-1} de TS. Esta observación completa la demostración de que TS es una variedad de dimensión el doble de aquella de S, cuyo tipo es menor en una unidad que el tipo de diferenciabilidad poseido por S.

Si bajo cambios de coordenadas, cambiamos consistentemente los campos locales $\partial_{x^1}, \partial_{x^2}$ de manera tal que la regla de la cadena sea satisfecha, podremos reconstruir un campo vectorial globalmente definido a partir de sus expresiones locales. Usando entonces una partición de la unidad subordinada al cubrimiento de S definido por un atlas, podemos pensar a X como una descripción consistente de campos vectoriales localmente definidos.

Esta última manera de proceder nos permite definir con facilidad la acción de un campo vectorial X sobre una función f, lo cual a su vez, nos permite pensar a X como una derivación en el anillo de funciones C^∞ en S. Escojamos una carta (U,φ) en un entorno de p. Si el punto p corresponde a las coordenadas (x^1,x^2), la función resultante Xf será la función dada localmente por

$$(Xf)(p) = a(x)(\partial_{x^1} f)(x) + b(x)(\partial_{x^2} f)(x)\,,$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son los coeficientes locales del campo X en las coordenadas $x=(x^1,x^2)$. De esta manera, pensamos en el campo vectorial X como un operador lineal en el anillo de funciones C^∞ de S. Dada la regla producto para el cálculo de derivadas, dicho operador es una derivación del anillo.

Podemos extender conceptos usuales para funciones entre conjuntos abiertos de espacios Euclideanos a funciones entre variedades diferenciables si trabajamos con expresiones locales. Por ejemplo, dadas las variedades diferenciables M, $\tilde{M}$, consideremos una función f entre ellas. Si al expresar a f en coordenadas su diferencial df como función lineal del tangente T_pM al tangente $T_{f(p)}\tilde{M}$ en cada punto $p \in M$ está definida y es continua como función de p, decimos que f es de tipo C^1. Con frecuencia nos referiremos también a df como el Jacobiano de f. Dicho Jacobiano puede definirse usando curvas: si nos damos $v_p \in T_pM$, tomemos una curva $\gamma(t)$ en M que pase por p cuanto $t=0$ con velocidad $\dot\gamma(0) = v_p \in T_pM$. Luego $df_p(v_p)$ es la velocidad en $t=0$ de la curva $f\circ\gamma$ en $\tilde{M}$. El concepto de diferenciabilidad se puede generalizar para definir funciones $f : M \to \tilde{M}$ de tipo C^k para cualquier entero positivo k, ó más aún, C^∞ ó suaves.

Una curva cuyo vector tangente en cada punto es el campo vectorial X se dice ser una curva integral de X. Tal curva es la solución de una ecuación diferencial

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$$

de orden 1. Luego, dado $p \in S$, existe una única solución $\gamma_X(t)$ tal que $\gamma_X(0) = p$, definida en un entorno maximal de $t=0$.

Ejercicio 9. ¿Cuáles son las curvas integrales del campo en la esfera que en coordenadas esféricas está dado por

$$X = \operatorname{sen}\psi\,\partial_\theta\,?$$

Para cada t, describa el difeomorfismo de la esfera en sí misma que asocia a cada punto p el valor en t de la curva integral de X que comienza en p. ¿Para qué valores de t está definido este difeomorfismo? ¿Por qué? □

Consideremos campos vectoriales X y Y y un punto p de S. Usando las curvas integrales de los campos para valores pequeños del parámetro t, definimos una nueva curva $\gamma_0(t)$ que pasa por p en $t=0$. En efecto, comenzando en p, $\gamma_0(t)$ será el punto de S que obtendremos si nos movemos t unidades de tiempo a lo largo de las curvas integrales de X, Y, $-X$ y $-Y$, consecutivamente y en el orden indicado.

La curva γ_0 así definida pasa por p cuando $t=0$, y más aún, como función de t, $\gamma_0(t)-p$ se anula a orden dos en $t=0$. Definimos el vector tangente

$[X,Y]_p$ en el punto p como

$$[X,Y]_p = \frac{d}{dt}\gamma_0(\sqrt{t}) \mid_{t=0} , \tag{15}$$

el vector velocidad en p de la curva $\gamma_0(\sqrt{t})$. Haciendo esto en cada punto de S, obtenemos un nuevo campo vectorial $[X,Y]$, el corchete de Lie de los campos X y Y de partida.

Ejercicio 10. Demuestre que el corchete $[X,Y]$ así definido coincide con la derivación

$$f \mapsto (XY - YX)f ,$$

el conmutador de los campos X y Y. □

El conjunto de campos vectoriales en un módulo sobre el espacio de funciones suaves a valores reales definidas en S. Esto quiere decir solamente que podemos multiplicar campos vectoriales por funciones para obtener otros campos, y que tal operación tiene las propriedades obvias. Las uno formas en S son los elementos duales del conjunto de campos vectoriales como tal módulo. Así, si α es una uno forma, dado un campo X tenemos la función $p \mapsto \alpha(X)(p)$, y la acción de α sobre los campos es tal que $\alpha(fX+Y) = f\alpha(X) + \alpha(Y)$ para cualquier función suave f. Esta última propriedad nos dice que las uno formas son también un módulo sobre el espacio de funciones C^∞.

Podemos escribir una uno forma α localmente. Si $x = (x^1, x^2)$ son coordenadas locales, entonces

$$\alpha = \tilde{a}(x)dx^1 + \tilde{b}(x)dx^2 ,$$

donde las formas locales dx^1 y dx^2 son duales a los campos ∂_{x^1} y ∂_{x^2}, respectivamente. Es decir, $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta^i_j$. Así como lo hicimos con los campos vectoriales, si transformamos consistentemente las definiciones locales de uno formas bajo cambios de coordenadas, podemos dar una uno forma globalmente definida a partir de sus expresiones locales. Recordemos que el cambio es consistente si la regla de la cadena es satisfecha al cambiar de coordenadas.

El espacio cotangente T^*_pS a una superficie S en el punto p es el conjunto de uno formas en p. Si consideramos la unión de todos los espacios cotangentes parametrizados por los puntos de S, obtenemos el fibrado cotangente

$$T^*S = \{(p,\alpha) : \ p \in S, \ \alpha \in T^*_pS\} .$$

Como en el caso del fibrado tangente, T^*S es una variedad de dimensión $2n = 4$, y cada carta local (x^1, x^2) induce una carta local $(x^1, x^2, \tilde{a}(x), \tilde{b}(x))$ determinada por las uno formas locales dx^1 y dx^2 en T^*S. En este caso, las funciones de transición en T^*S de la carta local $(x^1, x^2, \tilde{a}(x), \tilde{b}(x))$ a la carta local $(y^1, y^2, \tilde{a}(y), \tilde{b}(y))$ está dada por la función de transición de las xs a las ys, y la inversa de la matrix Jacobiana de $y = y(x)$. Si $\pi : T^*S \to S$ es la proyección natural, así pensadas, las *uno formas* en S están dadas por funciones $\alpha : S \to T^*S$ tales que la composición $\pi \circ \alpha : S \to S$ es la función identidad.

Toda función $f : S \to \mathbb{R}$ define una uno forma de manera canónica. En efecto, todo campo vectorial X actúa sobre f, y podemos definir la uno forma df, ó derivada exterior de f, por la identidad

$$df(X) = Xf\,. \tag{16}$$

Localmente df se representa como

$$df = (\partial_{x^1} f)dx^1 + (\partial_{x^2} f)dx^2\,.$$

2.3.1. *Superficies Riemannianas.* Las propriedades que estudiamos en §2.1 y §2.2 son propriedades de las métricas dadas a las superficies usadas como modelos. ¿Qué quiere decir entonces una métrica en una superficie arbitraria? Le respuesta es, una vez más, muy sencilla: una métrica en una superficie es una manera diferenciable de medir la longitud de campos vectoriales y los ángulos que ellos forman en cada uno de los puntos de la superficie. Una tal estructura es hoy día llamada Riemanniana, en honor a B. Riemann.

De manera precisa, una métrica Riemanniana en S es una función suave $S \ni p \mapsto \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_p$ la cual, para cada p en S, define un producto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_p$ en el espacio vectorial T_pS. Puesto que un producto interno define y es definido por una matrix definida positiva, una métrica Riemanniana no es otra cosa sino una función C^∞ de S en el espacio de tales matrices.

Teniendo una métrica Riemanniana $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, podemos medir la longitud de un vector X_p en T_pS por la expresión $\|X_p\| = \langle X_p, X_p\rangle_p^{\frac{1}{2}}$, y dada una curva $\gamma(t)$, la función $\|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}$ está bien definida. La longitude de γ entre los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ puede definirse, como ya lo hicimos, usando la expresión (1). Los puntos críticos de este funcional son, por definición, las curvas geodésicas entre los puntos indicados.

A fin de entender mejor este concepto y también el concepto de curvatura, necesitamos describir una noción adicional: la noción de derivada intrínseca que una métrica Riemanniana define. Esta nos permite diferenciar un campo vectorial a lo largo de otro, y definir lo que es un campo constante a lo largo de una curva, generalizando así la conocida idea de transporte paralelo en el plano Euclideano al caso de una superficie Riemanniana abstracta.

Para motivar este concepto, consideremos una vez más el ejemplo de la métrica Euclidiana en el plano, donde los campos

$$X = a_1(x,y)\partial_x + b_1(x,y)\partial_y \quad \text{y} \quad Y = a_2(x,y)\partial_x + b_2(x,y)\partial_y$$

tienen producto interno en cada punto (x, y) dado por

$$\langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}^2} = a_1(x,y)a_2(x,y) + b_1(x,y)b_2(x,y)\,.$$

En este caso particular, la expresión

$$\nabla^{\mathbb{R}^2}_X Y = (Xa_2)\partial_x + (Xb_2)\partial_y \tag{17}$$

define un nuevo campo vectorial. Simplificaremos la notación y lo llamaremos simplemente $\nabla_X Y$.

Si usásemos la expresión (17) para definir localmente un campo vectorial a partir de X e Y en una superfície Riemanniana arbitraria, en general sería imposible el conectar consistentemente dichas definiciones locales para obtener un campo vectorial $\nabla_X Y$ globalmente definido. El caso del plano es especial y no hay tal problema porque las coordenadas (x^1, x^2) lo parametrizan completamente, y la expresión misma ya define un campo global.

Sin embargo, analicemos el campo vectorial $\nabla_X Y$ en $\mathbb{R}^2$ así definido, y extraigamos sus propiedades intrínsecas, aquellas independentes de las coordenadas utilizadas y que lo caracterizan. Esto es un hecho de fundamental importancia.

Primeramente, si además de X y Y nos damos un tercer campo Z y una función a valores reales f, tenemos que

a) $\nabla_X(Y + fZ) = \nabla_X Y + (Xf)Z + f\nabla_X Z$.
b) $\nabla_{X+fZ}(Y) = \nabla_X Y + f\nabla_Z Y$.

En efecto, la primera de estas propiedades para (17) sigue del hecho que la acción de un campo vectorial sobre una función satisface la regla del producto. La segunda es aún más simple, y sigue del hecho que $(X+fZ)a = Xa + f(Za)$ para una función a cualquiera.

La propiedad (a) implica que como función de Y, el valor de $\nabla_X Y$ en el punto p depende de los valores de Y próximos a p, en tanto que la propiedad (b) muestra que como función de X, el valor de $\nabla_X Y$ en p depende solamente de X_p. Esto contrasta, por ejemplo, con el corchete $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ definido en (15), operación que satisface la propiedad (a) mas no la propiedad (b).

Hasta ahora, todo bien. Mas la función $\nabla_X Y$ tiene dos propiedades adicionales, una que lo relaciona con el corchete de Lie y otra con la métrica:

c) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
d) $Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$.

Claramente, (c) es casi obvia para (17), y (d) es una consecuencia también de la regla del producto, ya usada en la verificación de (a).

Una función $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ con las propiedades (a) y (b) anteriores es llamada una conexión. Si la conexión satisface la propiedad (c), decimos que esta tiene torsión nula, y si satisface la propiedad (d) decimos que es una conexión métrica.

Siempre que tengamos una conexión ∇ en una superficie S, podemos definir la noción de *transporte paralelo* de vectores tangentes a lo largo de cualquier curva $\gamma(t)$ en S. En efecto, consideremos un vector $X_{\gamma(0)}$ en el espacio tangente $T_{\gamma(0)}S$. Diremos entonces que $X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}S$ es el transporte paralelo de $X_{\gamma(0)}$ a lo largo de $\gamma(t)$ si $X_{\gamma(t)}$ es la solución de la ecuación

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} X_{\gamma(t)} = 0\,, \tag{18}$$

con condición inicial $X_{\gamma(0)}$. Si a manera de ilustración tomásemos la conexión del plano Euclidiano, podríamos facilmente verificar que el concepto introducido corresponde de manera literal con el transporte paralelo de vectores del plano a lo largo de rectas, del cual hacemos uso frecuente en construcciones geométricas elementales.

Si para una métrica dada la conexión satisface la propiedad (d), entonces el producto interno de vectores es conservado por el transporte paralelo. Porque si tenemos que $\nabla_{\dot\gamma(t)}X_{\gamma(t)}=0$ y $\nabla_{\dot\gamma(t)}Y_{\gamma(t)}=0$, la propiedad (d) nos dice que la función $\langle X_{\gamma(t)},Y_{\gamma(t)}\rangle_{\gamma(t)}$ es constante en t.

Toda métrica Riemanniana $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ admite una única conexión con las propiedades (c) y (d). Como un campo vectorial queda completamente determinado si se conoce su producto interno con un campo arbitrario en cada punto de la superficie, dado los campos X, Y y Z, la expresión

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla_X Y,Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle+Y\langle X,Z\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\\ &\quad \langle[X,Y],Z\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle\,. \end{aligned}\tag{19}$$

define un campo vectorial $\nabla_X Y$, y tenemos así una función $X,Y\mapsto\nabla_X Y$ determinada completamente por la métrica.

Ejercicio 11. Demuestre que la función $\nabla_X Y$ así definida es una conexión métrica con torsión nula. □

La conexión definida por (19) se conoce como la conexión de Levi-Civita de la métrica. Así pués, cada métrica nos provee de una noción intrínsica de derivada de vectores, noción que se puede extender de manera conveniente para definir operadores diferenciales en el álgebra tensorial de la la superficie. Esto, a su vez, nos permite estudiar la existencia de métricas canónicas en S como soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales naturales en el espacio de métricas.

Mas por ahora, retornemos a la función $L(\gamma)$ definida en (1), función que mide la longitud de su argumento γ, curva argumento que conecta los puntos fijados de antemano $p=\gamma(t_0)$ y $q=\gamma(t_1)$. Queremos calcular de la derivada de L cuando variamos a γ entre todas las curvas con tal propiedad, y poder así determinar las características que una curva debe tener para ser un punto crítico de L. Para esto, consideremos una variación $\gamma_\tau(t)$ de $\gamma(t)$ parametrizada por τ. En otras palabras, para algun $\varepsilon>0$, consideremos una función

$$\begin{array}{rcc} [t_0,t_1]\times(-\varepsilon,\varepsilon) & \rightarrow & S\\ (t,\tau) & \mapsto & \gamma_\tau(t) \end{array}$$

tal que $\gamma_0(t)=\gamma(t)$. Supongamos que t es el parámetro longitud de arco de la curva $\gamma(t)$.

