

# **Transformaciones de superficies y aplicaciones a EDPs**

**Keti Tenenblat**  
**Universidade de Brasília**

**Escuela de Análisis Geométrico**

**Granada, Junio 2009**

- **Interacción entre geometría diferencial y ecuaciones diferenciables. Estudios clásicos de Lie, Darboux, Goursat, Bianchi, Bäcklund, E. Cartan etc.**
- **Propiedades locales geométricas se expresan en términos de ecuaciones diferenciales.**
- **Importancia del estudio de transformaciones que preservan tales propiedades geométricas. Interpretación analítica.**

**La correspondencia entre clases de superficies y las ecuaciones diferenciables asociadas es útil en las dos direcciones.**

**Ejemplo. Superficies en  $R^3$  de curvatura Gaussiana constante negativa en y la ecuación de sine-Gordon.**

- **La transformación (geométrica) de Bäcklund  $\implies$  Método para obtener soluciones para la ecuación. En particular soluciones de tipo solitons.**
- **No existe solución de la ecuación de sine-Gordon definida en  $R^2$  cuya imagen está contenida en  $(0, 2\pi) \implies$  Teorema de Hilbert i.e. no existe superficie completa en  $R^3$  con curvatura Gaussiana constante negativa.**

**Transformaciones de Bäcklund**  
**entre superficies de**  
**curvatura Gaussiana constante**

$\Leftrightarrow$

**relacionan soluciones de**

$$\phi_{u_1 u_1} - \phi_{u_2 u_2} = \begin{cases} \sin \phi \\ 0 \end{cases}$$
$$\Delta \phi = \begin{cases} \sinh \phi \\ 0 \end{cases}$$

**Transformaciones de Laplace**  
**para superficies parametrizadas**  
**por curvas conjugadas**

$\Leftrightarrow$

**soluciones para**

$$y_{u_1 u_2} + ay_{u_1} + by_{u_2} + cy = 0$$

**Transformaciones de Ribaucour**  
**entre superficies mínimas**

$\Leftrightarrow$

**relacionan soluciones de**

$$\Delta \phi = e^{-\phi}$$

**entre sup. LW elípticas**

$$\Delta \phi = \begin{cases} \sinh(\phi + c) \\ \cosh(\phi + c) \\ e^{\pm \phi} \\ 0 \end{cases}$$

**entre superficies LW hiperbólicas**

$$\phi_{u_1 u_1} - \phi_{u_2 u_2} = \begin{cases} \sin(\phi + c) \\ 0 \end{cases}$$

## Superficies Linear Weingarten

$$\overline{M}^3(\overline{K}) = (R^3, S^3, H^3)$$

Una superficie  $M^2 \subset \overline{M}^3(\overline{K})$  es una **superficie linear Weingarten** si su curvatura media  $H$  y curvatura Gaussiana  $K$  satisfacen

$$\alpha + 2\beta H + \gamma(K - \overline{K}) = 0.$$

donde  $\beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$  y  $K - \overline{K} \neq 0$ .

### Casos particulares:

Superficie **Mínima**  $H = 0$ :  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta \neq 0$ .

Superficie **curvatura media constante H-cmc**  $H \neq 0$ :  $\alpha \neq 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\beta \neq 0$ .

**Curvatura Gaussiana Constante**:  $\gamma \neq 0$ ,  $\beta = 0$ .

# Equaciones diferenciales asociadas a superficies linear Weingarten

$\gamma \neq 0$  i.e.  $H \neq \text{constante}$

**Teorema A**  $M \subset \overline{M}(\overline{K})$  es una superficie linear Weingarten, sin puntos umbílicos, tal que

$$\alpha + 2\beta H + \gamma(K - \overline{K}) = 0$$



$\exists$  coordenadas locales  $u_1, u_2$ , una función  $\phi(u_1, u_2)$  y  $c \in R$  tal que

a) Si  $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$

$$\phi_{u_1 u_1} - \phi_{u_2 u_2} = \begin{cases} \sin(c + \phi) & \text{eq. de sine-Gordon} \\ 0 & \text{eq. de la onda} \end{cases}$$

b) Si  $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$

$$\Delta\phi = \begin{cases} \sinh(c \pm \phi) & \text{eq. ellipt. sinh-Gordon} \\ \pm \cosh(c \pm \phi) & \text{eq. ellipt. cosh-Gordon} \\ \pm e^{\pm\phi} & \text{eq. de Liouville} \\ 0 & \text{eq. de Laplace} \end{cases}$$

## Ecuaciones de estructura para $M^2 \subset \bar{M}^3(\bar{K})$

Consideremos un triedro móvil  $e_1, e_2, e_3$  en  $\bar{M}$  con  $e_1, e_2$  tangentes a  $M$ .

Para  $1 \leq I, J \leq 3$  sean  $w_I$  las formas duales y  $w_{IJ}$  las formas de conexión definidas por

$$de_I = \sum_{J=1}^3 w_{IJ} e_J.$$

Las ecuaciones de estructura en  $\bar{M}$  son dadas por

$$dw_I = \sum_{J=1}^3 w_J \wedge w_{JI}, \quad w_{IJ} + w_{JI} = 0,$$

$$dw_{IJ} = \sum_{L=1}^3 w_{IL} \wedge w_{LJ} + \bar{\Omega}_{IJ},$$

donde

$$\bar{\Omega}_{IJ} = -\bar{K} w_I \wedge w_J.$$

Si restringimos estas formas a  $M$  tenemos  $w_3 = 0$  y

$$\sum_{i=1}^2 w_i \wedge w_{i3} = 0, \quad dw_i = \sum_{j=1}^2 w_j \wedge w_{ji}, \quad 1 \leq i \leq 2$$

Por el Lema de Cartan

$$w_{i3} = \sum_{j=1}^2 b_{ij} w_j \quad \text{donde} \quad b_{ij} = b_{ji}.$$

Las ecuaciones de Gauss y Codazzi son

$$\begin{aligned} dw_{12} &= w_{13} \wedge w_{32} - \bar{K} w_1 \wedge w_2, \\ dw_{i3} &= \sum_{j=1}^2 w_{ij} \wedge w_{j3}, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

Como  $dw_{12}$  es una 2-forma, definimos la curvatura Gaussiana  $K$  de  $M$ , por

$$dw_{12} = -K w_1 \wedge w_2.$$

La curvatura media  $H$  de  $M$  es definida por

$$H = -\frac{1}{2} \text{tr} \, de_3 = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}).$$

Por tanto,

$$w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 = 2H w_1 \wedge w_2,$$

$$K - \bar{K} = (b_{11} b_{22} - b_{12}^2).$$



**Tenemos**  $de_3 = -\sum_{ij} b_{ij} w_j e_i$  **y**

$$(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \geq 0, \quad \text{i.e.} \quad H^2 - (K - \bar{K}) \geq 0.$$

**La matriz asociada a  $de_3$  tiene autovalores distintos**

**i.e.  $M$  no tiene puntos umbílicos cuando**

$$H^2 - (K - \bar{K}) > 0.$$

**En este caso, podemos tomar  $e_1, e_2$  como autovectores y  $w_{i3} = h_i w_i$ .**

$h_i$  son las **curvaturas principales** de  $M$

$e_1, e_2$  son las **direcciones principales**.

**La primera forma fundamental en  $p \in M$**

$$I_p(V) = \langle V, V \rangle \quad , \quad V \in T_pM,$$

**La segunda forma fundamental**

$$II_p(V) = -\langle V, de_3(V) \rangle \quad , \quad V \in T_pM.$$

**Si  $X(u_1, u_2)$  es una parametrización de  $M$  por líneas de curvatura, tenemos**

$$X_{u_i} = g_i e_i, \quad i = 1, 2$$

$$I = g_1^2 du_1^2 + g_2^2 du_2^2$$

$$II = h_1 g_1^2 du_1^2 + h_2 g_2^2 du_2^2$$

**Proposición** Sea  $M \subset \bar{M}(\bar{K})$  una superficie sin puntos umbílicos y  $X(u_1, u_2)$  una parametrización por líneas de curvatura

⇓

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_2}(\log g_1) &= \frac{1}{h_2 - h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1}(\log g_2) &= \frac{1}{h_1 - h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \end{aligned}$$

## Demonstración del Teorema A

**Tenemos**  $\alpha + \beta(h_1 + h_2) + \gamma h_1 h_2 = 0$

**Portanto**

$$h_2 = -\frac{\alpha + \beta h_1}{\beta + \gamma h_1} \quad h_1 = -\frac{\alpha + \beta h_2}{\beta + \gamma h_2}$$

**Definimos**

$$T_i = \alpha + 2\beta h_i + \gamma h_i^2 \quad i = 1, 2$$

⇓

$$T_1 T_2 = (\alpha\gamma - \beta^2)(h_2 - h_1)^2 \quad T_1 + T_2 = \gamma(h_2 - h_1)^2$$

$$h_2 - h_1 = -\frac{T_1}{\beta + \gamma h_1} = \frac{T_2}{\beta + \gamma h_2}$$

**De la Proposición anterior**

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(\log g_1) = \frac{1}{h_2 - h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} = -\frac{1}{2T_1} \frac{\partial T_1}{\partial u_2}$$
$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\log g_2) = \frac{1}{h_1 - h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} = -\frac{1}{2T_2} \frac{\partial T_2}{\partial u_1}$$

**Concluimos que**

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(\log(g_1^2 T_1)) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial u_1}(\log(g_2^2 T_2)) = 0$$

**Podemos cambiar las variables  $u_1$  y  $u_2$  separadamente tal que**

$$g_1^2 T_1 = |\alpha\gamma - \beta^2| \quad g_2^2 T_2 = \varepsilon |\alpha\gamma - \beta^2| \quad \varepsilon = \mathbf{sign} (\alpha\gamma - \beta^2)$$

⇓

$$g_1^2 + \varepsilon g_2^2 = \varepsilon\gamma$$

**La ecuación de Gauss se reduce a**

$$\left( \frac{(g_2)_{u_1}}{g_1} \right)_{u_1} + \left( \frac{(g_1)_{u_2}}{g_2} \right)_{u_2} = A(g_1^2 - \varepsilon g_2^2) + Bg_1g_2$$

**onde**

$$A = \varepsilon_2 \beta \sqrt{|\alpha\gamma - \beta^2|} / \gamma^2 \quad B = -\bar{K} + (\alpha\gamma - 2\beta^2) / \gamma^2$$

**Usamos**

$$h_1 = \frac{1}{\gamma} \left( \beta + \varepsilon_1 \sqrt{|\alpha\gamma - \beta^2|} \frac{g_2}{g_1} \right) \quad h_2 = \frac{1}{\gamma} \left( \beta + \varepsilon_2 \sqrt{|\alpha\gamma - \beta^2|} \frac{g_1}{g_2} \right)$$

$$\varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2 \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\varepsilon$$

## Reciproca

Las superficies **linear Weingarten** son determinadas por la primera forma **fundamental** que satisface ecuaciones diferenciales.