Sean T y V los vectores tangentes a las curvas $t\mapsto\gamma_\tau(t)$ y $\tau\mapsto\gamma_\tau(t)$ en el punto $\gamma_\tau(t)$, respectivamente. Luego,

$$\frac{d}{d\tau}L(\gamma_\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot\gamma_\tau(t),\dot\gamma_\tau(t)\rangle^{\frac12}dt=\int_{t_0}^{t_1}V\langle T,T\rangle^{\frac12}dt=\frac12\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\langle T,T\rangle^{\frac12}}V\langle T,T\rangle dt\,.$$

Observemos que $[T,V]=0$, y usando la propiedad (c), obtenemos que $\nabla_V T=\nabla_T V$. Así, usando ahora la propiedad (d), tenemos que

$$V\langle T,T\rangle = 2\langle \nabla_V T, T\rangle = 2\langle \nabla_T V, T\rangle = 2T\langle V,T\rangle - 2\langle V, \nabla_T T\rangle\,.$$

Como t es el parámetro longitud de arco de $\gamma(t)$, $\|T\|=1$ cuando $\tau=0$. Concluímos así que

$$\frac{d}{d\tau}L(\gamma_\tau)\mid_{\tau=0}=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\langle\nabla_T V,T\rangle}{\|T\|}dt = \langle V,T\rangle\mid_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\langle V,\nabla_T T\rangle dt\,. \tag{20}$$

Si escogemos ahora variaciones $\gamma_\tau(t)$ de $\gamma(t)$ arbitrarias tales que $p=\gamma_\tau(t_0)$ y $q=\gamma_\tau(t_1)$ para todo τ, los términos de borde se anulan, y concluimos que $\gamma(t)$ es un punto crítico de L si se satisface la ecuación

$$\nabla_T T = 0\,. \tag{21}$$

Una curva $\gamma(t)$ es pués una geodésica si el vector velocidad $\dot\gamma(t)$ a lo largo de $\gamma(t)$ es paralelo a sí mismo.

La ecuación (21) para una geodésica es una ecuación diferencial ordinaria de grado dos. Así, dada una posición p y velocidad inicial X_p, el teorema de existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales garantiza la existencia de una geodésica $\gamma(t)$ definida en un entorno maximal de $t=0$.

Ejercicio 12. Encuentre ejemplos de superficies Riemannianas con puntos que no se pueden conectar por geodésica alguna. □

Ejercicio 13. Para la esfera con la métrica inducida por la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^3$, todo meridiano que pasa por los polos norte y sur es una geodésica que los conecta. En coordenadas esféricas (θ,ψ), dichos meridianos son descritos por la ecuación $\theta=\theta_0$. Dado un $\varepsilon>0$ pequeño, encuentre una métrica en la esfera para la cual las únicas geodésicas que conectan a estos polos sean los meridianos que corresponden a valores de θ_0 en el intervalo $\pi-\varepsilon<\theta_0<\pi+\varepsilon$. □

Retornemos a la discusión de S como espacio métrico. La métrica Riemanniana g en S induce una noción de distancia d_S entre puntos p y q dada por la expresión (2). Y esta a su vez, induce una topología en S. ¿Cómo se relacionan la topología original en S con la inducida por d_S? Dichas topologías resultan ser equivalentes, hecho cuya demostración detallada dejamos en manos del lector.

La métrica en una superficie Riemanniana S se dice completa si toda sucesión de Cauchy converge en S. Trabajando con métricas completas evitamos la situación plantead en el Ejercicio 12. Cuando nos damos una superficie S con una métrica d_S que tiene esta propiedad, decimos que (S,d_S) es un espacio métrico *completo*. Por la compatibilidad de las topologías en S y la topología inducida por d_S, si S es compacta sigue que (S,d_S) es un espacio métrico completo. El resultado claro está es cierto para variedades Riemannianas compactas de cualquier dimensión. Y también la compacidad es suficiente mas no necesaria para que (S,d_S) sea un espacio completo.

Este es un buen momento para indicar el por qué debemos insistir en una definición general de superficies Riemannianas, mas allá de aquellas que se pueden obtener como subconjuntos del espacio Euclidiano de dimensión tres con la métrica inducida. El lector puede releer la discusión sobre la definición de curvatura (9) en el caso en el cual la superficie es localmente un gráfico, y analizar la situación que surge al alejarnos de una geodésica en la superficie dada por la segunda de las ecuaciones del Ejercicio 3, siempre moviendonos en direcciones ortogonales a la geodésica misma. Este tipo de análisis resulta ser muy útil.

Ejercicio 14. Demuestre que no existe ninguna superficie C^∞ completa dentro del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3$ donde la métrica inducida tiene la geometría intrínseca de la pseudo-esfera. $\square$

Dado un número real k, el modelo de superficie Riemanniana con curvatura constante k estudiado en la sección §2.2 será llamado S^k. Así, S^k es la pseudo-esfera de radio $1/\sqrt{-k}$, el plano Euclidiano, ó la esfera de radio $1/\sqrt{k}$ si $k<0$, $k=0$ ó $k>0$, respectivamente.

2.3.2. *Curvatura.* Recordemos la curva γ_0 que usamos en (15) para definir el corchete $[X,Y]$ de los campos X y Y. Esta es una curva que comienza en p y termina en el punto obtenido depués de movermos sucesivamente t unidades de tiempo a lo largo de las curvas integrales de X, Y, $-X$ y $-Y$, respectivamente. Si entonces nos movemos un poco más a lo largo de la curva integral de $-[X,Y]$, también t unidades de tiempo, obtenemos una curva que comienza y termina en p a orden 2. Llamemos $\gamma_{X,Y}(t)$ a la curva resultante. Ella es cerrada módulo terminos de orden tres o mayores en t.

Sea S una superficie Riemanniana con métrica $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ y conexión de Levi-Civita ∇. Si Z es un campo y hacemos su transporte paralelo a lo largo de $\gamma_{X,Y}$, obtenemos un vector de la forma

$$t^2(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]})Z+o(t^2)\,.$$

Así, la contribución más significativa de transportar paralelamente Z a lo largo de $\gamma_{X,Y}$ está dada por el vector

$$R(X,Y)Z=(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]})Z\,, \tag{22}$$

una manera de medir la extensión en la cual conmutador de los operadores ∇_X y ∇_Y difiere del operador $\nabla_{[X,Y]}$.

El valor del campo $R(X,Y)Z$ en el punto p depende solamente de los valores de X, Y y Z en el punto mismo. En otras palabras, si alguno de estos tres campos es cero en p, entonces $R(X,Y)Z$ será también cero en p. Una tal función se dice tensorial, y R es el llamado tensor de curvatura de la métrica en S, ó simplemente tensor de curvatura de Riemann.

Usaremos ahora el hecho de que S es una superficie para simplificar notablemente el estudio de R. La clave de esta simplificación radica en que la dimensión del espacio tangente a S en cada punto es dos, y por lo tanto, solamente se requieren dos vectores para generarlo.

Observemos que $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$. Por esta razón, suponemos que X y Y son linealmente independentes; de otra forma, $R(X,Y)Z$ sería cero. Y puesto que como función de Z el vector $(R(X,Y)Z)_p$ solamente depende del valor de Z en p, podemos escrivirlo como una combinación lineal de $(R(X,Y)X)_p$ y $(R(X,Y)Y)_p$, cuyos coeficientes se pueden obtener a partir de los productos internos de ellos y esos de $(R(X,Y)Z)_p$ con X_p y Y_p, respectivamente.

Relativo a la base $\{X_p, Y_p\}$ de T_pS, $(R(X,Y)Y)_p$ tiene componente no trivial solamente en la dirección de X_p, en tanto que $(R(X,Y)X)_p$ tiene componente no trivial solamente en la dirección de Y_p. Más aún, $\langle R(X,Y)Y, X\rangle = -\langle R(X,Y)X, Y\rangle$. Por lo tanto, los coeficientes del vector $(R(X,Y)Z)_p$ quedan completamente determinados si además de sus productos internos con X_p y Y_p, sabemos también quién es $\langle (R(X,Y)Y)_p, X_p\rangle$. Y si esta última cantidad fuese cero, tendríamos que $R(X,Y)Z$ sería cero también.

Así pués, la expresión $\langle (R(X,Y)Y)_p, X_p\rangle$ resulta ser una función escalar muy razonable que nos permite medir la diferencia entre $[\nabla_X, \nabla_Y]$ y $\nabla_{[X,Y]}$. A fin de considerar algo que sea independente de la base escogida, definimos

$$K(p) = K(X,Y)_p = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle_p}{\|X \wedge Y\|_p^2}\,. \tag{23}$$

El termino $\|X \wedge Y\|_p^2$ es el cuadrado del área del paralelogramo en T_pS generado por X_p y Y_p, respectivamente.

La expresión (23) depende del espacio generado por los vectores mas no de los vectores escogidos propiamente. Ella define en p la *curvatura seccional* de la sección generada por X_p y Y_p, la cual en el caso de una superficie, es todo el espacio tangente T_pS. La función $p \mapsto K(p)$ es la *curvatura de Gauss* de la métrica en S. Así definida, ella coincide con (9) si la superficie es un gráfico. Ó con (10) ó (14) en el caso general.

Para comenzar la verificación de este último hecho, definimos la coordenadas normales en general. Sea p un punto de S. Diagonalizamos el producto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_p$ en T_pS, y escogemos una base orthonormal $\{\partial_u, \partial_v\}$. Dicha base nos permite identificar un vector de coordenadas (u,v) en $\mathbb{R}^2$ con el vector $u\partial_u + v\partial_v$ en el espacio tangente T_pS. Podemos así considerar la geodésica $\gamma(s)$ que comienza en p con velocidad $u\partial_u + v\partial_v$. La función *exponencial* en el punto p hace corresponder a (u,v) con el punto $q = \gamma(1)$, $\exp_p(u,v) = q$. Decimos que el punto q tiene coordenadas normales (u,v).

Las geodésicas $\gamma(s)$ podrían no estar definidas en $s = 1$ para todas las velocidades iniciales posibles en T_pS, o aún peor, geodésicas diferentes a través de p podrían terminar en el mismo punto cuando $s = 1$. No obstante, el Jacobiano de la función exponencial en el origen de T_pS es la función identidad, y por el teorema de la función inversa, ella define un difeomorfismo entre un entorno del origen en T_pS y un entorno de p en S.

Escojamos un entorno $D_\varepsilon(0) = \{(u,v) : \; r^2 := u^2+v^2 < \varepsilon^2\}$ del origen en T_pS de radio ε suficientemente pequeño tal que $\exp_p |_{D_\varepsilon(0)}$ es un difeomorfismo de $D_\varepsilon(0)$ en $U = \exp_p(D_\varepsilon(0))$. En U definimos la función $r(q) := |\exp_p^{-1}(q)| = \sqrt{u^2(q)+v^2(q)}$, la distancia entre el punto $(u(q), v(q))$ y el origen en la métrica Euclideana en T_pS. Observemos que

$$\partial_r = (d\exp_p)(\partial_r) = \frac{1}{r}(u\partial_u + v\partial_v)\,, \tag{24}$$

expresión a la cual arribamos una vez identifacamos al espacio vectorial $T_{(u,v)}(T_pS)$ con T_pS mismo. La función $r(q)$ así definida en U satisface la propiedad de que $\nabla r = \partial_r = (d\exp_p)(\partial_r)$. Tal resultado, conocido como el *lema de Gauss*, nos permite demostrar que para todo vector $(u,v) \in D_\varepsilon(0)$, la curva $\gamma_{(u,v)}(t) = \exp_p(t(u,v))$ en U conecta a p y $q = \gamma_{(u,v)}(1)$, y minimiza la distancia en M entre p y cualquiera de sus puntos $\gamma_{(u,v)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Y esto a su vez nos dice que la función $d_S(p,q)$ en (2) se anula sí, y solo sí, $p = q$, completando la demostración de que d_S define una métrica en S.

En efecto, por conveniencia pongamos $w = (u,v)$. Luego las curvas integrales de ∂_r en $D_\varepsilon(0)$ son dadas por los segmentos $\gamma(t) = t \cdot w/\|w\|$ con velocidades de norma 1. Así pués, las curvas integrales del gradiente de la función r en U están dadas por las geodésicas $\gamma_w(t) = \exp_p(t \cdot w/\|w\|)$. El lema de Gauss nos dice que esta geodésica es la curva en U de menor longitud entre p y cualesquiera de sus puntos. Si consideramos cualquier otra curva en M que une a p y a q y que en algún momento sale de U, su longitud es al menos mayor que $\varepsilon > \gamma_w(1)$. Luego, $\gamma_w(1) = d_S(p,q)$.

El lema de Gauss requiere demostrar que el gradiente ∇r de la función r coincide con el campo ∂_r en (24), es decir, que $dr(w) = \langle \partial_r, w\rangle$ para todo campo w en U, donde $dr = (udu + vdv)/r$. Evidentemente, esta identidad tensorial se satisface para $w = \partial_r$. Escojamos ahora a w igual a $w = (u\partial_v - v\partial_u)/r$, campo para el cual $dr(w) = 0$. Puesto que este w y ∂_r forman una base del tangente a U en cada punto, el resultado quedará completamente demostrado si logramos probar que $\langle \partial_r, w\rangle = 0$. Observemos que $[\partial_r, w] = 0$. Como $\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0$ y puesto que la conexión es métrica, vemos que $\partial_r\langle \partial_r, w\rangle = \langle \partial_r, \nabla_{\partial_r} w\rangle = \langle \partial_r, \nabla_w \partial_r\rangle = (1/2)w(\langle \partial_r, \partial_r\rangle)$, lo cual es cero porque $\langle \partial_r, \partial_r\rangle = 1$. Luego, $\langle \partial_r, w\rangle$ es constante a lo largo de geodésicas que parten de p, y por ende constante en U. Mas tenemos también la estimación $|\langle \partial_r, w\rangle_q| \leq r(q)(\|\partial_u\| + \|\partial_v\|)$, y tomando el límite cuando $q \to p$, concluimos que la constante deber ser cero, y $\langle \partial_r, w\rangle = 0$, como queríamos.

Si las coordenadas normales de q se escriben como $u = r\cos\theta$ y $v = r \operatorname{sen}\theta$, decimos que q tiene coordenadas geodésicas polares (r,θ). En tal caso, r es la longitud del segmento de geodésica que conecta a p con q, y cuya velocidad en p es $u\partial_u + v\partial_v$.

En coordenadas geodésicas polares (r,θ), la métrica tiene la expresión (12) en terminos de una función positiva $g(r,\theta)$. Los vectores

$$X = \partial_r\,, \quad Y = -\frac{1}{g}\partial_\theta\,, \tag{25}$$

son ortonormales y generan al espacio tangente. Y ahora es fácil calcular la expresión (23) usando estos vectores.

En efecto, sabemos ya que ∂_r es paralelo a sí mismo porque r es la distancia geodésica a partir de p. Usando el hecho de que la conexión es métrica, podemos facilmente deducir también que el vector $-\frac{1}{g}\partial_\theta$ es paralelamente constante a lo largo de la curva radial. Así,

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0\,, \quad \nabla_{\partial_r}\left(-\frac{1}{g}\partial_\theta\right) = 0\,.$$

Usando ahora la propiedad de que la conexión tiene torsión nula, podemos determinar la derivada de ∂_r en la dirección de $-\frac{1}{g}\partial_\theta$ como función del corchete de los vectores. Eso, y la propiedad métrica de la conexión una vez más, nos permite hallar la derivada de $-\frac{1}{g}\partial_\theta$ con respecto a sí mismo:

$$\nabla_{-\frac{1}{g}\partial_\theta}\partial_r = \frac{g_r}{g}\left(-\frac{1}{g}\partial_\theta\right)\,, \quad \nabla_{-\frac{1}{g}\partial_\theta}\left(-\frac{1}{g}\partial_\theta\right) = -\frac{g_r}{g}\partial_r\,.$$

Tenemos entonces que

$$K = -\left(\frac{g_r}{g}\right)_r - \left(\frac{g_r}{g}\right)^2 = -\frac{g_{rr}}{g}\,. \tag{26}$$

Usaremos esta expresión para verificar que (23) y (10) son iguales, una vez hallamos definido al Laplaciano de una métrica en general.

2.3.3. *El Laplaciano de una métrica: la curvatura.* El Laplaciano de una métrica en S es la composición de dos operadores. El primero de ellos no está relacionado con la métrica, mas es muy importante en el estudio de la topología de S. Este es el operador *derivada exterior* d, el cual lo necesitaremos por ahora tan solo actuando sobre funciones como ya fue descrito en (16). El segundo operador en la composición que define al Laplaciano es el dual métrico de d a nivel de funciones.

Como la métrica $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ nos da un producto interno en cada punto, podemos identificar de una manera C^∞ al espacio tangente en cada punto con su espacio dual. Así, toda uno forma α corresponde via la métrica con un campo vectorial $\alpha^\#$ definido por la identidad $\langle\alpha^\#,\,\cdot\,\rangle = \alpha$. En particular, el gradiente ∇f de una función f es definido por

$$\langle\nabla f,\,\cdot\,\rangle = df\,,$$

el campo dual a la forma df. Obtenemos así el operador gradiente

$$f \mapsto \nabla f\,, \tag{27}$$

el cual actúa sobre funciones, y para cada una de ellas, produce un campo vectorial.

Observemos que la misma idea anterior puede ser usada para extender la métrica a las uno formas: dadas formas α y β, definimos su producto interno en cada punto por

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha^\#,\beta^\#\rangle\,.$$

Más aún, si cambiamos de sentido, vemos que un campo vectorial X corresponde a la uno forma $X^\flat$ definida por $\langle X, \cdot\rangle = X^\flat$. Y dada una función f y un campo X, tenemos que

$$\langle \nabla f, X\rangle = \langle df, X^\flat\rangle \, ,$$

lo cual nos presenta al operador gradiente como la versión dual del operador derivada exterior a nivel de funciones.

La métrica también define una medida que nos permite integrar funciones. En coordenadas normales (u, v) ella está definida por $dudv$, y podemos definirla globalmente si cambiamos su representación local consistentemente cuando cambiamos de un sistema de coordenadas a otro. Llamaremos $d\mu$ a esta medida.

Definimos entonces al operador δ como el dual métrico de la derivada exterior d. Es decir,

$$\int \langle df, \alpha\rangle d\mu = \int f(\delta\alpha) d\mu \, .$$

Este operador δ produce la función $\delta\alpha$ a partir de la uno forma α.

Si nuevamente consideramos campos y uno formas como duales los unos a las otras a través de la métrica, podemos ver al operador δ a nivel de campos vectoriales y producir así el concepto de divergencia. En efecto, la divergencia $\operatorname{div} X$ del vector X es la función definida por la expresión

$$\int f(\operatorname{div} X) d\mu = -\int f(\delta X^\flat) d\mu \, .$$

El Laplaciano Δ de la métrica, actuando sobre funciones, es la composición de los operadores gradiente y divergencia:

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = -\delta df \, .$$

En coordenadas polares, donde la métrica admite la representación (12) para cierta función g, tenemos que

$$\nabla f = (\partial_r f)\partial r + \frac{1}{g}\partial_\theta f \, .$$

Por otro lado, dado el campo $X = a\partial_r + b\partial_\theta$, tenemos que

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{g}\left(\partial_r(ga) + \partial_\theta \left(\frac{1}{g} b\right)\right) \, .$$

Luego, el Laplaciano de f está dado por

$$\Delta f = \frac{1}{g}\left(\partial_r(g\partial_r f) + \partial_\theta \left(\frac{1}{g}\partial_\theta f\right)\right) = \partial_r^2 f + \frac{g_r}{g}\partial_r f + \frac{1}{g}\partial_\theta \left(\frac{1}{g}\partial_\theta f\right) \, . \tag{28}$$

El lector puede proseguir de una manera similar, y obtener la expresión para el Laplaciano en coordenadas normales. Si así lo hiciese, se encontrará con algo consistente a una expresión descrita con anterioridad, la cual es perfectamente conocida en el caso del plano Euclidiano.

Volvamos ahora a la expresión (26). Ella nos da la curvatura de Gauss en el punto de coordenadas polares (r, θ), con r la distancia geodésica medida desde p. Tomando el límite cuando $r \to 0$ obtendríamos la curvatura en el punto p. ¿Por qué sería el resultado igual a aquel producido por (10)? Usaremos la expresión (28) del Laplaciano en coordenadas polares para demostrar este hecho.

Tenemos que

$$\Delta \log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{g_r}{g}\,.$$

Ahora bien, la función $g(r,\theta)$ satisface las condiciones asintóticas

$$g(0,\theta) = 0\,, \quad \partial_r g(0,\theta) = 1\,, \quad \partial_r^2 g(0,\theta) = 0\,.$$

Luego, la expansión de Taylor de orden tres de la función g nos permite concluir que

$$-3\lim_{r\to 0}\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{g_r}{g}\right) = \lim_{r\to 0}\frac{g_{rr}}{g}\,,$$

lo cual es precisamente lo que queríamos.

3. Curvatura y Topología

Ahora discutiremos cómo el efecto combinado de la geometría local determina, y es determinado por, la topología de la superficie. En particular, si g es una métrica Riemanniana en la superficie S, estudiaremos la integral de la función curvatura K_g con respecto a la medida $d\mu_g$ que la métrica define,

$$\int_S K_g d\mu_g\,.$$

Dicha expresión se conoce como la curvatura total de g en S. La integral restringida a un subconjunto dado de S es la curvatura total de g sobre el subconjunto en cuestión.

3.1. La curvatura total sobre triángulos suficientemente pequeños.

En una superficie Riemanniana S, definimos primeramente un *triángulo geodésico* como el conjunto contenido dentro de tres segmentos geodésicos cada uno de los cuales termina donde comienza el siguiente. Los tres puntos determinados por los segmentos constituyen los vértices del triángulo en cuestión.

Consideremos un triángulo geodésico suficientemente pequeño de modo tal que este esté contenido en un dominio de S parametrizado por coordenadas polares. Es decir, el triángulo está contenido dentro de la imagen de un cierto abierto bajo la función exponencial desde cierto punto p. Como lo hicimos anteriormente, llamaremos (u,v) y (r,θ) a las coordenadas normales y polares en un entorno de p, respectivamente.

Supongamos adicionalmente que el punto p es uno de los vértices del triángulo, y rotando el triángulo si es necesario, que los lados asociados al vértice p de este estén dados por las geodésicas

$$\begin{aligned}\gamma_1(r) &= \exp_p(rV_1)\,,\ r \in [0,l_1]\,,\\ \gamma_2(r) &= \exp_p(rV_2)\,,\ r \in [0,l_2]\,,\end{aligned}$$

donde l_i es la longitud de γ_i, y los vectores velocidades V_1 y V_2 están dados por $V_1 = \partial_u$ y $V_2 = \cos\alpha\partial_u + \operatorname{sen}\alpha\partial_v$, respectivamente, de modo tal que α es el ángulo que los segmentos γ_1 y γ_2 forman en el vértice p.

Los restantes dos vértices del triángulo geodésico son los puntos $q_1 = \gamma_1(l_1)$ y $q_2 = \gamma_2(l_2)$, y el tercero de sus lados es un segmento geodésico γ que conecta a q_1 y q_2.

La región triangular bajo consideración es barrida por las geodésicas $r \mapsto \exp_p(rV_\theta)$, donde $V_\theta = \cos\theta\partial_u + \operatorname{sen}\theta\partial_v$ para cada uno de los ángulos θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \alpha$. Si $l(\theta)$ es la longitud de la porción de dicho segmento geodésico que va de p al lado opuesto del triángulo, el tercero de los segmentos geodésicos que definen al triángulo se puede describir como la curva γ dada por

$$[0,\alpha] \ni \theta \to (l(\theta), \theta)\,,$$

la cual queda parametrizada complementamente por el ángulo θ restringido al intervalo indicado. Así, el vector velocidad de γ no es otra cosa sino

$$\dot{\gamma}(\theta) = \dot{l}(\theta)\partial_r + \partial_\theta = \dot{l}(\theta)X - gY$$

donde los vectores X y Y son los mismos aquellos descritos en (25).

Ya hemos encontrado las derivadas covariantes de X y de Y, cosa que hicimos con el objecto de obtener la expresión (26). Esto nos permitirá estudiar con más detalle el comportamento de los vectores $\dot{\gamma}$ y ∂_r a lo largo de la curva γ.

En efecto, a lo largo del segmento γ, el ángulo ψ entre los vectores $\dot{\gamma}$ y ∂_r está dado por

$$\psi = \cos^{-1}\left(\frac{\langle\dot{\gamma}, \partial_r\rangle}{\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle^{\frac{1}{2}}}\right)\,.$$

Puesto que γ es una geodésica, tenemos que

$$\frac{d}{d\theta}\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 2\langle\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0\,,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{1}{g}\frac{d}{d\theta}\langle\dot{\gamma}, X\rangle = -\frac{1}{g}\langle\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}X\rangle = \langle\dot{\gamma}, \nabla_Y X\rangle = \frac{g_r}{g}\langle\dot{\gamma}, Y\rangle = -g_r\,. \tag{29}$$

Podemos ahora deducir el resultado siguiente:

Teorema 7. *En una superficie Riemanniana, sea T um triángulo geodésico contenido en una región parametrizada por coordenadas polares, y sean α, β y γ los ángulos definidos por los lados del triángulo en cada uno de sus tres vértices, respectivamente. Entonces*

$$\int_T K d\mu = \alpha + \beta + \gamma - \pi\,.$$

Demostración. Proseguimos como en el preámbulo al enunciado, con los ángulos en p, q_1 y q_2 dados por α, β y γ, respectivamente. En coordenadas polares, la medida Riemanniana está dada por

$$d\mu = g dr d\theta\,.$$

Así pues, usando (26) y (29), tenemos que

$$\begin{aligned}\int_T K d\mu = -\int_0^\alpha \int_0^{l(\theta)} g_{rr}\, dr d\theta &= \alpha - \int_0^\alpha g_r(l(\theta),\theta) d\theta \\ &= \alpha + \int_0^\alpha \frac{d\psi}{d\theta}(l(\theta),\theta) d\theta = \alpha + \gamma - \psi(0)\,,\end{aligned}$$

porque sabemos que $g_r(0,\theta) = 1$. El resultado deseado se obtiene usando el hecho que $\psi(0) = \pi - \beta$. $\square$

Podemos aplicar el teorema en superficies Riemannianas de curvatura arbitrária, más si lo aplicamos en el caso donde K es constante, obtenemos resultados interesantes. Por ejemplo, si consideramos el triángulo geodésico sobre la superficie de la Tierra con vértices en el polo norte, Nairobi y Singapur, su área será de aproximadamente $47,57$ millones de kilómetros cuadrados, lo cual representa un $9,31\%$ del área total. Esto sigue del hecho que las ciudades en cuestión están esencialmente localizadas sobre el ecuador, con longitudes de $36,55°$E y $103,55°$E, respectivamente.

Consideremos ahora una región triangular T donde los lados son simplemente segmentos de curvas, no necesariamente geodésicos. Insistamos en que el triángulo sea suficientemente pequeño, contenido en un entorno parametrizado por coordenadas polares, que p sea un vértice con lados adyacentes γ_1 y γ_2 de longitudes l_1 y l_2, y que γ sea el lado opuesto de longitud l. Parametricemos dichos lados por la longitud de arco y consecutivamente: a γ_1 en $[0, l_1]$ y comenzando en p, a γ en $[l_1, l_1+l]$ y comenzando en $q_1 = \gamma_1(l_1)$, y a γ_2 en $[l_1 + l, l_1 + l + l_2]$ y comenzando en $q_2 = \gamma(l_1 + l)$. Llamemos $c : [0, l_1 + l + l_2] \to S$ a la curva cerrada y C^∞ por trozos que se obtiene uniendo a los tres lados en ese orden. Por conveniencia a ser usada posteriormente, definimos $s_1 = l_1$ y $s_2 = l_1 + l$, las longitudes de c desde p a los puntos q_1 y q_2, respectivamente. Las longitud total de la curva cerrada c es $s_3 = l_1 + l + l_2$.

Recordemos que $\{\partial_u, \partial_v\}$ es una base ortonormal de T_pM. Usando el transporte paralelo, podemos extender esta base a campos vectoriales $\{e_1, e_2\}$ que son ortonormales en cada punto del entorno donde las coordenadas normales son válidas.

El vector velocidad de la curva c está bien definido excepto en los puntos p, q_1 y q_2 donde experimenta una rotación dada por los correspondientes ángulos exteriores al triángulo. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\dot{c}(0) = \partial_u = e_1\,|_p$, y definimos una función $\theta(s)$, suave por trozos, tal que

$$V = \dot{c} = \cos(\theta(s)) e_1 + \mathrm{sen}(\theta(s)) e_2\,.$$

$\theta(s)$ es una función bien definida a lo largo de la curva $c(s)$ excepto para los valores del parámetro s correspondientes a los vértices, donde θ experimenta un salto. Mas es de observar que aún así, la singularidad de $\theta(s)$ es integrable. Dicha función mide la rotación total experimentada por el vector V a lo largo de la curva cuando nos movemos desde su punto de partida $c(0)$ al punto $c(s)$. Nótese que usando límites a izquierda y derecha, $\theta(s_1^+) - \theta(s_1^-)$ y $\theta(s_2^+) - \theta(s_2^-)$ son los ángulos exteriores al triángulo en los vértices q_1 y q_2, respectivamente. Por otro lado, puesto que $c(s)$ se cierra cuando $s = s_3$, tenemos que el ángulo exterior en p está dado por $2\pi + \theta(0^+) - \theta(s_3^-)$.

Sea $N = -\mathrm{sen}(\theta(s))e_1 + \cos(\theta(s))e_2$. Los campos vectoriales V y N son ortonormales y poseen la misma orientación que la de e_1 y e_2.