Definimos  $h_1$  y  $h_2$  en termos de la métrica  $g_1$  y  $g_2$  verificamos que satisfacen las ecuaciones de Gauss y Codazzi.

**Definimos**

$$L = \gamma^2(4\varepsilon A^2 + B^2)$$

**Si  $\varepsilon = 1$  como  $g_1^1 + g_2^2 = \gamma$**

$$g_1 = \sqrt{\gamma} \cos \frac{\phi}{2} \quad g_2 = \sqrt{\gamma} \sin \frac{\phi}{2}$$

**la ecuación diferencial se reduce a**

$$\phi_{u_1 u_1} - \phi_{u_2 u_2} = \sqrt{L} \sin(c + \phi)$$

**onde  $c$  es determinada por  $A, B, L, \gamma$ .**



**Si  $\varepsilon = -1$  como  $g_1^1 - g_2^2 = -\gamma$**

$$g_1 = \begin{cases} \sqrt{|\gamma|} \cosh \frac{\phi}{2} & \text{si } \gamma < 0 \\ \sqrt{\gamma} \sinh \frac{\phi}{2} & \text{si } \gamma > 0 \end{cases} \quad g_2 = \begin{cases} \sqrt{|\gamma|} \sinh \frac{\phi}{2} & \text{si } \gamma < 0 \\ \sqrt{\gamma} \cosh \frac{\phi}{2} & \text{si } \gamma > 0 \end{cases}$$

**la ecuación diferencial se reduce a**

$$\Delta\phi = \begin{cases} \sqrt{L} \sinh(c \pm \phi) & \text{si } L > 0 \\ \pm \sqrt{|L|} \cosh(c \pm \phi) & \text{si } L < 0 \\ 2A|\gamma|e^{\pm\phi} & \text{si } L = 0 \end{cases}$$

**onde  $c$  es determinada por  $A, B, L, \gamma$ .**

## Ecuaciones diferenciales asociadas a superficies con curvatura Gaussiana constante

**Corolario**  $M \subset \overline{M}(\overline{K})$  es una superficie de curvatura Gaussiana constante  $K$ , sin puntos umbílicos, con  $K \neq \overline{K}$



$\exists$  coordenadas locales  $u_1, u_2$  y una función  $\phi(u_1, u_2)$  tal que

a) Si  $K < \overline{K}$

$$\phi_{u_1 u_1} - \phi_{u_2 u_2} = -K \sin \phi.$$

b) Si  $K > \overline{K}$

$$\Delta \phi = -K \sinh \phi.$$

# Ecuaciones diferenciales asociadas a superficies de curvatura media constante

(i.e. superficies linear Weingarten con  $\gamma = 0$ )

**Teorema B**  $M \subset \overline{M}(\overline{K})$  es una superficie de curvatura media constante  $H$ , sin puntos umbílicos,



$\exists$  coordenadas  $u_1, u_2$ , una función  $\phi(u_1, u_2)$  y  $C \neq 0 \in \mathbb{R}$  tal que

a) Si  $H \neq 0$

$$\Delta\phi = H^2 e^{-2\phi} - (H^2 + \overline{K}) e^{2\phi}$$

b) Si  $H = 0$

$$\Delta\phi = C^2 e^{-2\phi} - \overline{K} e^{2\phi}$$

## Demonstración del Teorema B

**Similar al Teorema A. Definimos**

$$T_i = -2(H - h_i) \quad i = 1, 2$$

**Tenemos**

$$T_1 + T_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_2}(\log(g_1^2 T_1)) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial u_1}(\log(g_2^2 T_2)) = 0$$

**Cambiamos las variables  $u_1$  y  $u_2$  separadamente tal que**

$$g_1^2 T_1 = 2C \quad g_2^2 T_2 = -2C \quad C > 0$$

**Podemos considerar**

$$g_1^2 = g_2^2 = \exp(2\phi)$$

**Concluimos de la ecuación de Gauss que**

$$\Delta\phi = C^2 e^{-2\phi} - (\bar{K} + H^2)e^{2\phi}$$

**donde usamos**

$$h_1 = Ce^{-2\phi} + H \quad h_2 = -Ce^{-2\phi} + H$$

**Observación:** Si  $H \neq 0$  podemos tomar  $C = |H|$

**Recíproca:** Definimos  $h_i$  a partir de la métrica i.e. de la  $\phi$  que satisface la ecuación diferencial.

## Ejemplos

**Superficie de Enneper parametrizada por**

$$X = \left( u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2, u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_2 u_1^2, u_1^2 - u_2^2 \right)$$

**es una superficie mínima.**

$$I = e^{2\phi} (du_1^2 + du_2^2) \quad \text{donde} \quad e^\phi = 1 + u_1^2 + u_2^2$$

**y  $\phi$  es una solución de  $\Delta\phi = 4e^{-2\phi}$ .**

La **seudoesfera** parametrizada por

$$X = (\mathbf{sech} u_1 \cos u_2, \mathbf{sech} u_1 \sin u_2, \tanh u_1 - u_1)$$

es una superficie de curvatura Gaussiana constante  $K = -1$ .

$$I = \cos \frac{\phi}{2} du_1^2 + \sin \frac{\phi}{2} du_2^2$$

donde  $\cos \frac{\phi}{2} = \tanh u_1$ ,  $\sin \frac{\phi}{2} = \mathbf{sech} u_1$  y  $\phi$  es una solución de

$$\phi_{u_1 u_1} - \phi_{u_2 u_2} = \sin \phi.$$

**La superficie de Delaunay** tiene  $H = 1$  y en coordenadas isotermas es descrita por

$$X = \frac{2}{m} (a(u_1), e^\phi \cos mu_2/2, e^\phi \sin mu_2/2) \quad u_1 > 0$$

donde  $\phi(u_1)$  es una solución de

$$\phi'' = -2 \sinh 2\phi$$

con  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(0) = m/2$  y  $a(u_1) = \int_0^{u_1} (e^{2\phi(t)} - 1) dt$ .

**El Toro de Clifford** en  $S^3 \subset R^4$  es parametrizado por

$$X(u_1, u_2) = (c_1 \cos u_1, c_1 \sin u_1, c_2 \cos u_2, c_2 \sin u_2)$$

donde  $c_i \neq 0$ , y  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ . Tiene curvatura  $K = 0$

$$I = c_1^2 du_1^2 + c_2^2 du_2^2$$

Es asociada a una solución constante de la ecuación de la onda.



## Congruencias geodésicas

Una **congruencia geodésica** en  $\overline{M}^3(\overline{K})$  es una familia a 2-parametros de geodésicas en  $\overline{M}$ .

**Localmente, una congruencia geodésica es dada por**

$$\begin{aligned} X(u_1, u_2) + \lambda \xi(u_1, u_2) & \quad \text{si } \overline{M} = R^3 \\ \cos \lambda X(u_1, u_2) + \sin \lambda \xi(u_1, u_2) & \quad \text{si } \overline{M} = S^3 \subset R^4 \\ \cosh \lambda X(u_1, u_2) + \sinh \lambda \xi(u_1, u_2) & \quad \text{si } \overline{M}^3 = H^3 \subset L^4 \end{aligned}$$

**donde**  $X : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$  **es una superficie parametrizada en**  $\overline{M}^3$ , **y**

$\xi(u_1, u_2)$  **es un vector unitario tangente a**  $\overline{M}$  **en**  $X(u_1, u_2)$  **y**  $\lambda \in I \subset R$ .

La congruencia es **normal** a  $M$ , si  $\xi(p)$  es normal a  $M$  en  $p$ ,  $\forall p \in M$

La congruencia es **tangente** a  $M$  si  $\xi(p)$  es tangente a  $M$  en  $p$ ,  $\forall p \in M$ .

Sean  $M$  y  $M'$  dos superficies en  $\overline{M}^3$  y  $\ell : M \rightarrow M'$  un difeomorfismo, tal que para cada  $p \in M$  y  $p' = \ell(p)$  existe una sola geodésica  $\gamma$  en  $\overline{M}$  uniendo  $p$  a  $p'$ .

Una tal congruencia es una **congruencia geodésica entre  $M$  y  $M'$** .

## Ejemplo: superficies paralelas

Sea  $M \subset \overline{M}^3(\overline{K})$  orientable y  $e_3$  un campo unitario normal en  $M$ .