Consideremos las formas duales $\{w^1, w^2\}$ a los campos normales $\{e_1, e_2\}$. En el entorno de p donde las coordenadas normales están definidas, el elemento de área $d\mu$ de la métrica no es otra cosa sino $w^1 \wedge w^2 = \frac{1}{2}(w^1 \otimes w^2 - w^2 \otimes w^1)$.

A este punto, necesitamos extender el operador *derivada exterior* d a nivel de uno formas, y lo hacemos de manera similar a la definición (16) de d sobre 0 formas, ó funciones. En efecto, si α es una uno forma, $d\alpha$ será el tensor antisimétrico, ó dos forma, cuya evaluación en cualquier pareja X, Y de campos vectoriales satisface la identidad

$$d\alpha(X,Y) = \frac{1}{2}(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]))\,. \tag{30}$$

Si expresamos a α en coordenadas locales (x^1, x^2) como $\alpha = \tilde{a}(x)dx^1 + \tilde{b}(x)dx^2$, tal como lo fue hecho anteriormente, tenemos que

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2\,,$$

donde $dx^1 \wedge dx^2$ es la dos forma alternante que evaluada en la pareja $(\partial_{x^1}, \partial_{x^2})$ produce $1/2$. Nótese que si f es cualquier función en S, se tiene que $d^2 f = d(df) = 0$.

Usando a la base local ortonormal $\{e_1, e_2\}$, definamos

$$\Omega_g(X,Y) = \langle R_g(X,Y)e_2, e_1\rangle\,, \tag{31}$$

donde $R(X,Y)Z$ es el tensor de curvatura de Riemann de la métrica g. La expresión anterior es tensorial en X y Y, y su definición no depende de la base ortonormal orientada $\{e_1, e_2\}$ escogida. Así pues, Ω_g es una dos forma en la superficie Riemanniana S, la forma de Gauss-Bonnet.

Puesto que $\{e_1, e_2\}$ es una base local ortonormal del tangente a S, podemos definir uno formas locales w_i^j por la identidad

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{2} w_i^j e_j\,. \tag{32}$$

Es decir, si e es cualquier campo vectorial local, $\nabla_e e_i = \sum_j (w_i^j(e))e_j$. Usando la propiedad métrica de la conexión, es fácil ver que $w_1^1 = w_2^2 = 0$, y que $w_2^1 = -w_1^2$. Un cálculo sencillo nos muestra que

$$\begin{aligned} K_g = \langle R_g(e_1,e_2)e_2,e_1\rangle &= \langle(\nabla_{e_1}\nabla_{e_2} - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} - \nabla_{[e_1,e_2]})e_2,e_1\rangle \\ &= e_1(w_2^1(e_2)) - e_2(w_2^1(e_1)) - w_2^1([e_1,e_2]) \\ &= 2dw_2^1(e_1,e_2)\,, \end{aligned}$$

y por ende,

$$\Omega_g = K_g d\mu_g = \langle R_g(e_1,e_2)e_2,e_1\rangle w^1\wedge w^2 = dw_2^1\,. \tag{33}$$

Observemos que a pesar de definirse a través de una forma local, dw_2^1 es una dos forma globalmente definida. Por otro lado, la forma así obtenida no es necesariamente exacta, es decir, en general no existe una uno forma α en S tal que $d\alpha = K_g d\mu_g$.

Retornemos ahora al análisis de la curva c borde de nuestra región triangular T. Puesto que V es de norma 1 donde está definido, la derivada covariante $\nabla_V V$ apunta en la dirección del vector normal N. Definimos así la curvatura geodésica k de c por la expresión

$$\nabla_V V = kN\,.$$

Dicha función está definida a lo largo de c excepto en los vértices p, q_1 y q_2, y tenemos que

$$k = V\theta - w_2^1(V) = \frac{d\theta(s)}{ds} - w_2^1(V)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_c k &= \int_0^{s_1} d\theta(s) + \int_{s_1}^{s_2} d\theta(s) + \int_{s_2}^{s_3} d\theta(s) - \int_c w_2^1 \\ &= \theta(s_1^-) - \theta(0^+) + \theta(s_2^-) - \theta(s_1^+) + \theta(s_3^-) - \theta(s_2^+) - \int_c w_2^1 \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi - \int_c w_2^1\,, \end{aligned}$$

donde la última igualdad sigue de expresar los ángulos exteriores en los vértices del triángulo T, cuyo borde es c, en terminos de sus ángulos interiores α, β, γ. Usando el teorema de Stokes y (33), calculamos la integral sobre c de w_2^1 como la curvatura total de la métrica g sobre T

Obtenemos así la siguiente generalización del Teorema 7

Teorema 7′. *Sea T una región triangular como en el Teorema 7 con lados no necesariamente segmentos de geodésicas. Sea c la curva cerrada obtenida conectando los tres lados. Entonces se tiene que*

$$\int_T K d\mu + \int_c k = \alpha + \beta + \gamma - \pi\,, \tag{34}$$

donde k es la curvatura geodésica de c, es decir, k es la función definida sobre c exceptuando los vértices de T por la expresión $\nabla_T T = kN$, T y N vectores ortonormales, T tangente a c.

3.2. **La curvatura total: el teorema de Chern-Gauss-Bonnet.** Para globalizar el resultado estudiado en la sección anterior, necesitamos agregar un par de condiciones topológicas. La primera es que la superficie Riemanniana S sea compacta como espacio topológico. La segunda, que S sea orientable.

Sea M una variedad diferenciable provista de un atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$. Decimos que el atlas es orientable si los Jacobianos de los difeomorfismos locales $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son todos de determinante positivo. La variedad M se dice orientable si está provista de un atlas orientable. Si suponemos el concepto de formas en general, no es dificil demostrar que M es orientable sí, y solo sí, M posee una n-forma que nunca se anula, n la dimensión de M. El argumento natural que demuestra este hecho en el caso de superficies no depende de la dimensión y se puede dar para cualquier n.

Ejercicio 15. Para las variedades diferenciables del Ejercicio 8, demuestre que $\mathbb{CP}^2$ es orientable y que $\mathbb{RP}^2$ no lo es. En general, demuestre que $\mathbb{CP}^n$ es orientable, y que $\mathbb{RP}^n$ es orientable sí, y solo sí, n es impar. $\square$

Ejercicio 16. Demuestre que si M es una variedad diferenciable arbitraria, su tangente TM como variedad diferenciable es orientable. $\square$

Toda superficie compacta S posee triangulaciones finitas. Una tal triangulación K consiste de una partición de S en un número finito de triángulos $\{T_i\}$, lados $\{L_i\}$ y vértices $\{V_i\}$, a quienes consideramos con una orientación apropiada, y los pensamos como generadores de grupos libres en dimensiones 2, 1 y 0, respectivamente. Cada lado de un triángulo T_j en K es un elemento de $\{L_i\}$, y cada vértice de un lado L_j en K es un elemento de $\{V_i\}$. La intersección de triángulos en $\{T_i\}$ es un subconjunto de $\{L_i\}$, y la intersección de lados en $\{L_i\}$ es un subconjunto de $\{V_i\}$. El conjunto soporte $|K|$ de K es por definición la unión de todos los elementos de K, y la definición nos provee de un homeomorfismo de $|K|$ en la superficie S.

Usando la noción de borde topológica, obtenemos correspondientes homomorfismos bordes $\{\partial_n\}$, $n = 2, 1, 0.$ entre los grupos libres generados por los triángulos, lados y vértices, respectivamente. Y puesto que el borde de una región topológica tiene ella misma borde vacío, la composición de dos de estos homomorfismos es el homomorfismo trivial. A cada nivel i, el cociente del núcleo del homomorfismo en ese nivel por la imágen del anterior define el i-ésimo grupo de homología de S con coeficientes en $\mathbb{Z}$, un grupo Abeliano finitamente generado al cual llamamos $H_i(S; \mathbb{Z})$. A nivel dos, entendemos al subgrupo trivial como la "imágen del anterior," mientras que a nivel cero, el "núcleo del homomorfismo" es entendido como el grupo libre todo en esa dimensión. Modulo isomorfismos, la clase definida por los grupos $H_2(S; \mathbb{Z})$, $H_1(S; \mathbb{Z})$ y $H_0(S; \mathbb{Z})$ es independiente de la triangulación K de S usada para definirlos.

Sea $T_i(S; \mathbb{Z})$ el subgrupo de elementos torsión de $H_i(S; \mathbb{Z})$. El $i$ésimo número de Betti $b_i(S)$ se define como el rango del grupo $H_i(S; \mathbb{Z})/T_i(S; \mathbb{Z})$, y el número de Euler $\chi(S)$ de S es definido como $\chi(S) = \sum_i (-1)^i b_i(S)$.

Dada una triangulación finita K de S, sean t, l y v el número de triángulos, lados y vértices en K, respectivamente. Entonces,

$$\chi(S) = v - l + t \,.$$

Consideremos ahora una superficie compacta S con métrica Riemanniana g. Supongamos que S es conexa. Usando la compacidad de S y la función exponencial en cada punto, podemos encontrar una descomposición finita $\{T_i\}$, $\{L_i\}$, $\{V_i\}$ de S en triángulos, lados y vértices, tal que cada triángulo T_i junto a sus tres lados yace completamente dentro de un abierto de S parametrizado por coordenadas geodésicas polares. Así pués, podemos usar la expresión (34) para relacionar la curvatura Gaussiana total sobre cada T_i con la curvatura total de su borde $c_i = \partial T_i$ y los ángulos interiores α_i, β_i y γ_i del triángulo. Si la superficie S es orientable, podemos darle a cada triángulo T_i una orientación de manera tal que si $\sum_i [T_i]$ es el elemento del grupo libre en dimensión dos generado por la suma de todos los triángulos, tenemos que $\partial_2(\sum_i [T_i]) = 0$, y cualquier otro elemento en el núcleo de ∂_2 es un múltiplo entero de $\sum_i [T_i]$. La orientación de cada triángulo induce una orientación de cada uno de sus tres lados, y por ende, una orientación de todos los elementos de $\{L_i\}$. Puesto que cada lado de un T dado en el conjunto $\{T_i\}$ es un lado de exactamente otro triángulo T' en dicho conjunto, la contribución de este lado a la integral $\int_{\partial T} k$ cancela la contribución correspondiente en la integral $\int_{\partial T'} k$ porque dicho lado aparecerá recorrido con orientaciones opuestas en ∂T y $\partial T'$, respectivamente. Si v, l y t son el número de vértices, lados y triángulos en K, usando (34) y la discusión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \int K_g d\mu_g = \sum_{i=1}^{T} \int_{T_i} K_g d\mu_g &= \textstyle\sum_{i=1}^{T} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - \pi t \\ &= 2\pi v - \pi t \\ &= 2\pi(v - l + t)\,, \end{aligned}$$

donde las últimas dos igualdades siguen de los hechos siguientes: si sumamos todos los ángulos interiores en un vértice de los triángulos en $\{T_i\}$ que contienen a dicho vértice, obtenemos 2π por cada vértice en $\{V_i\}$, y si contamos cada triángulo tres veces de acuerdo a su número de lados, llegamos a contar cada lado dos veces, de manera tal que $3t = 2l$. Obtenemos así el teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 8. *Sea S una superficie compacta orientable, y sea g una métrica Riemanniana en S. Sean K_g y $d\mu_g$ la curvatura Gaussiana y la forma de área de la métrica g, respectivamente. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K_g d\mu_g = \chi(S)\,, \tag{35}$$

donde $\chi(S)$ es el número de Euler de S.

Nótese que para definir el lado derecho de (35) solamente se requiere el que S sea una superficie topológica. Por otro lado, la definición de una metrica requiere el que podamos hablar del fibrado tangente de S, y a su vez, la definición de la curvatura de la métrica requiere el que podamos diferenciar campos vectoriales al menos un par de veces, y ello requiere el que trabajemos con una superficie S de tipo C^k con $k \geq 3$. El promedio obtenido por el proceso de integración en el lado izquierdo de (35) olvida la alta diferenciabilidad requerida sobre S para poder definirlo.

Es tremendamente resaltante el que podamos interconectar información métrica e información topología, herramienta de poder en ambas direcciones. Por ejemplo, consideremos al toro como nuestra superficie S. Argumentos sencillos nos llevan a la conclusión de que su clase de Euler es cero, y más aún, que este admite una métrica g de curvatura K_g nula. Es concebible el pensar que usando un proceso de deformación continuo podríamos transformar dicha métrica en una cuya curvatura sea una función pequeña en magnitud pero de un signo dado, ó bien positivo ó bien negativo. Más (35) implica que una tal deformación es imposible. Por otro lado, si g es una métrica de curvatura $K_g > 0$ en una superficie compacta orientable S, podemos concluir que S es topológicamente igual a la dos esfera.

La demostración de (35) que hemos dado es el producto de globalizar el argumento local que nos dió (34) como resultado. Un argumento de Chern [9, 10] nos permite demostrar dicho resultado globalmente, y la semilla de tal está englosada en las formas definidas por (32) y (33). Este argumento envuelve el primer uso histórico fundamental del fibrado de esferas $T_1M = \{(p,v) \in TM : \ \|v\|_p = 1\}$, una variedad de dimension $2n-1$ en el caso cuando la dimension de M es n. Para una superficie tenemos así un fibrado por circunferencias cuyo espacio total es de dimensión 3.

Los espacios tangentes a S son todos isomorfos a $\mathbb{R}^2$ como espacios vectoriales. Si S es orientable, los puntos de T_1S nos determinan un sistema referencial ortonormal $\{e_1, e_2\}$ orientado positivamente, donde e_2 coincide con la fibra del punto de T_1S donde estemos parados, y la expresión (32) nos define formas w_i^j en T_1S. La identidad (33) es aún válida, más ha de interpretarse como tal entre dos formas en la variedad tres dimensional T_1S. En realidad tenemos una función proyección $\pi : T_1S \to S$ que nos permite retraer el fibrado tangente sobre S a un fibrado sobre T_1S, y retraer tambien la forma de Gauss-Bonnet Ω_g definida en (31) a una dos forma sobre T_1S, la cual no es otra cosa sino $K_g d\mu_g$ así interpretada. Retraemos también la forma w_2^1 a una uno forma en T_1S. Abusando de la notación, llamemos Ω_g y w_2^1 a tales formas en T_1S. En esta última variedad, tenemos la relación $\Omega_g = dw_2^1$ entre la formas así obtenidas.

Consideremos un campo vectorial V en S con un número finito de ceros, ó singularidades como se les llama comunmente. En torno a cada uno de los puntos singulares, removamos una bola geodésica de radio arbitrariamente pequeño. Sobre los puntos no singulares, el campo vectorial define de manera obvia una subvariedad $\tilde{S}$ de T_1S de dimensión dos, con borde consistente de las circunferencias de T_1S sobre todas las finitas singularidades del campo.

Usando el teorema de Stokes, tenemos que

$$\int_{\tilde{S}} \Omega = \sum \int_{\mathbb{S}^1} w_2^1 \,.$$

El lado derecho es el índice del campo V, el cual ya se sabía al momento de Chern coincide con el número de Euler de S. El lado izquierdo coincide con la evaluación (ó integración) de la forma $K_g d\mu_g$ sobre el ciclo fundamental S puesto que los puntos singulares del campo tienen medida cero, y su exclusión del dominio de integración no cambia la integral de la forma indicada.

El argumento de Chern presentado anteriormente para superficies orientables se extiende a variedades M compactas orientables de dimensión par. La evaluación de la forma de Gauss-Bonnet-Chern en tal caso sobre el ciclo fundamental M produce el número de Euler de M, la suma alternada de los rangos de sus grupos de homología. El resultado se conoce hoy día como el teorema de Chern-Gauss-Bonnet.

4. Subvariedades y Homología

En el caso en el cual M es una variedad compacta de dimensión n, podemos definir sus grupos de homología $H_j(M;\mathbb{Z})$, $j = n, \dots, 1, 0$, de manera similar a como se lo hizo para el caso de superficies, donde $n = 2$. Necesitamos usar ahora una triangulación de M dada por un complejo simplicial K de dimensión n, cuyos elementos debidamente orientados en dimensión j se toman como generadores de un grupo libre $C_j(K)$, $n \geq j \geq 0$. Entre tales grupos definimos homomorfismos bordes $\partial_j : C_j(K) \to C_{j-1}(K)$ con la propiedad de que $\partial_{j+1} \circ \partial_j = 0$. La triangulación provee de un homeomorfismo del soporte $|K|$ de K en M, donde $|K|$ es el espacio obtenido como la unión topológica de todos los simplices del complejo. Un simplice de dimensión j es el conjunto de combinaciones lineales convexas de $j+1$ vectores geometricamente independientes en $\mathbb{R}^N$, para algún N suficientemente grande. Las combinaciones lineales convexas de un subconjunto propio de tales vectores es por definición una cara del símplice. Requirimos de K el que tenga la propiedad de que cada cara de sus símplices sea un símplice en K, y que la intersección de cualesquiera dos de los símplices de K sea una cara de cada uno de ellos. La dimensión de K se define como la mayor de las dimensiones de sus símplices, en caso en el cual haya una tal. Si M es compacta, podemos encontrar una triangulación de M con un número finito de elementos. Definimos $H_j(M;\mathbb{Z}) = \text{Núcleo}\, \partial_j / \text{Imagen}\, \partial_{j+1}$, con los correspondientes ajustes para los casos $j = n$ y $j = 0$. La clase de isomorfismos de dichos grupos Abelianos no depende de la triangulación K de M que sea escogida. Funciones continuas $f : M \to \tilde{M}$ entre espacios topológicos M y $\tilde{M}$ inducen homomorfismos $f_* : H_j(M;\mathbb{Z}) \to H_j(\tilde{M};\mathbb{Z})$. La definición de tal requiere el que usemos triangulaciones de M y $\tilde{M}$ de manera tal que todos los simplices que contengan a un vértice dado cualquiera sean enviados por f en símplices que contengan a la imagen por f del vértice en cuestión, y esto se puede conseguir escogiendo triangulaciones de los espacios topológicos que sean suficientemente “finas”.

Ejercicio 17. Sea $\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : \ (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4\}$ el campo de cuaterniones. Definamos por $Sp(n)$ al grupo de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{H}$ tal que $\langle Mx, My\rangle_{\mathbb{H}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{H}}$, donde $\langle x, y\rangle_{\mathbb{H}} = \sum_i \bar{x}_i y_i$ es la forma bilineal cuaterniónica estandar en $\mathbb{H}^n$. Provea a $Sp(n)$ de una estructura diferenciable y demuestre así que $Sp(n)$ es una variedad diferenciable de dimension $2n^2 + n$.

Identificando a cuaterniones con puntos en $\mathbb{R}^4$, concluya que $Sp(1) = \mathbb{S}^3$. Considere la acción de $Sp(1)$ en $Sp(2)$ definida por la regla

$$q \circ (q_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{q} \end{pmatrix} .$$

para cualquier $q \in Sp(1)$. Demuestre que el cociente de $Sp(2)$ por la relación que identifica a puntos que pertenezcan a una misma órbita de la acción es una variedad diferenciable, y como tal, isomorfa a la esfera $\mathbb{S}^7$. Use esta propiedad para concluir que $H_j(Sp(2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ para $j = 0, 3, 7, 10$, y que dicho grupo es trivial en cualquier otro caso. □

Supongamos que $f : M \to \tilde{M}$ es una función C^∞ entre las variedades M y $\tilde{M}$. El rango de f en un punto p es por definición el rango de df_p. Asumamos que la dimension n de M es menor ó igual que la dimensión $\tilde{n}$ de $\tilde{M}$. Decimos que f es una inmersión de M en $\tilde{M}$ si el rango de f es igual a n en cada punto de M, y la llamamos una inmersión inyectiva si $f : M \to f(M) \subset \tilde{M}$ es un difeomorfismo. Si M es un subconjunto de $\tilde{M}$ que tiene su propia estructura diferenciable, decimos que M es una subvariedad inmersa de $\tilde{M}$ si la inclusión $i : M \hookrightarrow \tilde{M}$ es una inmersión, y decimos que M es una subvariedad si la inclusión es una inmersión inyectiva. En el último caso, la llamamos una subvariedad cerrada si como subconjunto de $\tilde{M}$, M es cerrado.

Sea $\tilde{M}$ una variedad compacta orientable de dimensión $\tilde{n}$, y sea M una subvariedad compacta orientable de dimensión n. Consideremos la clase $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$. La inclusión $i_*[M]$ nos produce una clase particular en $i_*[M] \in H_n(\tilde{M}; \mathbb{Z})$. El problema que deseamos discutir es el inverso a este: si nos damos una clase $D \in H_n(\tilde{M}; \mathbb{Z})$, ¿existirá una subvariedad M tal que $i_*[M] = D$? De ser así, decimos que una variedad M con esta propiedad realiza a la clase entera D. Entre las subvariedades que realizan a D, ¿cómo escogemos una de manera canónica?

Una de las contribuciones más importantes de R. Thom [20] concierne la primera de las preguntas anteriores, a la cual él le dió hace ya medio siglo una respuesta negativa. Existen variedades con clases de homología que no son realizables por subvariedad alguna. De hecho, como fué demostrado recientemente [6], cualquier generador de $H_7(Sp(2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ nos da un tal ejemplo. En tal caso, la órbita $\mathbb{S}^3$ de cualquier punto de $Sp(2)$ bajo la acción de $Sp(1)$ sobre él representa al generador de $H_3(Sp(2);\mathbb{Z})$, y por ende tal generador es realizable por cada una de las órbitas.

No obstante, insisterimos a tratar de formular un método apropiado para responder a la segunda pregunta en el caso en que hayan realizaciones de una clase D dada. El método es métrico, y está esencialmente inspirado por lo ya hecho con geodésicas. Pues si nos damos una clase de homología D de dimensión uno en una variedad Riemanniana, buscamos entre todas las curvas cerradas en la variedad que representan a dicha clase, aquella que tenga la menor longitud. Más para clases $D \in H_j(\tilde{M};\mathbb{Z})$ con $j > 1$, la noción de longitud del representante debe reemplazarse por una apropiada. Esto nos fuerza a considerar con más detalle de aquellos dados anteriormente los aspectos métricos de una subvariedad cuya métrica Riemanniana es inducida por la métrica del ambiente.

Dada una variedad Riemanniana (M,g), la expresión (19) define $\nabla^g_X Y$, la derivada métrica de Y en la dirección de X, y (22) nos da el operador diferencial de orden dos $R^g(X,Y)Z$ el cual mide la diferencia entre el conmutador de las derivadas en dos direcciones y la derivada en la dirección del conmutador de ellas. A partir de este, y en el caso en que $M = S$ es una superficie, definimos la curvatura de la sección de T_pS expandida por X, Y por la expresión (23), la cual por razones dimensionales no depende de la base de T_pS escogida. Mas observemos que la última definición se puede reformular equivalentemente como la traza del operador lineal $L \to R^g(L,X)Y$, concepto de completo sentido para variedades M de dimensión arbitraria, mas en dimensiones mayores a dos dependiente de los campos X y Y escogidos. Definimos así al tensor de Ricci como

$$r_g(X,Y) = \mathrm{traza}\, L \to R^g(L,X)Y = \sum_{i=1}^{n} g(R^g(e_i,X)Y,e_i)\,, \tag{36}$$

donde $\{e_i\}$ es un sistema referencial ortonormal. Nótese que en principio la función $(X,Y,Z,W) \to g(R^g(X,Y)Z,W)$ tiene n^4 grados de libertad, mas las simetrías de g y R reducen dicho número y cuando se les cuentan todos, terminamos con tan solo $n^2(n^2-1)/12$ de ellos. Cuando $n = 2$, tal número de grados de libertad es 1, como ya lo sabíamos. Las simetrías de tal tensor permiten concluir también que r_g es simétrico, es decir, $r_g(X,Y) = r_g(Y,X)$. La curvatura escalar s_g de g se define como la traza métrica de r_g:

$$s_g = \mathrm{traza}\, r_g = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} g(R^g(e_i,e_j)e_j,e_i)\,, \tag{37}$$

Supongamos que $(\tilde{M},\tilde{g})$ es una variedad Riemanniana compacta de dimensión $\tilde{n}$. Sea (M,g) una otra variedad Riemanniana inmersa dentro de $\tilde{M}$ isométricamente. Podemos así pensar a M como una variedad en sí misma contenida en $\tilde{M}$, la función inclusión $i : M \hookrightarrow \tilde{M}$ una inmersión, y $i^*\tilde{g} = g$.

La métricas g y $\tilde{g}$ definen operadores derivadas covariantes ∇^g y $\nabla^{\tilde{g}}$ de manera única. Consideremos campos vectoriales X, Y en M, y extendamoslos como campos vectoriales $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ a un entorno de M en $\tilde{M}$. Observemos que la métrica $\tilde{g}$ nos permite definir una descomposición ortogonal $T\tilde{M}\mid_M = TM \oplus \nu(M)$, donde $\nu(M)$ es el fibrado de campos ortogonales a M, definido por $\nu(M) = \{(p,\nu) \in T_p\tilde{M} :\ p \in M,\, \tilde{g}(\nu, v) = 0 \text{ para todo } v \in T_pM\}$. Sea π_{TM} la proyección ortogonal sobre TM. Observemos que $\pi_{TM}(\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M)$ solo depende de X y de Y, y no de la extensiones suyas que hayamos escogido. Como función de X y Y, $\pi_{TM}(\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M)$ satisface las propiedades (a), (b), (c) y (d), página 27, de la conexión métrica ∇^g de g. Por la unicidad de la última, concluimos que $\nabla^g_X Y = \pi_{TM}(\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M)$, y si definimos $\alpha(X,Y)$ como la componente normal de $\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M$, tenemos que

$$\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M = \pi_{TM}(\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M) + (1-\pi_{TM})(\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M) = \nabla^g_X Y + \alpha(X,Y)\,.$$

La relación anterior entre las derivadas covariantes $\nabla^{\tilde{g}}$ y ∇^g es conocida como la identidad de Gauss. La sección α del fibrado $T^*M \otimes T^*M \otimes \nu(M)$ así definida es la segunda forma fundamental de la subvariedad inmersa M. Puesto que el campo $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ es tangente a M, sigue que $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$.

Ejemplo 9. Consideremos a la esfera $\mathbb{S}^n_a \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de radio a con centro en el origen provista de la métrica Riemanniana g inducida por la métrica Euclideana $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ en el espacio ambiente. Sean ∇^g y ∇ las derivadas covariantes de estas métricas. Si X y Y son campos tangentes a $\mathbb{S}^n_a$, tenemos que

$$\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}\mid_M = \nabla^g_X Y - \frac{1}{a}\langle X, Y\rangle N\,,$$

donde N es el campo normal a $\mathbb{S}^n_a$. Puesto que la curvatura $([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})Z$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ es cero, la identidad anterior nos lleva a la conclusión que

$$R^g(X,Y)Z = \frac{1}{a^2}\left(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\right)\,. \tag{38}$$

Sigue facilmente que

$$r_g(X,Y) = \frac{1}{a^2}(n-1)\langle X,Y\rangle = \frac{1}{a^2}(n-1)g(X,Y)\,,$$

y por lo tanto,

$$s_g = \frac{1}{a^2}n(n-1)\,.$$

Así pues, la métrica g en $\mathbb{S}^n_a$ tiene como tensor de Ricci a un múltiplo escalar de g. Métricas con tal propiedad son definidas como métricas Einstein. $\square$

Supongamos se tiene una conexión métrica ∇^g, un campo vectorial X y una uno forma η . Podemos definir la acción de ∇^g_X sobre η por dualidad y de manera única si exigimos que actúe como una derivación sobre el producto tensorial $\eta \otimes Y$, Y un campo vectorial arbitrario, y que conmute con la contracción $\eta \otimes Y \to \eta(Y)$. Sigue entonces que

$$(\nabla^g_X \eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\nabla^g_X Y) .$$

Obtenemos así un tensor $\nabla\eta$ definido por

$$(\nabla\eta)(X,Y) = (\nabla^g_X \eta)(Y) .$$

Usando (30) y el hecho que ∇^g tiene torsión nula, vemos con facilidad que

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\left((\nabla^g_X\eta)(Y) - (\nabla^g_Y\eta)(X)\right) .$$

Si $\eta = df$ para una función f, concluimos que $(\nabla^g_X df)(Y) = (\nabla^g_Y df)(X)$. Por lo tanto, $\nabla^g df$ es un tensor simétrico. Este es por definición el Hessiano de f. Si usamos la dualidad entre formas y campos dada por la métrica, puesto que df se corresponde con el gradiente ∇f, obtenemos la definición equivalente $\nabla^g\nabla f$ dada por $(\nabla^g\nabla f)(X,Y) = g(\nabla^g_X\nabla f, Y)$. Es por ello que nos referiremos a $\nabla^g df$ y a $\nabla^g\nabla f$ como el Hessiano de f, sin distinción alguna porque no la hay.

Ejemplo 10. Con algunas imprecisiones notacionales, la segunda forma fundamental de la superficie (7) definida por el gráfico de la función f fué llamada II con anterioridad (véase la página 19). Puesto que α es una forma bilineal con valores en el fibrado normal, en el caso de una superficie en $\mathbb{R}^3$ ella se corresponde a una forma cuadrática, la aludida II. Generalicemos ahora tal resultado.