Una superficie  $M' \subset \overline{M}$  es **paralela** a  $M$ , si existe una congruencia geodésica normal entre  $M$  y  $M'$  tal que la distancia entre puntos correspondientes es constante, i.e para cada  $p \in M$

$$p' = \begin{cases} p + ae_3 & \text{si } \overline{M} = R^3 \\ \cos a p + \sin a e_3 & \text{si } \overline{M} = S^3 \\ \cosh a p + \sinh a e_3 & \text{si } \overline{M} = H^3 \subset L^4, \end{cases}$$

donde  $a \neq 0$  es una constante real.  $M$  y  $M'$  son **superficies paralelas a una distancia**  $a$ .

**Dada una superficie  $M \subset \bar{M}^3(\bar{K})$ , para que valores de  $a$  y  $p'$ , define una superficie paralela?**

**Si  $\forall p \in M$ ,**

$$\begin{array}{ll} 1 - 2aH + a^2K \neq 0 & \text{si } \bar{M} = R^3, \\ \cos 2a - \text{sen} 2aH + \text{sen}^2 aK \neq 0 & \text{si } \bar{M} = S^3, \\ \cosh 2a - \text{senh} 2aH + \text{senh}^2 aK \neq 0 & \text{si } \bar{M} = H^3, \end{array}$$

**entonces  $p'$  define una superficie  $M'$  en  $\bar{M}$  paralela a  $M$ .**

**Proposición.** Sea  $M$  una superficie regular orientable en  $\bar{M}^3(\bar{K})$  y  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} 1 - 2aH + a^2K &\neq 0 && \text{si } \bar{K} = 0, \\ \cos 2a - \sin 2aH + \sin^2 aK &\neq 0 && \text{si } \bar{K} = 1, \\ \cosh 2a - \sinh 2aH + \sinh^2 aK &\neq 0 && \text{si } \bar{K} = -1. \end{aligned}$$

Entonces la curvatura media  $H'$  de una superficie  $M'$ , paralela a  $M$  a una distancia  $a$  es

$$H' = \begin{cases} \frac{H - aK}{1 - 2aH + a^2K} & \text{si } \bar{K} = 0, \\ \frac{\sin 2a + \cos 2aH - \sin a \cos aK}{\cos 2a - \sin 2aH + \sin^2 aK} & \text{si } \bar{K} = 1, \\ \frac{-\sinh 2a + \cosh 2aH - \sinh a \cosh aK}{\cosh 2a - \sinh 2aH + \sinh^2 aK} & \text{si } \bar{K} = -1, \end{cases}$$

y la curvatura Gaussiana  $K'$  de una superficie  $M'$ , paralela a  $M$  a una distancia  $a$  es

$$K' = \begin{cases} \frac{K}{1 - 2aH + a^2K} & \text{si } \bar{K} = 0, \\ \frac{K}{\cos 2a - \text{sen}2aH + \text{sen}^2aK} & \text{si } \bar{K} = 1, \\ \frac{K}{\cosh 2a - \sinh 2aH + \sinh^2 aK} & \text{si } \bar{K} = -1. \end{cases}$$

## Superficies paralelas y Teorema de Bonnet

**Corolario.** Sea  $M^2 \subset \overline{M}^3(\overline{K})$  orientable sin puntos umbílicos, tal que  $K(p) \neq 0$ ,  $\forall p \in M$ .

Si  $H = c > 0$  ( $c > 1$  si  $\overline{K} = -1$ )



existen dos superficies  $M'$  y  $M''$  paralelas a  $M$  tal que

$$K' = 2 \left( c^2 + \overline{K} + c\sqrt{c^2 + \overline{K}} \right) \quad H'' = -c$$

Recíprocamente, si  $M$  tiene  $K$  constante positiva, ( $K > 2$  si  $\overline{K} = 1$ ),



existen dos superficies  $M'$  y  $M''$  paralelas a  $M$  tal que

$$H' = c, \quad H'' = -c \quad \text{donde} \quad c = |K - 2\overline{K}| / (2\sqrt{K - \overline{K}}).$$

**En  $R^3$  la paralela a una distancia**

**$a = \frac{1}{2c}$  tiene curvatura Gaussiana constante**

**$a = \frac{1}{c}$  tiene curvatura media  $-c$**

**Ejemplo.**

**La superficie de Delaunay**

$$X(u_1, u_2) = \frac{2}{m} (a(u_1), e^\phi \cos mu_2/2, e^\phi \sin mu_2/2) \quad u_1 > 0$$

**donde  $\phi(u_1)$  es una solución de  $\phi'' = -2 \sinh 2\phi$  con  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(0) = m/2$**

**y  $a(u_1) = \int_0^{u_1} (e^{2\phi(t)} - 1) dt$  tiene  $H = 1$ .**

- $X'$  paralela a  $X$  a una distancia igual a  $1/2$ , tiene curvatura  $K' = 4$**
- $X''$  paralela a  $X$  a una distancia igual a  $1$  tiene  $H'' = -1$ .**



**Corolario.** Sean  $M$  y  $M'$  superficies paralelas en  $\overline{M}^3(\overline{K})$ .

$M$  es una superficie linear Weingarten  $\Leftrightarrow M'$  es linear Weingarten.

**En particular:**  $M$  tiene  $K = 0 \Leftrightarrow M'$  tiene  $K' = 0$ .

**Por ejemplo:** En  $R^3$  si

$$\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$$

la paralela a una distancia  $a$  satisface

$$\alpha + 2(\beta + \alpha a)H' + (\gamma + 2\beta a + \alpha a^2)K' = 0$$

**Corolario.** Sea  $M \subset \overline{M}^3(\overline{K})$  una superficie linear Weingarten que satisface

$$\alpha + 2\beta H + \gamma(K - \overline{K}) = 0 \quad \text{con} \quad \gamma\beta \neq 0.$$

**(i)** Si  $\alpha - \gamma\overline{K} = 0$ , y tambien  $|\gamma| < |\beta|$  si  $\overline{K} = 1$ ,  $\Rightarrow$  dado un punto genérico  $p_0 \in M$  existe abierto que contiene  $p_0$  que es paralela a una superficie mínima.

**(ii)** Si  $\alpha - \gamma\overline{K} \neq 0$ , y tambien  $|2\beta| < |\alpha + \gamma|$  si  $\overline{K} = -1$ ,  $\Rightarrow$  dado un punto genérico  $p_0 \in M$  existe abierto que contiene  $p_0$  que es paralela a una superficie de curvatura Gaussiana constante.

**i) Si  $\alpha - \gamma\bar{K} = 0$ , tomamos la paralela a una distancia  $a$**

$$a = -\gamma/(2\beta) \quad \text{si } \bar{K} = 0$$

$$\sin 2a = -\gamma/\beta \quad \text{si } \bar{K} = 1$$

$$\sinh 2a = -\gamma/\beta \quad \text{si } \bar{K} = -1$$

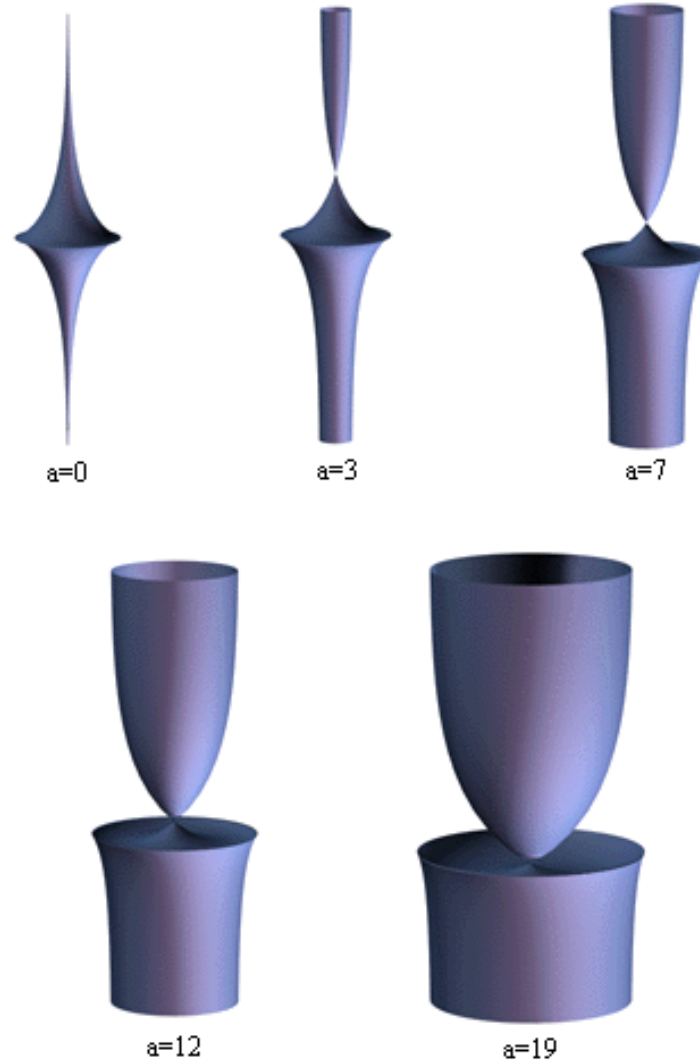
**ii) Si  $\alpha - \gamma\bar{K} \neq 0$ , tomamos la paralela a una distancia  $a$**