Consideremos el gráfico M de una función f en $\mathbb{R}^n$, $M = \{(x, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x^{n+1} = f(x^1,\ldots,x^n)\}$. Sea $x = (x^1,\ldots,x^n)$, y $F(x,x^{n+1}) = x^{n+1} - f(x)$. Luego, $\nabla F = (-\partial_{x^1} f,\ldots,-\partial_{x^n} f, 1)$ es ortogonal a M, $\|\nabla F\| = (1+\sum_{i=1}^n (\partial_{x^i} f)^2)^{\frac{1}{2}}$, y tenemos que

$$\langle \alpha(X,Y), \nabla F\rangle = -\langle Y, \nabla_X \nabla F\rangle = -\nabla\nabla F(X,Y) ,$$

el opuesto de la matrix Hessiana de F evaluada sobre los campos X y Y tangentes a M, cuya normalización identificamos con α. Puesto que los vectores $e_1 = (1,0,\ldots,0,\partial_{x^1} f),\ldots,e_n = (0,0,\ldots,1,\partial_{x^n} f)$ son una base de TM, si $X = \sum u^i e_i$ and $Y = \sum v^i e_i$, la forma bilineal α se identifica con

$$\mathrm{II}(u,v) = \frac{1}{(1+\sum_{i=1}^n (\partial_{x^i} f)^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^n u^i (\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} v^j) ,$$

donde u y v son los vectores coordenadas de X y Y en $\mathbb{R}^n$. Dicha expresión se simplifica a la dada con anterioridad cuando $n = 2$ si asumimos que $\nabla f = 0$ en el punto en cuestión. $\square$

Dado un campo vectorial V en M, llamaremos $\tilde{V}$ a una extensión suya como campo vectorial en $\tilde{M}$. Consideremos campos X, Y, Z y W en M. La función en M definida por la expresión $\tilde{g}(R^{\tilde{g}}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z},\tilde{W}) \mid_M$ es independiente de las extensiones de los campos consideradas, y por tal motivo la definimos como $\tilde{g}(R^{\tilde{g}}(X,Y)Z,W)$. Por otro lado, la función $g(R^g(X,Y)Z,W)$ está definida de manera intrínseca. ¿Cuál es la relación entre ellas? Usando las propiedades de las conexión $\nabla^{\tilde{g}}$ y la identidad de Gauss, vemos con facilidad que

(39)
$$\tilde{g}(R^{\tilde{g}}(X,Y)Z,W) = g(R^g(X,Y)Z,W)+\tilde{g}(\alpha(X,Z),\alpha(Y,W))-\tilde{g}(\alpha(X,W),\alpha(Y,Z))\,.$$

Si K_g es la curvatura seccional de la métrica g, dados campos ortonormales X y Y, tenemos la relación

$$K_{\tilde{g}}(X,Y) = K_g(X,Y) + \tilde{g}(\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)) - \tilde{g}(\alpha(X,X),\alpha(Y,Y))\,,$$

la cual nos da la curvatura seccional intrínseca de (M,g) en términos de cantidades extrínsicas que dependen de su inmersión dentro de $\tilde{M}$. Esto abre la posibilidad de buscar la inmersión isométrica de M que sea óptima tratando de hacer alguna de sus curvaturas lo más simple posible. Es común el referirse a (39) como la ecuación de Gauss. Ella nos dió ya la curvatura de Riemann de la esfera (38), expresión que obtuvimos usando el hecho que $\alpha(X,Y) = (1/a)\langle X,Y\rangle N$ en tal caso.

La conexión $\nabla^{\tilde{g}}$ induce la función $(X,N) \mapsto \nabla^{\nu}_X N = (1-\pi_{TM})\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{N}$ para X y N campos vectoriales tangente y normal a M, respectivamente. Tal función solo depende de X y N, y satisface las propiedades (a) y (b) de la página 27. Tenemos así una conexión en $\nu(M)$. Definamos al operador de forma A de la inmersion por la expresión

$$A_N X = -\pi_{TM}(\nabla^{\tilde{g}}_X N)\,,$$

de manera tal que

$$\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{X}}\tilde{N} = -A_N X + \nabla^{\nu}_X N\,.$$

Observemos que $\langle \alpha(X,Y),N\rangle = \langle A_N X, Y\rangle$, y la simetría de α es codificada en la simetría de A_N como operador lineal para cada campo normal N. Las curvaturas principales en la dirección N se definen como los autovalores de A_N.

Siguiendo el argumento que nos llevó a (39), podemos obtener una relación del género para la componente normal de $R^{\tilde{g}}(X,Y)Z$, a la cual llamaremos $(R^{\tilde{g}}(X,Y)Z)^{\nu}$. En efecto, obtenemos que

(40)
$$\begin{array}{rcl}\nabla^{\tilde{g}}_X\alpha(Y,Z) & = & (R^{\tilde{g}}(X,Y)Z)^{\nu} + \nabla^{\tilde{g}}_Y\alpha(X,Z) + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X \\ & & \alpha(Y,\nabla^g_X Z) - \alpha(X,\nabla^g_Y Z) + \alpha([X,Y],Z)\,,\end{array}$$

identidad conocida como la ecuación de Codazzi.

Sea $\{e_1,\ldots,e_{\tilde{n}}\}$ una base ortonormal para la métrica $\tilde{g}$ en un entorno de M tal que $\{e_1,\ldots,e_n\}$ constituya una base ortonormal para g en puntos de M. Definimos al vector de curvatura media H de la inmersión como la traza de la segunda forma fundamental α, es decir

$$H = \sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i)\,.$$

Luego, a partir de la definición y usando (39), obtenemos que

$$r_g(X,Y) = \quad r_{\tilde g}(X,Y) - \textstyle\sum_{i=n+1}^{\tilde n} \tilde g(R^{\tilde g}(e_i,X)Y,e_i) + \tilde g(H,\alpha(X,Y)) - \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \tilde g(\alpha(e_i,X),\alpha(e_i,Y))\,.$$

Y calculando las trazas de los tensores de Ricci r_g y $r_{\tilde g}$ sobre puntos de M, obtenemos que

$$(41)\quad s_g = s_{\tilde g} - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{\tilde n} K_{\tilde g}(e_i,e_j) - \sum_{i,j>n} K_{\tilde g}(e_i,e_j) + \tilde g(H,H) - \tilde g(\alpha,\alpha)\,.$$

Esta última relación entre las curvaturas escalares será nuestro punto de partida para proponer un plan de ataque al problema que nos propusimos. Si D es una clase de homología uno dimensional, su representante óptimo natural es la geodésica de menor longitud en la clase de D, una subvariedad de dimension uno cuya segunda forma fundamental es identicamente nula. De hecho curvas isometricamente inmersas en $\tilde M$ no poseen curvatura, y en la expresión anterior tenemos $s_g = 0$, $\alpha = H$, y $s_{\tilde g} = \sum_{j>1} K_{\tilde g}(e_1,e_j)$ en un tal caso. En dimensiones más altas, si M representa a D, la curvatura de (M,g), la cual podría ser ahora no trivial, debería jugar un papel de importancia en el determinar el mejor de los representantes de D, y el problema deviene en encontrar la mejor manera de sumergir a M en $\tilde M$ dentro de los representantes de D. Observemos que $\tilde g(H,H)$ y $\tilde g(\alpha,\alpha)$ son los términos de orden 1 en $\nabla^{\tilde g}$ en el lado derecho de (41). Una manera natural de buscar la inmersión óptima prodría ser aquella en la cual la diferencia de estos términos sea lo más pequeña posible.

Ejemplo 11. La hipersuperficie $x^{n+1} = f(x^1,\ldots,x^n)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ tiene vector normal $N = (1+\|\nabla f\|^2)^{-\frac12}(-\partial_{x^1} f,\ldots,-\partial_{x^n} f,1)$ y segunda forma fundamental paralela a N con componentes dadas por

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(1+\|\nabla f\|^2)^{\frac12}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)\,,$$

como ya lo vimos en el Ejemplo 10. Las componentes g_{ij} de la métrica sobre la hipersuperficie están dadas por

$$g_{ij} = \delta_{ij} + (\partial_{x^i} f)(\partial_{x^j} f)\,,$$

donde δ_{ij} es la función de los índices con valor 1 si $i = j$ y valor 0 si $i \neq j$. Sigue entonces que

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{1+\|\nabla f\|^2}(\partial_{x^i} f)(\partial_{x^j} f)\,.$$

El vector H de curvatura media es de la forma $H = hN$, donde

$$h = \sum_{ij} g^{ij}\alpha_{ij} = \mathrm{div}\left(\frac{1}{(1+\|\nabla f\|^2)^{\frac12}}\nabla f\right) = \frac{1}{\|N\|}\Delta f - \frac{1}{\|N\|^3}\langle\langle \nabla f, \nabla\nabla f\rangle, \nabla f\rangle\,,$$

donde las expresiones geométricas en el lado derecho son aquellas de la métrica Euclideana. Similarmente,

$$\begin{aligned}\alpha^{ij} \quad = \quad & \frac{1}{\|N\|}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial_{x^j} f}{\|N\|^3}\sum_l \partial_{x^l} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial_{x^i} f}{\|N\|^3}\sum_l \partial_{x^l} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^j} \\ & + \frac{\partial_{x^i} f \partial_{x^j} f}{\|N\|^5}\sum_{lr} \partial_{x^l} f \partial_{x^r} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^r}\,,\end{aligned}$$

expresión a partir de la cual podemos calcular la norma puntual de α. Obtenemos

$$\|\alpha\|^2 = \frac{1}{\|N\|^2}\|\nabla\nabla f\|^2 - 2\left(\frac{\langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle}{\|N\|^2}\right)^2 + \left(\frac{\langle\langle \nabla f, \nabla\nabla f\rangle, \nabla f\rangle}{\|N\|^3}\right)^2 .$$

Usando (41), y puesto que la métrica Euclideana es plana, vemos que la curvatura escalar s_g de la hipersuperficie está dada por

$$s_g = \frac{1}{\|N\|^2}((\Delta f)^2 - \|\nabla\nabla f\|^2) - \frac{2}{\|N\|^4}\left(\Delta f \langle\langle \nabla f, \nabla\nabla f\rangle, \nabla f\rangle - \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle^2\right) .$$

Dicha expresión describe explicitamente a s_g como un operador completamente no lineal de orden 2 en g. $\square$

4.1. **La norma L^2 de la segunda forma fundamental de una inmersión.** Puesto que M está isométricamente inmersa en $(\tilde{M}, \tilde{g})$, definiremos la forma métrica óptima como aquella dada por una inmersión óptima. Esto limita el conjunto de métricas Riemannianas a considerar en el momento de escoger la mejor de ellas.

Si estuviésemos considerandos todas las metricas Riemannianas posibles, podriamos analizar el funcional curvatura escalar total, dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\int s_g d\mu_g \end{array} . \tag{42}$$

El integrando en esta expresión es la curvatura escalar s_g de la métrica g, y la medida de integración es la inducida por g. El dominio es el conjunto de métricas Riemanniana respecto de las cuales M tiene volumen uno. La razón para la normalización de la métrica es simple: el funcional (42) es homogeneo de grado $(n-2)/2$ bajo dilataciones $t \rightarrow tg$ de la métrica argumento g, y por ende el funcional no podría tener puntos críticos aislados si no normalizasemos a g de alguna forma.

Sea $\mathcal{S}^p(M)$ el fibrado de p-tensores simétricos en M. La derivada covariante nos produce una función

$$\nabla^p_g : \mathcal{S}^p(M) \rightarrow \Omega^1 M \otimes \mathcal{S}^p(M)\,,$$

la cual se puede componer con la simetrización para definir así el operador

$$\delta^*_g : \mathcal{S}^p(M) \rightarrow \mathcal{S}^{p+1}(M)\,.$$

Sea entonces

$$\delta = \delta_g : \mathcal{S}^{p+1}(M) \to \mathcal{S}^p(M) \tag{43}$$

el dual métrico de δ_g^*.

El conjunto de métricas Riemannianas $\mathfrak{M}$ tiene como espacio tangente en cada punto g a la fibra $\mathcal{S}^2(M)$. El producto interno definido por g se puede entender a un producto interno en $T_g\mathfrak{M}$ definiendo $\langle h, k\rangle_g = \sum_{i,j,l,r} g^{il}g^{jr}h_{lr}k_{ij}$ donde h_{lk} es la expresión en coordenadas de h, y h^{lk} es la inversa de h_{lk}. Nótese que el producto interno en g de g y h está dado por $\langle g, h\rangle_g = \sum_{i,j} g^{ij}h_{ij} = \mathrm{traza}_g\, h$.

Si consideramos una curva $g_t = g + th$ de métricas que comienza en g con velocidad dada por el tensor simétrico h, las variaciones infinitesimales de la curvatura escalar y el volumen de la métrica están dadas por las formulas

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}s_{g+th}\mid_{t=0} & = & -\Delta_g(\mathrm{traza}_g\, h) + \delta_g(\delta_g h) - \langle r_g, h\rangle_g\,, \\ \dfrac{d}{dt}d\mu_{g+th}\mid_{t=0} & = & \frac{1}{2}\mathrm{traza}_g\, h\, d\mu_g\,, \end{array} \tag{44}$$

donde $\Delta_g = -\delta_g d$ es el Laplaciano de g sobre funciones. Usando el teorema de la divergencia concluimos que

$$\frac{d}{dt}\int s_{g+th}d\mu_{g+th}\mid_{t=0} = \int \Big(\frac{s_g}{2}g - r_g, h\Big)_g d\mu_g\,.$$

Si esta expresión es igual a cero para toda variación de g donde el volumen de M se mantiene constante, g es un punto crítico del funcional (42). En dimensión dos, esto ocurre para toda g pues el mencionado funcional es una contante topológica, hecho ya demostrado por el Teorema 8 de Gauss-Bonnet. Si por otro lado $n \geq 3$, tendremos que el tensor $(s_g/2)g - r_g$ debe ser perpendicular en el sentido L^2 a los tensores simétricos sin traza, y esto implica que

$$\frac{s_g}{2}g - r_g = \lambda g\,,$$

para cierta función a valores reales λ. Las simetrías diferenciales de la curvatura fuerzan a λ a ser una constante, y tomando trazas de ambos lados concluimos que $\lambda = (s_g/2n)(n-2)$, y los puntos críticos son métricas Einstein: $r_g = (s_g/n)g$.

Mas el problema es que las inmersiones isométricas de M en un espacio Riemanniano ambiente fijo no nos permiten en principio deformar a M en todas las direcciones métricas posibles. Tratemos pues de encontrar inmersiones canónicas minimizando las contribuciones globales de algunos de los sumandos en (41), en particular los dos últimos en su lado derecho.

Consideremos la inmersión isométrica $f : M \to \tilde{M}$ de M en $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Sea α su segunda forma fundamental, y sea $\|\alpha\|^2$ el cuadrado de su norma como función del punto, es decir, $\langle \alpha, \alpha\rangle$, expresión la cual por supuesto involucra a la métrica de $\tilde{M}$ si bien sobre puntos de M. Si $d\mu = d\mu_M$ es la medida volumen de $f(M)$, definimos entonces

$$\Pi(M) = \int_M \|\alpha\|^2 \, d\mu \,. \tag{45}$$

De manera similar, definimos

$$\Psi(M) = \int_M \|H\|^2 \, d\mu \,. \tag{46}$$

La subvariedad M se dice minimal si su vector de curvatura media H es identicamente nulo. En tal caso, M es un punto crítico del funcional volumen, pues H es el gradiente de tal bajo deformaciones de la inmersión. Y evidentemente, variedades minimales realizan el mínimo absoluto del funcional (46). Queremos ahora analizar los puntos críticos de (45) y de (46) bajo deformaciones de la inmersión isométrica de M en $(\tilde{M}, \tilde{g})$. El resultado es un tanto más elaborado que aquel concerniente a variedades minimales.