$$a = -\beta/\alpha \quad \text{si } \bar{K} = 0$$

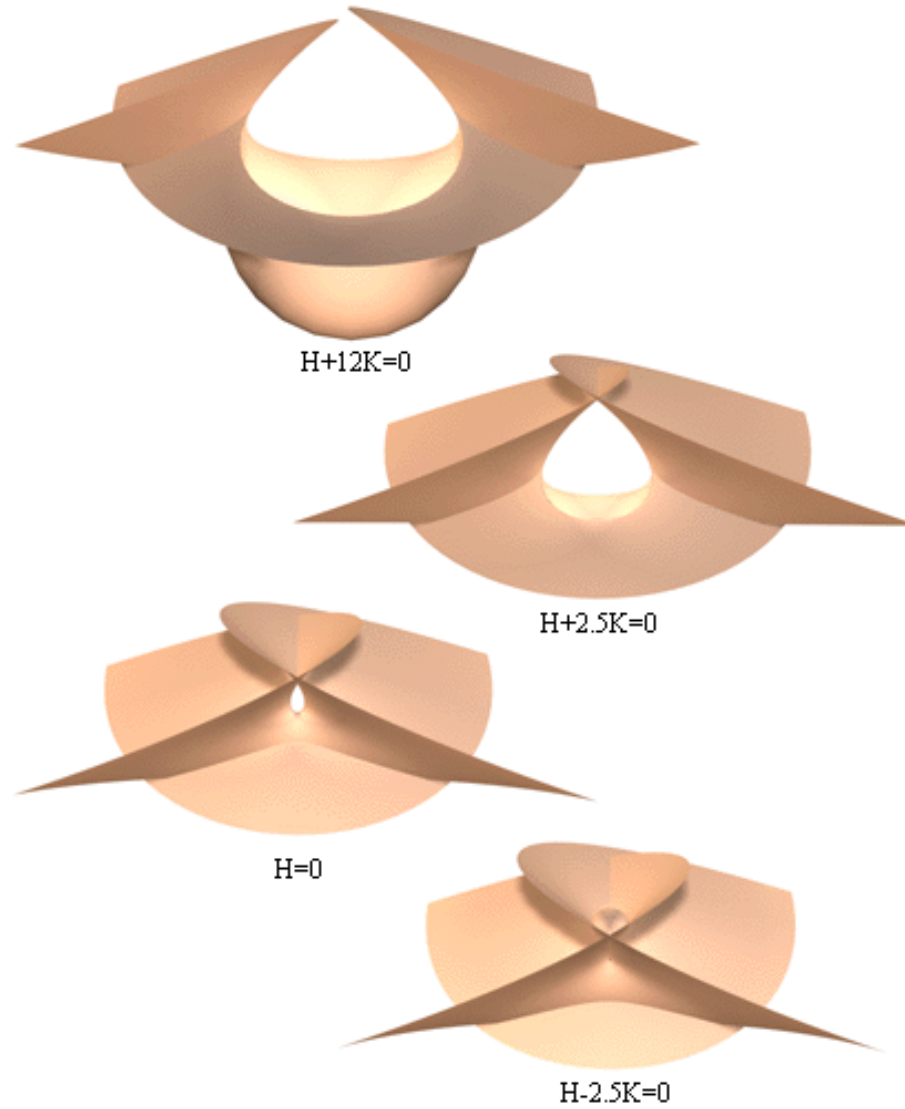
$$\tan 2a = 2\beta/(\alpha - \gamma) \quad \text{si } \bar{K} = 1$$

$$\tanh 2a = 2\beta/(\alpha + \gamma) \quad \text{si } \bar{K} = -1$$

**Ejemplos a) Familia de superficies linear Weingarten paralelas a la pseudoesfera a una distancia  $a$ . Cada superficie satisface  $1 + 2aH + (1 + a^2)K = 0$ .**



**b) Familia de superficies linear Weingarten paralellas a la superficie de Enneper a una distancia  $a$ . Cada superficie satisface  $H - aK = 0$ .**



**c) Si consideramos el toro de Clifford**

$$X(u_1, u_2) = (c_1 \cos u_1, c_1 \sin u_1, c_2 \cos u_2, c_2 \sin u_2) \quad c_1, c_2 \neq 0, \quad c_1^2 + c_2^2 = 1$$

**Una superficie  $X'$  paralela a  $X$  en  $S^3$  a una distancia  $a$  es también un toro de Clifford, con constantes**

$$c'_1 = c_1 \cos a + c_2 \sin a \quad \mathbf{y} \quad c'_2 = c_2 \cos a - c_1 \sin a.$$

**Detalles y resultados en espacios seudoriemannianos:**

**Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations.**

**K.T. Addison Wesley 1998**

# **Transformaciones de superficies y aplicaciones a EDPs - II**

**Keti Tenenblat**  
**Universidade de Brasília**

**Escuela de Análisis Geométrico**

**Granada, Junio 2009**



## Congruencia geodésica pseudoesférica

Sea  $\ell : M \rightarrow M'$  un difeomorfismo entre superficies de  $\overline{M}^3(\overline{K})$  tal que  $\forall p \in M$ ,  
y  $p' = \ell(p) \neq p$ :

- 1)  $\exists$  una única geodésica en  $\overline{M}$  de  $p$  a  $p'$  tangente a  $M$  en  $p$  y tangente a  $M'$  en  $p'$ ;
- 2) la distancia entre  $p$  y  $p'$  en  $\overline{M}$  es una constante  $r$ , independiente de  $p$ ;
- 3) el ángulo entre las normales  $N_p$  y  $N_{p'}$  es una constante  $\theta$ , independiente de  $p$ ;

$\ell$  se llama una **congruencia geodésica pseudoesférica**.

**Teorema de Bäcklund** Sean  $M$  y  $M'$  superficies de  $\overline{M}^3(\overline{K})$ .

$\ell : M \rightarrow M'$  una congruencia geodésica pseudoesférica tal que:

- la distancia de  $p$  a  $p'$  es una constante  $r > 0$ ;
- el ángulo entre las normales  $N_p$  y  $N_{p'}$  es una constante  $\theta, 0 < \theta < \pi$ .

⇓

$M$  y  $M'$  tienen curvatura Gaussiana constante  $K$ ,

$$K = \begin{cases} -\frac{\sin^2 \theta}{r^2} & \text{if } \overline{K} \equiv 0, \\ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 r} & \text{if } \overline{K} \equiv 1, \\ -1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sinh^2 r} & \text{if } \overline{K} \equiv -1. \end{cases} \quad (1)$$

**Teorema de Integrabilidad.** Sea  $M^2(K) \subset \overline{M}^3(\overline{K})$  con curvatura Gaussiana constante  $K < \overline{K}$ . Podemos considerar  $K$  como en (1) con  $r > 0$  ( $r < \pi$  si  $\overline{K} = 1$ ) y  $0 < \theta < \pi$  son constantes.

Sean  $p_0 \in M$  y  $v_0 \in T_{p_0}M$  unitario, que no sea dirección principal,



$\exists$  una superficie  $M' \subset \overline{M}$  y una congruencia geodésica pseudoesférica  $\ell$  definida entorno de  $p_0$  para  $M'$ , tal que

- a) la geodésica de  $p_0$  a  $p'_0 = \ell(p_0)$  es tangente a  $v_0$  en  $p_0$ ;
- b) la distancia en  $\overline{M}$  entre  $p_0$  y  $p'_0$  es  $r$ ;
- c)  $\theta$  es el ángulo entre las normales en  $p_0$  y  $p'_0$ .

## Observación

- Una congruencia geodésica pseudoesférica preserva líneas de curvatura y líneas asintóticas.
- El Teorema de Integrabilidad: Método para obtener de una dada superficie de curvatura constante  $M(K) \subset \overline{M}^3(\overline{K})$  con  $K < \overline{K}$ , una familia a 2 parámetros de tales superficies, integrando la **transformación de Bäcklund**.
- Los parámetros son:  $\theta$  y lo que corresponde a escoger un vector unitario  $v$  ( $r$  es determinado por  $K$  y  $\theta$  por (1)).

## Transformación de Bäcklund

Si  $M(K) \subset \overline{M}^3(\overline{K})$  con  $K < \overline{K}$  es parametrizada por  $X(x_1, x_2)$  por líneas de curvatura

$$\tilde{e}_1 = \frac{X_{x_1}}{\cos \frac{\psi}{2}} \quad \tilde{e}_2 = \frac{X_{x_2}}{\sin \frac{\psi}{2}}$$

son las direcciones principales de  $M$  e  $\psi$  satisface la ecuación

$$\psi_{x_1 x_1} - \psi_{x_2 x_2} = \sin \psi,$$

Las 1-formas asociadas al triedro  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, e_3$  son:

$$\tilde{w}_1 = \cos \frac{\psi}{2} dx_1 \quad \tilde{w}_2 = \sin \frac{\psi}{2} dx_2$$

$$\tilde{w}_{12} = \frac{\psi_{x_2}}{2} dx_1 + \frac{\psi_{x_1}}{2} dx_2.$$

y

$$\tilde{w}_{13} = \sqrt{|K - \overline{K}|} \sin \frac{\psi}{2} dx_1 \quad \tilde{w}_{23} = \sqrt{|K - \overline{K}|} \cos \frac{\psi}{2} dx_2.$$

**Sean  $r$  y  $\theta$  constantes que satisfacen (1)**

**Fijamos un vector  $v^0(x_1^0, x_2^0)$  tangente a  $M$  en  $X(x_1^0, x_2^0)$ , que no sea dirección principal.**

**El Teorema de Integrabilidad**

$\Downarrow$

**existe triedro móvil  $e_1, e_2, e_3$  adaptado a  $M$ , tal que  $e_1(x_1^0, x_2^0) = v^0$  y las 1-formas  $w_1, w_2, w_{12}$  satisfacen**

$$w_{12} = \begin{cases} -\frac{1}{r}w_2 + \cot \theta w_{13} & \text{si } \bar{K} = 0, \\ -\cot r w_2 + \cot \theta w_{13} & \text{si } \bar{K} = 1, \\ \coth r w_2 + \cot \theta w_{13} & \text{si } \bar{K} = -1 \end{cases} \quad (2)$$

**Para determinar  $e_1$ , queremos  $\psi'$  tal que**

$$e_1 = \cos \frac{\psi'}{2} \tilde{e}_1 + \sin \frac{\psi'}{2} \tilde{e}_2$$
$$e_2 = -\sin \frac{\psi'}{2} \tilde{e}_1 + \cos \frac{\psi'}{2} \tilde{e}_2.$$

**y las formas asociadas**

$$w_1 = \cos \frac{\psi'}{2} \tilde{w}_1 + \sin \frac{\psi'}{2} \tilde{w}_2,$$
$$w_2 = -\sin \frac{\psi'}{2} \tilde{w}_1 + \cos \frac{\psi'}{2} \tilde{w}_2,$$
$$w_{12} = d\frac{\psi'}{2} + \tilde{w}_{12},$$

**satisfacen (2).**

**i.e  $\psi'$  debe satisfacer**

$$\begin{aligned}\psi'_{x_1} + \psi_{x_2} &= 2 \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\psi}{2} \ell(r) + 2 \cot \theta \cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cot \theta \sqrt{|K - \bar{K}|}, \\ \psi'_{x_2} + \psi_{x_1} &= -2 \cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\psi}{2} \ell(r) - 2 \cot \theta \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cot \theta \sqrt{|K - \bar{K}|},\end{aligned}$$

**donde**

$$\ell(r) = \begin{cases} 1/r & \text{if } \bar{K} = 0, \\ \cotan r & \text{if } \bar{K} = 1, \\ -\cotanh r & \text{if } \bar{K} = -1. \end{cases}$$

**Usando (1), y normalizando  $|K - \bar{K}| = 1$ , este sistema se reduce a**

$$\begin{aligned}\psi'_{x_1} + \psi_{x_2} &= 2 \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\psi}{2} L(\theta) + 2 \cot \theta \cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \psi'_{x_2} + \psi_{x_1} &= -2 \cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\psi}{2} L(\theta) - 2 \cot \theta \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\psi}{2}\end{aligned} \tag{3}$$

**donde**

$$L(\theta) = \begin{cases} \csc \theta & \text{if } \bar{K} = 0, \\ \cotan \theta & \text{if } \bar{K} = 1, \\ -\sqrt{1 + \csc^2 \theta} & \text{if } \bar{K} = -1. \end{cases}$$

**El sistema (3) se llama **transformación de Bäcklund** denotada por  $BT(\theta)$ .**



**Concluimos del Teorema de Integrabilidad que**

$$X' = \begin{cases} X + r \left( \frac{\cos \frac{\psi'}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}} X_{x_1} + \frac{\sin \frac{\psi'}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} X_{x_2} \right) & \text{if } \bar{K} = 0, \\ \cos r X + \sin r \left( \frac{\cos \frac{\psi'}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}} X_{x_1} + \frac{\sin \frac{\psi'}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} X_{x_2} \right) & \text{if } \bar{K} = 1, \\ \cosh r X - \sinh r \left( \frac{\cos \frac{\psi'}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}} X_{x_1} + \frac{\sin \frac{\psi'}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} X_{x_2} \right) & \text{if } \bar{K} = -1. \end{cases}$$

**es una nueva superficie de curvatura constante  $K$  en  $\bar{M}^3(\bar{K})$ .**

**La superficie  $X'$  es **asociada a**  $X$  por la transformación de Bäcklund.**

**Ejemplo. Considere la pseudoesfera en  $R^3$**

$$X(x_1, x_2) = (\text{sech } x_1 \cos x_2, \text{sech } x_1 \sin x_2, \tanh x_1 - x_1).$$

**Vimos que asociamos a  $X$  una función  $\psi$  definida por**

$$\cos \frac{\psi}{2} = \tanh x_1 \quad \sin \frac{\psi}{2} = \text{sech } x_1 \quad \text{que es solución de} \quad \psi_{x_1, x_1} - \psi_{x_2, x_2} = \sin \psi.$$

**Vamos resolver  $BT(\theta)$  escojendo  $\theta = \pi/2$ .**

$$\psi'_{x_1} = 2 \sin \frac{\psi'}{2} \tanh x_1,$$

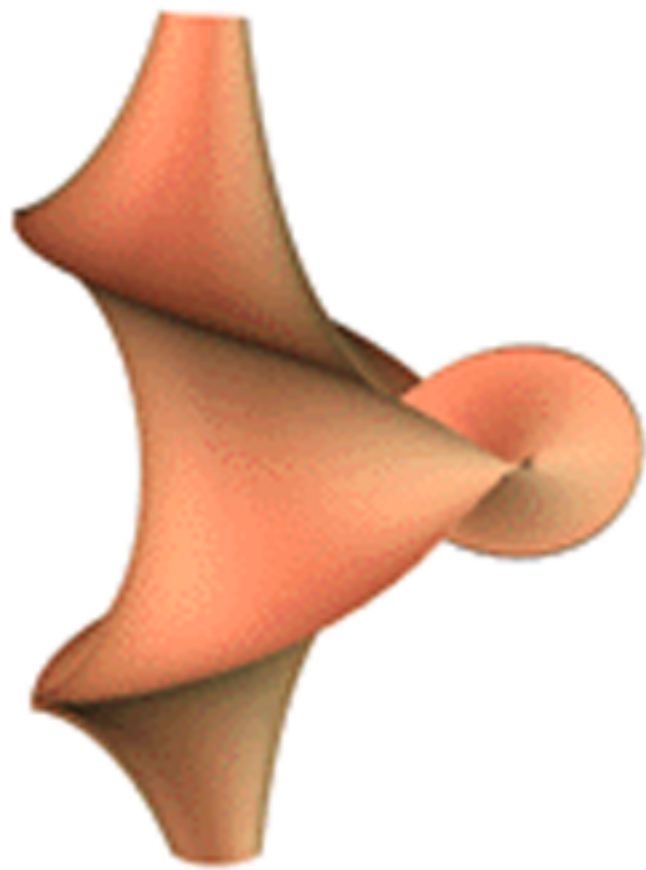
$$\psi'_{x_2} = 2(1 - \cos \frac{\psi'}{2}) \text{sech } x_1,$$

**Las soluciones son**

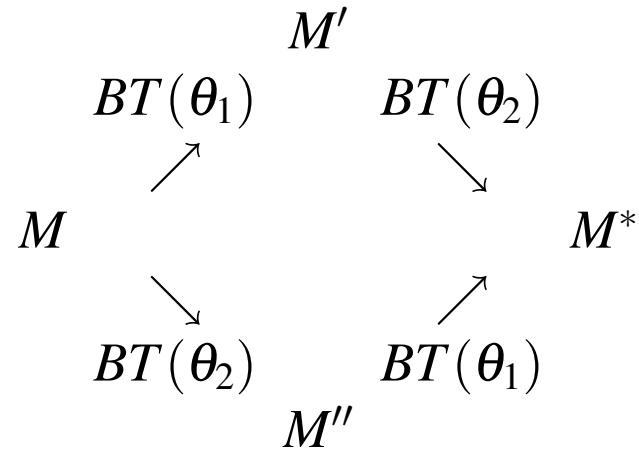
$$\cot \frac{\psi'}{4} = (-x_2 + c) \text{sech } x_1.$$

**Obtenemos la superficie de Kuen**

$$X' = X + \cos \frac{\psi'}{2} \coth x_1 X_{x_1} + \sin \frac{\psi'}{2} \cosh x_1 X_{x_2}.$$



## Comutatividad de la transformacion de Bäcklund



**Teorema de Permutabilidad.**  $M, M', M''$  superficies en  $\overline{M}^3(\overline{K})$ , con congruencias geodésicas pseudoesféricas:  $\ell_1 : M \rightarrow M'$  con const.  $r_1, \theta_1$ ;  
 $\ell_2 : M \rightarrow M''$  con const.  $r_2, \theta_2, \theta_1 \neq \theta_2$

↓

$\exists M^* \subset \overline{M}$  y  $\ell_2^* : M' \rightarrow M^*$ , con const.  $r_2, \theta_2, \ell_1^* : M'' \rightarrow M^*$  con const.  $r_1, \theta_1$   
**tal que**

$$\ell_2^* \circ \ell_1 = \ell_1^* \circ \ell_2.$$

**Ejemplo. Teorema de Permutabilidad aplicado a la [seudoesfera](#).**

$$X(x_1, x_2) = (\mathbf{sech} x_1 \cos x_2, \mathbf{sech} x_1 \sin x_2, \tanh x_1 - x_1).$$

**$\psi$  definida por  $\tan(\psi/4) = e^{x_1}$  la solución de la ecuación de sine-Gordon.**

**Resolvemos la Transformación de Bäcklund  $BT(\theta)$ , para  $\theta = \pi/2$ . La superficie de Kuen**

$$X_2 = X + \cos \frac{\psi_2}{2} \coth x_1 X_{x_1} + \sin \frac{\psi_2}{2} \cosh x_1 X_{x_2},$$

**donde**

$$\cot \frac{\psi_2}{4} = (-x_2 + c) \mathbf{sech} x_1.$$

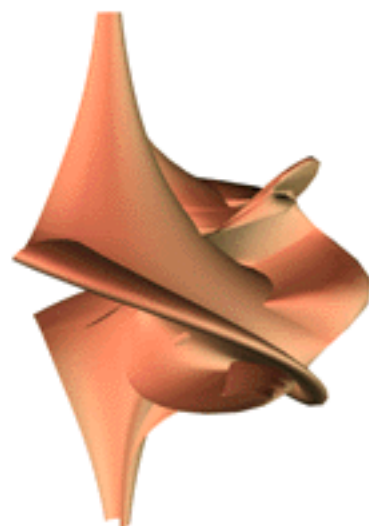
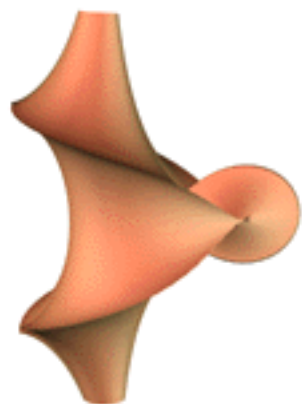
**Analogamente, para  $\theta = \pi/4$  obtenemos otra superficie asociada a  $X$  por  $BT(\pi/4)$  dada por**