Teorema 12. *Sea M una variedad de dimensión n y codimensión q inmersa isométricamente en $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Supongamos que $\{\nu_1, \ldots, \nu_q\}$ es un sistema referencial ortonormal del fibrado normal de la inmersión tal que $H = h\nu_1$. Luego, M es un punto crítico del funcional* (45) *sí, y solo sí,*

$$0 = 2\Delta h + 2\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i + \nabla^{\tilde{g}}_{e_i}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^{\nu}, \nu_1\rangle - 2h\|\nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1\|^2 - h\|\alpha\|^2 + 2\mathrm{traza}\, A_{\nu_1} A^2_{\nu_k} \,,$$

y para todo m en el rango $2 \leq m \leq q$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 2\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i + \nabla^{\tilde{g}}_{e_i}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^{\nu} + 2e_i(h)\nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1, \nu_m\rangle \\ & & +2he_i\langle \nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1, \nu_m\rangle - 2h\langle \nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1, \nabla^{\nu}_{e_i}\nu_m\rangle + 2\mathrm{traza}\, A_{\nu_m} A^2_{\nu_k} \,. \end{array}$$

M es un punto crítico del funcional (46) *sí, y solo sí,*

$$0 = 2\Delta h + 2h(K_{\tilde{g}}(e_1, \nu_1) + \cdots + K_{\tilde{g}}(e_n, \nu_1)) - 2h\|\nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1\|^2 - h^3 + 2h\,\mathrm{traza}\, A^2_{\nu_1} \,,$$

y para todo m en el rango $2 \leq m \leq q$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 2h\langle R^{\tilde{g}}(\nu_1, e_i)e_i, \nu_m\rangle + 4e_i(h)\langle \nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1, \nu_m\rangle + 2he_i\langle \nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1, \nu_m\rangle \\ & & -2h\langle \nabla^{\nu}_{e_i}\nu_1, \nabla^{\nu}_{e_i}\nu_m\rangle + 2h\,\mathrm{traza}\, A_{\nu_1} A_{\nu_m} \,. \end{array}$$

Es estas expresiones, usamos la convención de Einstein y sumamos sobre cualquier índice que aparezca repetido. □

Una detallada demostración de este resultado puede encontrarse en [18].

4.2. **Ejemplos de puntos críticos.** En el caso cuando M es una hipersuperficie en $\mathbb{S}^{n+1}$ con su métrica estandar, (41) nos dice que

$$s_g = n(n-1) + \|H\|^2 - \|\alpha\|^2 \,,$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange de (45) y (46) se reducen a

$$2\Delta h + 2h - h\|\alpha\|^2 + 2(k_1^3 + \cdots + k_n^3) = 0 \,,$$

y

$$2\Delta h + 2nh + 2h\|\alpha\|^2 - h^3 = 0 \,,$$

respectivamente. En estas expresiones, $k_1, \ldots, k_n$ son las curvaturas principales en la dirección normal, y claro está, $h = \sum k_i$ y $\|\alpha\|^2 = \sum k_i^2$.

Dada una hipersuperficie M dentro de una variedad Riemanniana $(\tilde{M}, \tilde{g})$, definamos M_t como el subconjunto de puntos cuya distancia geodésica a M es igual a t, una subvariedad para al menos valores suficientemente pequeños de t. Una hipersuperficie M se dice *isoparamétrica* si para cada uno de estos valores de t, el vector de curvatura media de M_t es constante. El estudio y teoría de este tipo de variedad fué desarrollado por Cartan [7]. El ejemplo a continuación se debe a Nomizu [16], y coincide con uno ya presentado por Cartan en el caso en que $n = 4$.

Sea $F(z) = (\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\langle x, y\rangle^2$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Luego $M_t^{2n} = \{z \in \mathbb{S}^{2n+1} : F(z) = \cos^2 2t\}$ for $0 < t < \pi/4$ es una familia de hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{S}^{2n+1}$. Para cada $t \in (0, \pi/4)$, M_t tiene curvaturas principales $k_1 = (1 + \sin 2t)/\cos 2t$ y $k_2 = (-1 + \sin 2t)/\cos 2t$ con multiplicidad 1, y $k_3 = \tan t$ y $k_4 = -\cot t$ con multiplicidad $n - 1$, respectivamente.

Usando las hipersuperficies isoperimétricas de Nomizu, podemos concluir que el conjunto de puntos críticos de (45) conforman una clase mayor que la clase de variedades minimales. En efecto, consideremos la función curvatura media $h = h(t) = k_1(t) + k_2(t) + (n-1)(k_3(t) + k_4(t))$ de las hipersuperficies M_t^{2n}. Para $n = 2$, M_t^4 es una superficie minimal para el valor de t dado por la raíz de $h(t) = k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + k_4(t)$ en el intervalo $(0, \pi/4)$, la cual coincide con la raíz de $2h(t) - \|\alpha\|^2 h(t) + 2(k_1^3(t) + k_2^3(t) + k_3^3(t) + k_4^3(t))$. Su valor es aproximadamente $t = 0.3926990817$, y el correspondiente valor crítico del funcional (45) es 12 veces el volumen de la hipersuperficie.

Sin embargo, para $n \geq 3$, las funciones $2h(t) - \|\alpha\|^2 h(t) + 2(k_1^3(t) + k_2^3(t) + (n-1)(k_3^3(t) + k_4^3(t)))$ y $h(t)$ tienen raices distintas en el intervalo $(0, \pi/4)$, y obtenemos así un punto crítico de (45) que no es minimal. Por ejemplo, para $n = 3$, la raíz de la primera de estas funciones es $t = 0.3775786497$, y el correspondiente valor crítico de (45) es 18.57333958 veces el volumen. En este caso, la función $h(t)$ tiene raíz $t = 0.4776583091$.

La clase de puntos críticos de (46) conforman también un conjunto más grande que la clase de hipersuperficies minimales. Pues cuando $n = 4$, la función $2n + 2\|\alpha\|^2 - h^2(t)$ tiene una raíz es $t = 0.2153460562$, donde $h(t)$ no es cero. Así, M_t^8 es una hipersuperficie crítica de (46) en $\mathbb{S}^9$. Su valor crítico es 147.3776409 veces el volumen. Observemos que la función en cuestión es positiva para n igual a 2 ó 3, respectivamente.

Por otro lado, consideremos al grupo de Lie $Sp(2)$ del Ejercicio 17, y provéamoslo de la métrica invariante por traslaciones a izquierda y derecha dada por

$$g\left(\left(\begin{array}{cc} p_1 & -\bar{q}_1 \\ q_1 & r_1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} p_2 & -\bar{q}_2 \\ q_2 & r_2 \end{array}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\bar{p}_1 p_2 + \bar{q}_1 q_2 + \frac{1}{2}\bar{r}_1 r_2\right),$$

donde los argumentos son vectores tangentes a $Sp(2)$ en la identidad. La tesis del ejercicio es el obtener una fibración

$$\pi : Sp(2) \to \mathbb{S}^7,$$

cuyas fibras son isomorfas a $\mathbb{S}^3$. La proyección π sobre $\mathbb{S}^7$ no es otra cosa sino el par de cuaterniones (p,q) dados por la primera columna de la matriz en $Sp(2)$ al cual se le aplica[†]. Cada fibra de esta submersión es una esfera totalmente geodésica de dimensión tres dentro de $(Sp(2),g)$, cuya curvatura seccional es constante e igual a 2. Y por ende, las fibras son todas puntos críticos de los funcionales (45) y (46).

4.3. **La variedad $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ con la métrica producto.** Consideremos $\tilde{M} = \mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ provista de la métrica $\tilde{g}$ dada por el producto de las métricas estandares en cada uno de los factores. Todo campo vectorial X se puede descomponer de la forma $X = X_1 + X_2$, donde $X_i = \pi_i^* V_i$, V_i un campo tangente al iésimo factor $\mathbb{S}^2$, y π_i la proyección correspondiente. Luego si $Y = Y_1 + Y_2$ con $Y_i = \pi_i^* W_i$, tenemos que $\tilde{g}(X,Y) = \langle V_1, W_1\rangle + \langle V_2, W_2\rangle$. Los grupos de homología con coeficientes en $\mathbb{Z}$ no triviales de $\tilde{M}$ son $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ en dimensiones 0, 2 y 4, respectivamente, con $\alpha = [\mathbb{S}^2\times\{q\}]$ y $\beta = [\{p\}\times\mathbb{S}^2]$ una base de $H_2(\tilde{M};\mathbb{Z})$. Consideremos ahora el problema de representar canónicamente a la clase $\gamma = \alpha+\beta$.

Observemos que las variedades $A = \mathbb{S}^2\times\{q\}$ y $B = \{p\}\times\mathbb{S}^2$ se intersectan en $p\times q$, y por ende el espacio topológico $D = A\cup B$, el cual representa a la clase $\alpha+\beta$, deja de ser una subvariedad precisamente por la existencia de un tal punto "singular".

Veamos a cada factor esférico como el plano complejo $\mathbb{C}$ junto con el punto en infinito. Usemos coordenadas complejas z^1 y z^2 en los factores respectivos, con los puntos p y q correspondiendo al origen en cada caso. La singularidad de D es modelada por el conjunto $L = \{(z^1,z^2)\in\mathbb{C}^2 : z^1z^2 = 0\,,\ |z^1|+|z^2|\leq 1\}$. Consideremos la bola B en $\mathbb{C}^2$ con centro en el origen y de radio 1. Removamos de $\tilde{M}$ el par (B,L) y reemplacemoslo por el par (B,L'), donde L' se obtiene perturbando a $\tilde{L} = \{(z^1,z^2):\ z^1z^2 = \varepsilon\,,\ |z^1|+|z^2|\leq 1\,,\ 0<\varepsilon\ll 1\}$ de manera tal que $\partial L = \partial L'\subset\partial B$. De esta manera, eliminamos el punto singular de D y producimos una subvariedad D' sin cambiar a $\tilde{M}$, esto porque quitamos y reintegramos a la bola B, y tal que $[D] = [D']$, esto último porque los conjuntos L y L' son homólogos en $(B,\partial B)$.

La subvariedad D' representa a γ, y es homóloga a la diagonal $\mathcal{D} = \{(p,p):\ p\in\mathbb{S}^2\}$, también un representante de γ. La última es un punto crítico de (45), como demostraremos a continuación. Y de hecho es minimal, por ende un punto crítico de (46) también.

En efecto, la variedad $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ tiene una estructura compleja natural $\tilde{J}$ proveniente de la estructura compleja J en cada factor. Definamos a $\tilde{\omega}$ por la expresión $\tilde{\omega}(X,Y) = \tilde{g}(\tilde{J}X,Y)$. La forma $\tilde{\omega}$ es alternante, y se tiene que

[†]Si proveemos a $\mathbb{S}^7\subset\mathbb{R}^8=\mathbb{C}^4$ de la métrica $\tilde{g}$ que dilata la métrica usual de la fibra de Hopf $\mathbb{S}^7\to\mathbb{CP}^3$ por un factor 1/2, la fibración $\pi : (Sp(2),g)\to(\mathbb{S}^7,\tilde{g})$ se convierte en una submersión Riemanniana, es decir, una fibración donde $T_M Sp(2)$ se descompone en la suma del tangente a la fibra y de un espacio "horizontal" que es isométrico via π a $T_{\pi(M)}\mathbb{S}^7$, esto para todo M en $Sp(2)$.

$d\tilde{\omega} = 0$. Luego, el triple $(\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ es una variedad Kähler. La diagonal $\mathcal{D}$ es una subvariedad compleja de esta, y es un hecho ya clásico que toda subvariedad compleja de una variedad Kähler es minimal. Así, el verificar que $\mathcal{D}$ es un punto crítico de (45) requiere el demostrar que

$$0 = 2\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i + \nabla^{\tilde{g}}_{e_i}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^{\nu}, \nu_m\rangle + 2\text{traza}\, A_{\nu_m} A^2_{\nu_k}\,,$$

para $m = 1, 2$, y donde $\{e_1, e_2\}$ y $\{\nu_1, \nu_2\}$ son una base ortonormal del tangente y del normal a $\mathcal{D}$, respectivamente.

La base ortonormal del tangente puede ser escogida de la forma $\{e, \tilde{J}e\}$. Puesto que para cualquier campo normal ν se tiene que $A_\nu \tilde{J} = -\tilde{J}A_\nu$, la traza cúbica es cero porque

$$\begin{aligned} \text{traza}\, A_{\nu_m} A^2_{\nu_k} &= \langle A_{\nu_m} A^2_{\nu_k} e, e\rangle + \langle A_{\nu_m} A^2_{\nu_k} \tilde{J}e, \tilde{J}e\rangle \\ &= \langle A_{\nu_m} A^2_{\nu_k} e, e\rangle - \langle \tilde{J} A_{\nu_m} A^2_{\nu_k} e, \tilde{J}e\rangle \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

dada la invariancia por $\tilde{J}$ de $\tilde{g} = \langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Por otro lado, podemos escoger los campos $\{\nu_1, \nu_2\}$ de manera que $(\nabla^{\tilde{g}} \nu_i)^{\nu}_x = 0$ en el punto x donde hacemos las cuentas. Luego,

$$\langle \nabla^{\tilde{g}}_{e_i}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^{\nu}, \nu_m\rangle = e_i \langle R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^{\nu}, \nu_m\rangle = e_i\langle R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j), \nu_m\rangle\,,$$

el cual es cero porque el tensor de curvatura de Riemann es la suma de los tensores de curvatura de Riemann en cada uno de los factores, y cada vector normal tiene componentes iguales en magnitud más opuestas en signo a lo largo de cada factor. Finalmente, descompongamos a $\alpha(e_i, e_j)$ como $\alpha(e_i, e_j) = \langle A_{\nu_l} e_i, e_j\rangle \nu_l$. Luego, tenemos que

$$\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i, \nu_m\rangle = \langle A_{\nu_l} e_i, e_j\rangle \langle R^{\tilde{g}}(\nu_l, e_j)e_i, \nu_m\rangle\,.$$

Si escogemos una base $\{e_i\}$ que diagonalice a A_{ν_l}, usando la forma de la curvatura de cada factor esférico ya dada en el Ejemplo 9, concluimos con facilidad que si $l \neq m$ este término es cero, mientras que resulta ser cero en el caso cuando $l = m$ porque la traza de A_{ν_l} es cero.

4.4. **El aspecto ideal de una clase de homología.** Escojamos y fijemos una clase de homología $D \in H_n(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ in $\tilde{M}$, y definamos el espacio

$$\mathcal{M}_D(\tilde{M}) = \{M : M \hookrightarrow \tilde{M} \text{ inmersión isométrica inyectiva}, [M] = D\}\,. \tag{47}$$

Puesto que la métrica $\tilde{g}$ en $\tilde{M}$ está fija, la eliminamos completamente de la notación usada.

Motivados por la identidad (41), buscamos el representante óptimo de la clase D a través de los puntos críticos del funcional

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_D(\tilde{M}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \displaystyle\int_M (\tilde{g}(\alpha, \alpha) - \tilde{g}(H, H)) d\mu_g \end{array} \tag{48}$$

que sean mínimos. Observemos que los puntos críticos del funcional podrían tener componentes conexas que sean bordes, y que por ende producirían en sí mismos puntos críticos homologicamente triviales. Por ello buscamos los mínimos de menor volumen, en caso en que tales existan. Un tal mínimo de menor volumen se dirá ser un *representante canónico* de D.