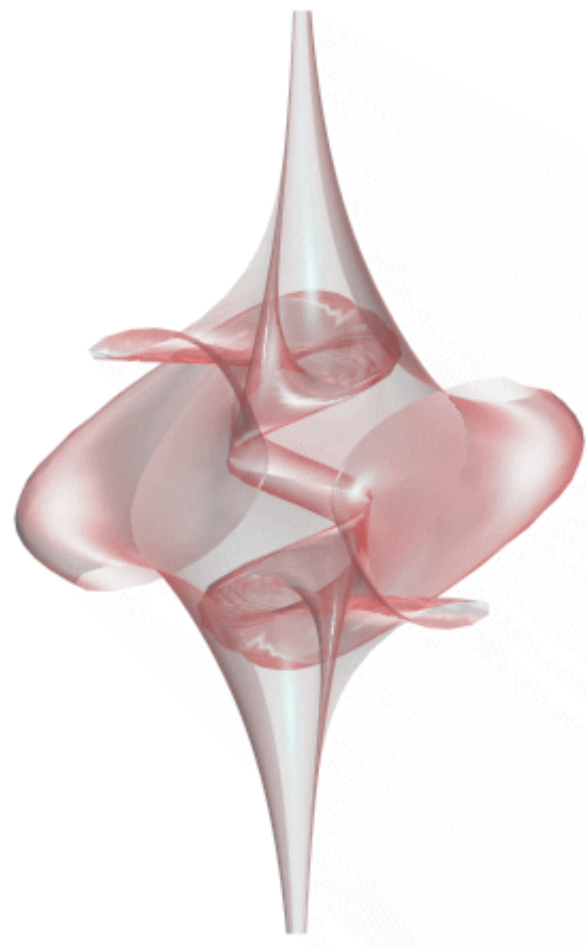
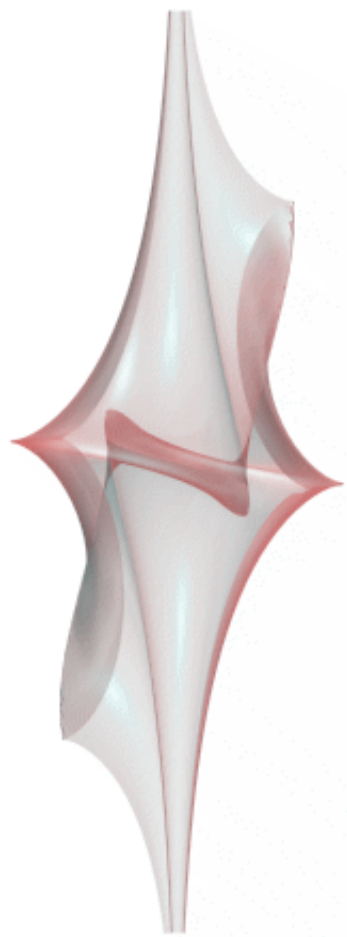
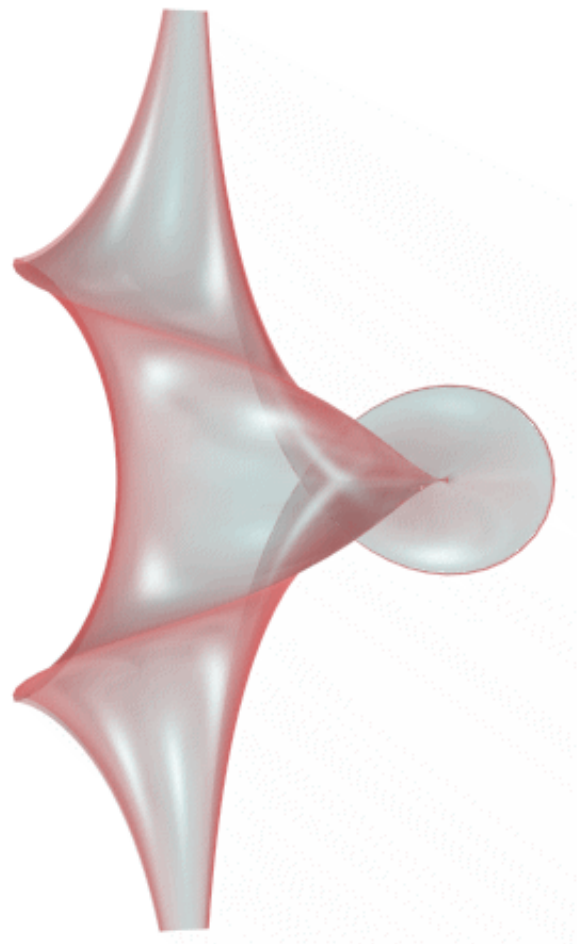
$$X_1 = X + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\psi_1}{2} \coth x_1 X_{x_1} + \sin \frac{\psi_1}{2} \cosh x_1 X_{x_2} \right),$$

**donde**

$$\tan \frac{\psi_1}{4} = (\sqrt{2} + 1) \frac{e^{\sqrt{2}x_1 - x_2} - e^{x_1}}{1 + e^{\sqrt{2}x_1 - x_2 + x_1}}.$$

**Usando el Teorema de Permutabilidad obtenemos explícitamente una superficie  $X^*$  que es asociada a  $X_1$  por  $BT(\pi/2)$  y a  $X_2$  por  $BT(\pi/4)$ .**







## Teorema de Bäcklund entre superficies linear Weingarten

**Teorema** Sean  $M, M' \subset \overline{M}^3(\overline{K})$ . Considera  $\ell : M \rightarrow M'$  difeomorfismo tal que para puntos correspondientes  $p$  y  $p' = \ell(p)$  :

- $\exists$  una unica geodésica en  $\overline{M}$  de  $p$  a  $p'$  que forma **angulos constantes** con los vectores normales  $N_p$  y  $N_{p'}$  en  $p$  y  $p'$ ;
- la distancia de  $p$  a  $p'$  es una constante  $r > 0$ ;
- el angulo entre las normales  $N_p$  y  $N_{p'}$  es una constante  $\theta, 0 < \theta < \pi$



$M$  y  $M'$  son superficies linear Weingarten.

## Interpretación analítica

$$M(K) \subset \overline{M}^3(\overline{K}) \text{ con } K < \overline{K}$$



**soluciones  $\psi$  de la ecuación de sine-Gordon**

$$\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = \sin \psi,$$

$$M(K) \subset \overline{M}^3(\overline{K}) \text{ con } K > \overline{K}$$



**soluciones  $\psi$  de la ecuación elíptica de sinh-Gordon**

$$\psi_{x_1x_1} + \psi_{x_2x_2} = -\sinh \psi.$$

- **Son ecuaciones altamente no lineales, difíciles de resolver.**
- **Método de obtener soluciones: transformaciones de Bäcklund y formulas de superposición.**
- **Una **transformación de Bäcklund** para una ecuación diferencial no lineal es una transformación (en general un sistema integrable de ecuaciones diferenciales) que permite obtener, de una dada solución de la ecuación no lineal, nuevas soluciones de la misma ecuación. Instrumento importante en la teoría de **solitons**.**
- **La **formula de Superposición** permite obtener, algebraicamente, nuevas soluciones de la ecuación no lineal.**

**Teorema.** Sea  $\psi(x_1x_2)$  una solución de la ecuación de sine-Gordon

$$\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = \sin \psi$$

y sea  $\theta$  una constante.

⇓

$$\psi'_{x_1} + \psi_{x_2} = 2 \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\psi}{2} \csc \theta + 2 \cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cot \theta$$

$$\psi'_{x_2} + \psi_{x_1} = -2 \cos \frac{\psi'}{2} \sin \frac{\psi}{2} \csc \theta - 2 \sin \frac{\psi'}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cot \theta$$

*BT*( $\theta$ )

es integrable y  $\psi'$  es una otra solución de la ecuación de sine-Gordon.

Podemos aplicar este teorema para  $\psi = 0$  (que no corresponde a superficie de  $R^3$ ).

## Formula de Superposición para la ecuación de sine-Gordon

**Teorema.** Sea  $\psi_1$  y  $\psi_2$  dos soluciones de la ecuación de sine-Gordon asociadas a  $\psi$  por  $BT(\theta_1)$  y  $BT(\theta_2)$  respectivamente. Si  $\theta_1 \neq \theta_2$



existe una única solución  $\psi^*$  asociada a  $\psi_1$  y  $\psi_2$  por  $BT(\theta_2)$  y  $BT(\theta_1)$  respectivamente y  $\psi^*$  es definida algebraicamente por

$$\tan \frac{\psi^* - \psi}{4} = \frac{\sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)} \tan \frac{\psi_1 - \psi_2}{4}.$$

**Ejemplo.**  $\psi = 0$  es solución de la ecuación de sine-Gordon. La transformación de Bäcklund  $BT(\theta)$  se reduce a

$$\begin{aligned}\psi'_{x_1} &= 2 \sin \frac{\psi'}{2} \csc \theta, \\ \psi'_{x_2} &= -2 \sin \frac{\psi'}{2} \cot \theta.\end{aligned}$$

**Para  $\theta \neq 0$  tenemos la nueva solución  $\psi'$**

$$\tan \frac{\psi'}{4} = \exp(\csc \theta x_1 - \cot \theta x_2 + c), \quad c \in R$$

**En particular, para  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\theta_2 = \pi/4$  y  $c = 0$ , obtenemos respectivamente**

$$\tan \frac{\psi_1}{4} = e^{x_1}, \quad \tan \frac{\psi_2}{4} = e^{\sqrt{2}x_1 - x_2}.$$

**Usando la formula de superposición se obtiene una cuarta solución**

$$\tan \frac{\psi^*}{4} = (\sqrt{2} + 1) \frac{e^{\sqrt{2}x_1 - x_2} - e^{x_1}}{1 + e^{\sqrt{2}x_1 - x_2 + x_1}}.$$

**Podemos obtener infinitas soluciones explícitas con este método.**

**Teorema. Sea  $\psi(x_1, x_2)$  una solución de la ecuación elíptica de sinh-Gordon**

$$\psi_{x_1x_1} + \psi_{x_2x_2} = -\sinh \psi$$

**y sea  $\theta$  una constante (real o compleja)**

⇓

$$\begin{aligned} \psi'_{x_1} - i\psi_{x_2} &= -2 \sinh \theta \cosh \frac{\psi}{2} \sinh \frac{\psi'}{2} + 2 \cosh \theta \sinh \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\psi'}{2} \\ i\psi'_{x_2} - \psi_{x_1} &= -2 \sinh \theta \sinh \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\psi'}{2} + 2 \cosh \theta \cosh \frac{\psi}{2} \sinh \frac{\psi'}{2} \end{aligned} \quad \widetilde{BT}(\theta)$$

**es integrable y  $\psi'$  es una otra solución de la ecuación elíptica de sinh-Gordon.**

- **A cada solución podemos asociar una familia a 4 parametros familia de soluciones.**
- **Los parametros: partes reales y imaginarios de  $\theta$ , y  $\psi'(x_1^0, x_2^0)$ .**



## Formula de superposición para la ecuación elíptica de sinh-Gordon

**Teorema** Sean  $\psi_1$  y  $\psi_2$  soluciones de la ecuación elíptica de sinh-Gordon asociadas a  $\psi$  por  $\widetilde{BT}(\theta_1)$  y  $\widetilde{BT}(\theta_2)$ , respectivamente. Si  $\theta_1 \neq \theta_2$ ,



existe una única solución  $\psi^*$  asociada a  $\psi_1$  y  $\psi_2$  por  $\widetilde{BT}(\theta_2)$  y  $\widetilde{BT}(\theta_1)$  respectivamente.

$\psi^*$  es definida algebraicamente por

$$\tanh \frac{\psi^* - \psi}{4} = \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \tanh \frac{\psi_1 - \psi_2}{4}$$

**Corolario.** Sean  $\psi$  y  $\psi_1$  soluciones de la ecuación elíptica de sinh-Gordon tal que  $\psi_1$  es asociada a  $\psi$  por  $\widetilde{BT}(\theta_1)$  donde  $\theta_1$  es un número complejo. Si  $\psi$  es una función a valores reales, entonces  $\psi^*$  definida por

$$\tanh \frac{\psi^* - \psi}{4} = \tanh(\operatorname{Re} \theta_1) \tanh\left(\operatorname{Re} \frac{\psi_1}{2}\right)$$

es otra solución real.

- A cada solución real asociamos una familia a 2 parámetros de soluciones reales.
- Los parámetros: partes reales de  $\theta_1$ , y  $\psi_1(x_1^0, x_2^0)$ .

**Ejemplo.**  $\psi \equiv 0$  es una solución de la ecuación elíptica de sinh-Gordon. Para cada constante  $\theta_1$ , resolvemos la transformación de Bäcklund i.e.

$$\begin{aligned}\psi_{1,x_1} &= -2 \sinh \theta_1 \sinh \frac{\psi_1}{2} \\ \psi_{1,x_2} &= -2i \cosh \theta_1 \sinh \frac{\psi_1}{2}\end{aligned}\quad \widetilde{BT}(\theta_1)$$

**La solución  $\psi_1$  es**

$$\tanh \frac{\psi_1}{4} = e^{-x_1 \sinh \theta_1 - ix_2 \cosh \theta_1 + c} \quad (4)$$

**donde  $c$  es una constante que determinada por la condición inicial de  $\psi_1$ .**

**Vamos aplicar el corolario para  $c = 0$  y  $\theta_1 \in R$ .**

$\psi^*$  es definido por

$$\tanh \frac{\psi^*}{4} = \tanh \theta_1 \tanh \left( \operatorname{Re} \frac{\psi_1}{2} \right).$$

**De (4) tenemos**

$$\begin{aligned} \cosh \frac{\psi_1}{2} &= \cosh(x_1 \sinh \theta_1 + ix_2 \cosh \theta_1), \\ \sinh \frac{\psi_1}{2} &= \frac{1}{\sinh(x_1 \sinh \theta_1 + ix_2 \cosh \theta_1)}. \end{aligned}$$

**Entonces**

$$\tanh \left( \operatorname{Re} \frac{\psi_1}{2} \right) = \frac{\cos(x_2 \cosh \theta_1)}{\cosh(x_1 \sinh \theta_1)}.$$

**Concluimos que  $\psi^*$  definido por**

$$\tanh \frac{\psi^*}{4} = \tanh \theta_1 \frac{\cos(x_2 \cosh \theta_1)}{\cosh(x_1 \sinh \theta_1)} \quad \theta_1 \in R,$$

**es una familia de soluciones de la ecuación elíptica de sinh-Gordon.**

## **Generalizaciones para dimensión $n$ .**

- **aspectos  $n$ -dimensionales de la teoría de variedades de curvatura seccional constante (teoría extrínseca y intrínseca): Ablowitz, Aminov, Barbosa, Beals, Campos, Dajczer, Ferreira, Terng, \_\_\_\_\_, Tojeiro.**
- **Equaciones Generadoras (sistemas de ecuaciones).**
- **Problema: Teorema de Hilbert para dimensión  $n$ .**

## Transformación de Laplace para ecuaciones hiperbólicas

Consideremos la ecuación para  $z(x_1, x_2)$

$$z_{x_1x_2} + az_{x_1} + bz_{x_2} + cz + l = 0 \quad (5)$$

donde  $a, b, c$  y  $l$  son funciones diferenciables de  $x_1$  y  $x_2$ .

**Método clásico de integración (Darboux, Goursat, Forsyth):**

Definimos los **invariantes de Laplace**  $h$  y  $k$

$$h = a_{x_1} + ab - c \quad k = b_{x_2} + ab - c.$$

**Si  $h = 0$  o  $k = 0$  se integra la ecuación.**

**Si  $h \neq 0$  y  $k \neq 0$  usamos la transformación de Laplace**

Si  $h = 0$ , (analogamente para  $k = 0$ ) la ecuación (5) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(z_{x_2} + az) + b(z_{x_2} + az) + l = 0.$$

Con la notación

$$S = e^s(z_{x_2} + az), \quad \text{donde} \quad s = \int b dx_1$$

tenemos

$$z_{x_2} + az = e^{-s}S$$

Con la notación

$$\tilde{S} = e^{\tilde{s}}z \quad \text{donde} \quad \tilde{s} = \int a dx_2,$$

concluimos que

$$z = e^{-\tilde{s}} \left[ - \int e^{\tilde{s}-s} \left( \int e^s l dx_1 - F(x_2) \right) dx_2 + G(x_1) \right],$$

donde  $F$  y  $G$  determinadas por las condiciones iniciales  $z(x_1^0, x_2)$  y  $z(x_1, x_2^0)$ .

Si  $h \neq 0$  definimos

$$z_1 = z_{x_2} + az.$$

Entonces la ecuación se transforma en otra del mismo tipo para  $z_1$

$$z_{1,x_1x_2} + \left(a - \frac{h_{x_2}}{h}\right)z_{1,x_1} + bz_{1,x_2} + \left[ab + h\left(\frac{b}{h}\right)_{x_2} - 1\right]z_1 + l\left(a - \frac{h_{x_2}}{h}\right) + l_{x_2} = 0.$$

Analogamente, si  $k \neq 0$  consideramos

$$z_{-1} = z_{x_1} + bz$$

que transforma (5) en otra ecuación del mismo tipo para  $z_{-1}$ .

$z_1$  y  $z_{-1}$  se llaman las **transformadas de Laplace**  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_{-1}$  de  $z$ .

Cuando  $h \neq 0$  y  $k \neq 0$ ,

$$z = [\mathcal{L}_{-1}(z_1) + l]/h \quad \text{y} \quad z = [\mathcal{L}_1(z_{-1}) + l]/k.$$

**Idea básica: Usar las transformadas de Laplace y la inversión**



- **Los invariantes son independientes del termo no homogeneo.**
- **La ecuación**

$$z_{x_1x_2} + az_{x_1} + bz_{x_2} + cz = 0$$

**puede ser transformada en una ecuación de tipo**

$$Z_{x_1x_2} + AZ_{x_1} + BZ_{x_2} = 0.$$

- **Los invariantes de Laplace "determinan" esencialmente la ecuación.**

## Interpretación geométrica del método de Laplace

Sea  $X(x_1, x_2)$  una superficie en  $R^3$  o  $R^4$  cuyas curvas coordenadas son conjugadas i.e.  $X_{x_1x_2}$  es tangente a la superficie. Entonces

$$X_{x_1x_2} = \Gamma_{12}^1 X_{x_1} + \Gamma_{12}^2 X_{x_2}$$

donde  $\Gamma_{12}^i$ ,  $i = 1, 2$  son los simbolos de Christoffel.

Considerando superficies genéricas. Si  $\Gamma_{12}^1 \neq 0$ , definimos

$$X_1 = X - X_{x_2}/\Gamma_{12}^1.$$

$X_1 = \mathcal{G} \mathcal{L}_1(X)$  se llama la **transformada geométrica de Laplace** de  $X$ .