Proposición 13. *Consideremos a* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *con la métrica producto, y sea* $\mathcal{D}$ *la subvariedad diagonal representante de la clase de homología entera* $D = [\mathbb{S}^2 \times \{q\}] + [\{p\} \times \mathbb{S}^2]$. *Luego,* $\mathcal{D}$ *es un punto crítico de* (48) *que minimiza el volumen entre todos los representantes de* D. *De hecho,* $\mathcal{D}$ *es un punto crítico de* (45) *y* (46) *separadamente, y en cada caso el valor crítico es cero.*

Demostración. Una subvariedad compleja de una variedad Kähler es minimal, y minimiza el funcional volumen en el conjunto de subvariedades homólogas a ella. Por lo tanto, la diagonal $\mathcal{D}$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ es minimal, y minimiza el volumen entre todos los representantes de la clase D. Esto demuestra que $\mathcal{D}$ en un punto crítico de (46), y el que es un punto punto crítico del funcional (45) fué demostrado ya en la sección anterior.

El que el valor crítico es cero se puede demostrar por un cálculo directo, ó por un argumento que use a (41). Escogemos este último método. En efecto, cualquiera de las proyecciones en los factores del producto nos da un difeomorfismo isométrico de $\mathcal{D}$ y de la esfera de dimensión dos provista de la métrica usual dilatada por el factor 2. Luego, la curvatura escalar de $\mathcal{D}$ es $s_g = 1$ y su volumen es 8π. Por ende, la curvatura escalar total es igual a 8π, el mismo valor que la curvatura escalar de la esfera con su métrica usual como era de esperarse gracias al Teorema de Gauss-Bonnet. Por otro lado, la curvatura escalar del producto de esferas es igual a $s_{\tilde{g}} = 4$, mientras que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\tilde{n}} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) = 1$ y $\sum_{i,j>n} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) = \frac{1}{2}$, respectivamente. Luego, $s_g = s_{\tilde{g}} - 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\tilde{n}} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) - \sum_{i,j>n} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j)$, y puesto que sabemos ya que $\tilde{g}(H, H) = 0$, comparando con la identidad general (41), sigue que $\tilde{g}(\alpha, \alpha) = 0$. El integrando de (48) para la subvariedad crítica $\mathcal{D}$ es identicamente nulo, y por ende el valor crítico es cero. $\square$

Teorema 14. *La diagonal* $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *es un representante canónico de la clase de homología entera* $D = [\mathbb{S}^2 \times \{q\}] + [\{p\} \times \mathbb{S}^2]$.

Demostración. Por el teorema de Gauss-Bonnet y la identidad (41), sabemos que si $M \in \mathcal{M}_D$ se tiene que

$$\int_M (\tilde{g}(\alpha,\alpha) - \tilde{g}(H,H)) d\mu_g \geq -8\pi + \int_M (s_{\tilde{g}} - 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\tilde{n}} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) - \sum_{i,j>n} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j)) d\mu \, .$$

La curvatura seccional en $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \tilde{g})$ es una función de rango $[0, 2]$, y puesto que se trata de la métrica producto, el integrando a la derecha de la expresión anterior es positivo. Dicho integrando es minimizado por subvariedades complejas M en $\mathcal{M}_D$, de las cuales $\mathcal{D}$ es una tal. Por la desigualdad de Wirtinger, se sigue que la integral indicada es minimizada por $\mathcal{D}$, y el cálculo hecho en la demostración de la Proposición 13 nos produce la cota inferior

$$\mathcal{M}_D \ni M \mapsto \int_M (\tilde{g}(\alpha, \alpha) - \tilde{g}(H, H)) d\mu_g \geq 0 \, .$$

Esto completa la demostración. □

Ejercicio 18. En coordenadas complejas (z^1, z^2) en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, las líneas complejas $z^2 = az^1$, $0 \neq a \in \mathbb{C}$, son homólogas a $\mathcal{D}$. Demuetre que todas ellas son representantes canónicos de la clase D, y en particular, todas ellas están asociadas al mismo valor crítico del funcional (48) en este caso.

Ejercicio 19. Dados enteros arbitrarios m y n, consideremos la clase entera $D_{m,n} = m[\mathbb{S}^2 \times \{q\}] + n[\{p\} \times \mathbb{S}^2]$. Demuestre directamente que el conjunto $\mathcal{M}_{D_{m,n}}$ es no vacío, y trate de probar la existencia de un representante canónico de $D_{m,n}$.

5. Breve perspectiva histórica

El concepto de curvatura para superficies se debe a Carl F. Gauss (1777-1855) [14], quien parece haber dedicado unos 15 años al desarrollo y depuración de sus ideas. Como en varias otras también, su contribución en esta área de las matemáticas fué seminal, y tuvo una influencia determinante en el desarrollo posterior de la Geometría Diferencial.

Para una superficie S inmersa en $\mathbb{R}^3$, Gauss definió la función $\zeta : S \mapsto \mathbb{S}^2$, la normal de S en cada punto (hoy en día, nos referimos a ella como el *mapa de Gauss*). Definió entonces el valor absoluto de la curvatura comparando las áreas de $\zeta(D_r)$ y de D_r en $\mathbb{S}^2$ y S, respectivamente, siendo D_r un disco de radio r en S. Con más precisión, definió el mencionado concepto como el límite cuando $r \to 0$ del cociente de las áreas de $\zeta(D_r)$ y D_r. Aparte de eso, definió el signo de la curvatura considerando la orientabilidad del diferencial de ζ en p, pensado como una aplicación del tangente T_pS en sí mismo.

Gauss estudió la curvatura de una superficie en gran detalle, considerando a la superficie S desde vários puntos da vista: como superficie de nivel, como la imagen bajo una inmersión, ó como el gráfico de una función. En el último caso, demostró la identidad contenida en el Ejercicio 7. Su resultado fundamental la constituyó la demonstración de que la curvatura es independiente de la manera como S está contenida en $\mathbb{R}^3$, y que es invariante bajo la acción en S de las isometrías, es decir, bajo la acción de transformaciones de la superficie que preservan distancias entre dos puntos cualesquiera. Gauss logró así probar que su concepto de curvatura era una propiedad intrínseca de la superfície, es decir, independiente de la manera como S estuviese contenida dentro del espacio Euclideano ambiente.

Gauss parece haber sabido de la existencia de superficies de curvatura negativa, para las cuales hay un número infinito de geodésicas que pasan por un punto común y que no intersectan a una otra geodésica dada. No obstante, se abstuvo de publicar sus resultados. Nikolay Lobachevsky (1792-1856) comenzó el estudio de geometrías no Euclidianas en 1829. En 1868, Eugenio Beltrami (1835-1900) probó que tal problema no era otra cosa sino el estudio de superficies de curvatura constante negativa, e introdujo el modelo analizado en el Exemplo 5 [2]. Felix Klein (1849-1925) reinterpretó este modelo en 1871, y popularizó su versión proyectiva, es decir, aquella dada por el disco D_a con la métrica (6). Klein introdujo el término hiperbólica, que hoy día es mucho más popular al referirse a este tipo de geometría. Dos años después de la muerte de Bernhard Riemann (1826-1866) en 1866, se publicó su famosa *clase inaugural* de 1854, conteniendo los fundamentos generales de la Geometría Riemanniana, y donde las superficies pasaron a ser un caso particular. Beltrami conoció de esto, y en 1868 terminó él mismo generalizando el ejemplo de la pseudo-esfera al caso de una dimensión mayor que dos [3].

Gauss estudió el concepto de geodésica para superficies en $\mathbb{R}^3$, y su comportamiento cuando la superficie en cuestión tiene curvatura de cierto signo. Demostró que si se usa la longitud de arco como el parámetro de la curva, el vector aceleración de una geodésica debe ser siempre perpendicular a la superficie. Este resultado había sido descubierto por Leonhard Euler (1707-1783) en 1744 [12]. Euler fué estudiante de Johann Bernoulli (1667-1748). Este último, junto con sus hijos, particularmente Daniel Bernoulli (1700-1782), había resuelto diversos problemas variacionales importantes en la primera mitad del siglo XVIII.

Gauss consideró la curvatura total de triángulos geodésicos, la integral de la curvatura sobre una tal región, y probó el Teorema 7 exactamente de la manera como lo hicimos aquí. Así, él descubrió que los triángulos esféricos tienen ángulos que suman a un valor mayor que π, así como también que los triángulos hiperbólicos hacen lo contrario y sus ángulos suman a un valor menor que π, pudiendo concluir entonces que la curvatura influencia la topología de la superficie, abriendo una nueva linea de investigación que aún continua con vigor hoy día.

El Teorema 7 fué extendido por Pierre O. Bonnet (1819-1892) en 1848 a regiones poligonales, donde las curvas que lo limitan no son necesariamente geodésicas. Esa extensión es el contenido esencial del Teorema $7'$. Bonnet publicó su resultado en un artículo bastante difícil de encontrar hoy [4], y no parece haberse percatado que la suma de las expresiones (34) sobre todos los triángulos de una triangulación de una superficie compacta orientable S producen el hecho que la curvatura total sobre S es igual a $4\pi(1-g)$, siendo g el género ó número de huecos de S. La primera demostración intrínseca de este resultado fué dada por S.S. Chern (1911-2004) en 1944 [9], resultado conocido hoy como el teorema de Chern-Gauss-Bonnet. Vale la pena mencionar la versión del teorema presentada por Allendoefer [1] y Fenchel [13] unos pocos años antes, una demostración dada tan solo bajo la suposición innecesaria de que S estaba inmersa isométricamente en un espacio Euclidiano de cierta dimensión. El teorema de Chern-Gauss-Bonnet es un caso particular del teorema del índice de Michael Atiyah (1929-) e Isadore Singer (1924-), un notable resultado demostrado en los años 60.

El Teorema 7 puede ser pensado también como un teorema de comparación. En esa área, el Teorema de comparación demostrado por Viktor A. Toponogov (1930-) en 1959 [21] es una herramienta fundamental. Este, y otras ideas de la geometría de comparación pueden encontrarse en el ahora clásico libro [8] de Jeff Cheeger (1943-) y David Ebin (1941-). Es de hacer notar que en los alrededores de 1855, Bonnet demostró [5] que si $K \geq k > 0$, entonces la distancia máxima entre puntos de S, ó diámetro, es acotada superiormente por $\pi/\sqrt{k}$. Este resultado es válido más generalmente para superficies completas, si bien Bonnet lo haya demostrado bajo hipótesis más restrictivas de lo necesario.

Muchas de las ideas discutidas aquí fueron desarrolladas antes de que la noción de variedad fuese definida de manera general, ó antes de que algunos conceptos topológicos tales como compacidad fuesen entendidos bien. No es entonces difícil creer que el resultado del Ejercicio 14, debido a David Hilbert [15] (1862-1943), fuese demostrado solamente en 1901. Este contribuyó a recalcar la necesidad de estudiar intrinsecamente los conceptos geométricos.

El último de los temas que hemos abordado contiene una proposición reciente fundamentada en una fórmula clásica. La derivada covariante $\nabla^{\tilde{g}}_X Y$ para campos vectoriales tangentes a una subvariedad se descompone como la suma de la derivada covariante intrínseca $\nabla^{g}_X Y$ y la segunda forma fundamental. El uso iterado de tal identidad nos lleva al descubrimiento de una relación entre las curvaturas escalares de la subvariedad y de la variedad ambiente en puntos de la primera, relación en la cual aparecen las curvaturas seccionales mixtas y normales, así como también los cuadrados de las normas del vector de curvatura media y de la segunda forma fundamental. La idea es minimizar la contribución a la curvatura escalar total de la subvariedad que proviene de los últimos dos de los términos mencionados para tratar de producir la forma canónica de la inmersión. Si bien tenemos ya notables ejemplos de puntos críticos del funcional resultante, queda aún mucho por hacer para desarrollar una teoría general sobre la existencia de sus puntos extremos.

La literatura existente para los temas aquí estudiados es bastante amplia. Como punto de partida. el lector puede referirse a [11], y analizar algunos de los artículos citados en su bibliografía. Esta publicación apareció en ocasión de la conmemoración de las 200 años del nacimiento de Gauss, e incluye una traducción al Inglés de su trabajo seminal [14], cuya lectura es aún hoy muy placentera. En lo que se refiere a la última parte, y a manera de establecer un contacto más fuerte con el tema, le recomendaríamos al lector el estudio de subvariedades minimales como un buen punto de partida, sin llegar a ser este el tema de objeto mismo. La literatura específica sobre el tema de variedades minimales es también amplia, con un influjo tremendo en los últimos años a pesar de su gran edad de más de 250 años. El lector podría tomar sus primeros pasos en el asunto con el precioso artículo de J. Simons [19], y profundizar en el tema a partir de él.

Bibliografía

[1] C.B. Allendoerfer, *The Euler number of a Riemann manifold*, Amer. J. Math. 62 (1940), pp. 243-248.

[2] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometría non-euclidea*, Gior. Mat. 6, pp. 248-312 (ver também Op. Mat. 1, pp. 374-405; Ann. École Norm. Sup., 6 (1869), pp. 251-288).

[3] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante*, Annali di Mat. Ser. II, 2 pp. 232-255 (ver também Op. Mat. 1, pp. 406-429; Ann. École Norm. Sup., 6 (1869), pp. 345-375).

[4] P.O. Bonnet, J. de l'Ecole Polytechnic, 19 (1848), p. 131.

[5] P.O. Bonnet, *Sur qualques propriétés des lignes géodésiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, 40 (1855), pp. 1311-1313.

[6] C. Bohr, B. Hanke & D. Kotschick, *Cycles, submanifolds, and structures on normal bundles*, Manuscripta Math. 108 (2002), pp. 483-494.

[7] E. Cartan, *Familles des surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Annali di Mat. 17 (1938), pp. 177-191.

[8] J. Cheeger & D.E. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holand Publishing Company, 1975.

[9] S.S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. Math., 45 (1944),, pp. 747-752.

[10] S.S. Chern, *On the curvatura integra in a Riemannian manifold*, Ann. Math., 46 (1945), pp. 674-684.

[11] P. Dombrowski, *150 years after Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas*, with the original text of Gauss, Astérisque 62, Société Mathématique de France, 1979.

[12] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne, 1744.

[13] W. Fenchel, *On total curvature of Riemannian manifolds I*, J. London Math. Soc. 15 (1940), pp. 15-22.

[14] C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Gottingensis, 1827.

[15] D. Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümung*, Trans. Amer. Math. Soc., 2 (1901), pp. 87-99.

[16] K. Nomizu, *Some results in E. Cartan's theory of isoparametric families of hypersurfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) (6), pp. 1184-1188.

[17] S.R. Simanca, *Geodésicas y Curvatura: una introducción elemental*, Misc. Math., 35 (2002), pp. 17-40.

[18] S.R. Simanca, *The L^2-norm of the second fundamental form of isometric immersions in Riemannian manifolds*, in preparation.

[19] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. Math. 2 (1968), pp. 62-105.

[20] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv. 28 (1954), pp. 17-86.

[21] V.A. Toponogov, *Riemann spaces with curvature bounded below*, Uspehi Mat. Nauk, 14 (1959), pp. 87-130.

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nuevo México, Alburquerque, NM 87131, EEUU

Dirección de correo electrónico: santiago@math.unm.edu