**Proposición.** Sea  $X(x_1, x_2)$  una superficie parametrizada por curvas conjugadas tal que  $\Gamma_{12}^1 \neq 0$ . Sea

$$h = -\Gamma_{12, x_1}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2.$$

⇓

**i)  $X_1 = \mathcal{GL}_1(X)$  es una superficie  $\Leftrightarrow h \neq 0$ .**

**En este caso,  $X_1$  es también parametrizada por curvas conjugadas.**

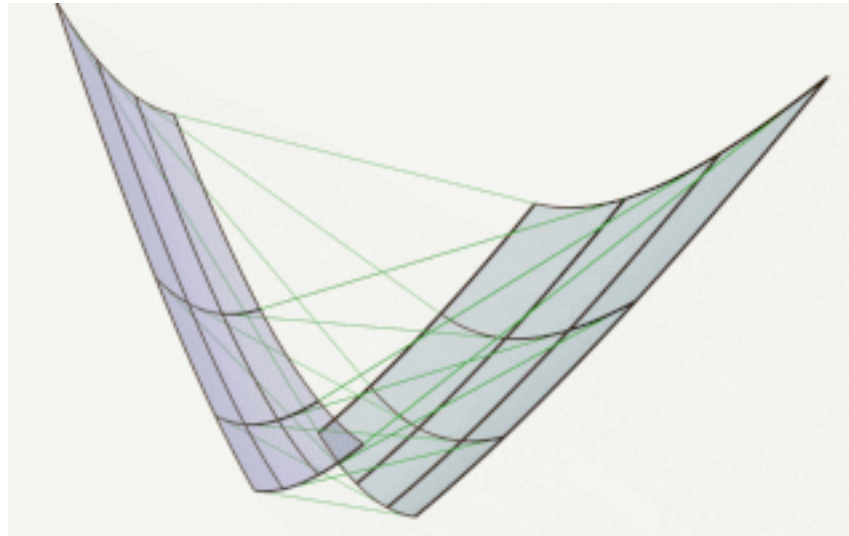
**ii)  $X_1$  se reduce a una curva  $\Leftrightarrow h = 0$ .**

**En este caso,  $X$  es únicamente determinada por las curvas  $X(x_1^0, x_2)$  y  $X(x_1, x_2^0)$ .**

**Misma construcción intercambiando  $x_1$  y  $x_2$ . Tenemos  $X_{-1} = \mathcal{G}\mathcal{L}_{-1}(X)$  la otra transformada geométrica de Laplace de  $X$  dada por**

$$X_{-1} = X - X_{x_1}/\Gamma_{12}^2.$$

$X_{-1}$  es una superficie  $\Leftrightarrow k = -\Gamma_{12,x_2}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 \neq 0$ .



**Proposición. Las transformaciones  $\mathcal{GL}_1$  y  $\mathcal{GL}_{-1}$  de la superficie  $X$  son una la inversa de la otra i.e.**

$$\mathcal{GL}_{-1}(\mathcal{GL}_1(X)) = X, \quad \text{si } h \neq 0$$

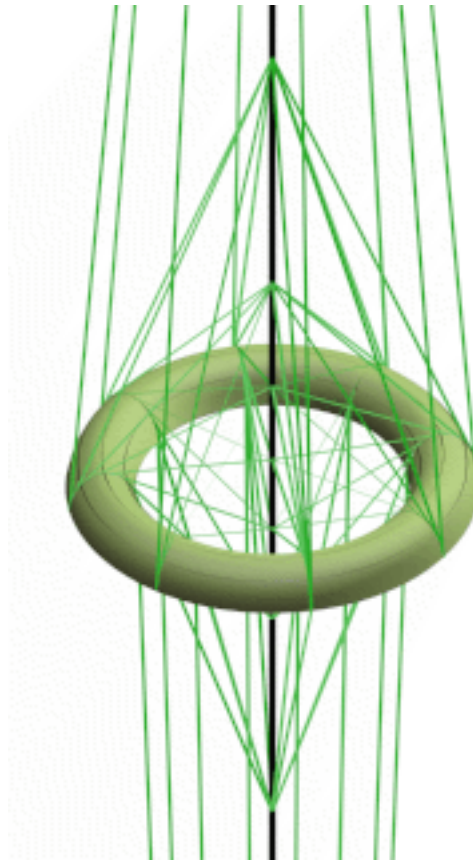
$$\mathcal{GL}_1(\mathcal{GL}_{-1}(X)) = X, \quad \text{si } k \neq 0.$$

**Ejemplo. Sea  $X(x_1, x_2)$  una superficie de rotación**

$$X(x_1, x_2) = (f(x_1) \cos x_2, f(x_1) \sin x_2, g(x_1)),$$

**con  $f(x_1) > 0$ . Suponga  $f' \neq 0$ . Entonces,  $\Gamma_{12}^1 = 0$  y  $\Gamma_{12}^2 = f'/f$  y los invariantes  $h = k = 0$ .**

**La transformada de Laplace  $\mathcal{G}\mathcal{L}_{-1}(X)$  se reduce al eje de rotación.**



## Generalización a variedades de dimensión $n$

- **Generalización de la transformada de Laplace para variedades de dimensión  $n$  N. Kamran, \_\_\_\_\_ (1996).**
- **Aplicaciones a sistemas de ecuaciones diferenciales con la introducción de los invariantes de Laplace de dimensión  $n$  N. Kamran, \_\_\_\_\_ (1998).**
- **Aplicaciones al estudio de variedades de Dupin parametrizadas por líneas de curvatura, Riveros, Rodrigues, \_\_\_\_\_ (2008).**

**Ref**



# **Transformaciones de superficies y aplicaciones a EDPs - III**

**Keti Tenenblat**  
**Universidade de Brasília**

**Escuela de Análisis Geométrico**

**Granada, Junio 2009**

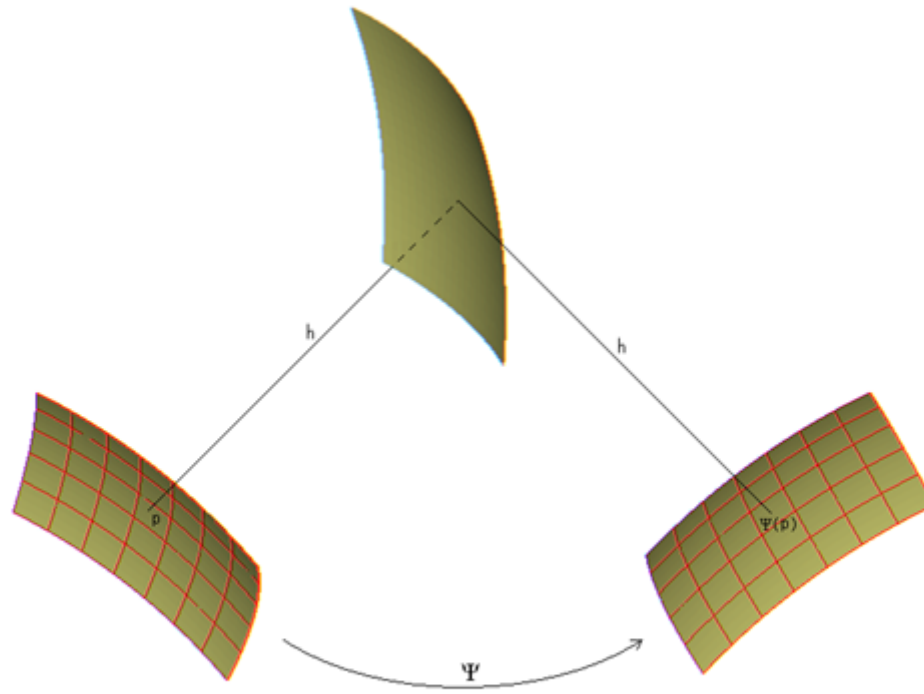
- **En las dos últimas décadas, los matemáticos han tido gran suceso en la construcción de nuevas superficies mínimas e cmc, utilizando diversas técnicas.**
- **Em 2003, los primeiros ejemplos deste tipo de superfícies fueran obtidos usando transformaciones de Ribaucour.**
- **Estas transformaciones fueran estudiadas clasicamente por Bianchi (1918).**

Una **congruencia de esferas** en  $R^3$  es una familia a 2-parametros de esferas cuyos centros estan sobre una superficie  $M_0$  llamada **superficie de los centros**.

Una **involuta** de una congruencia de esferas es una superficie  $M$  de  $R^3$  tal que cada punto de  $M$  es tangente a una esfera de la congruencia.

Dos superficies  $M$  y  $\tilde{M}$  son llamadas **asociadas por una congruencia de esferas** si existe un difeomorfismo  $\psi : M \rightarrow \tilde{M}$  tal que en puntos correspondientes  $p$  y  $\psi(p)$  las superficies son tangentes a la misma esfera de la congruencia.

- $M$  y  $\tilde{M}$  son involutas de la congruencia.
- Las rectas normales en puntos correspondientes se intersectan en un punto ecuidistante en la superficie de los centros.
- Un caso especial importante ocurre cuando  $\psi$  preserva líneas de curvatura.



**Superficies asociadas por una congruencia de esferas**

## Transformación de Ribaucour

**Definición clásica:**  $M, \tilde{M}$  superficies de  $\mathbb{R}^3$  sin puntos umbílicos,

$\psi : M \rightarrow \tilde{M}$  difeomorfismo tal que:

- a) las rectas normales en puntos correspondientes se intersectan en un punto ecuidistante
- b) el conjunto de puntos ecuidistantes es una superficie
- c)  $\psi$  preserva direcciones principales ortogonales.

## Observaciones:

- $\tilde{M}$  puede ser **localmente** asociada a  $M$  por una transformación de Ribaucour.
- Definiciones análogas para superficies en  $S^3$  o  $H^3$  (substituyendo rectas normales por geodésicas).
- Una transformación de Ribaucour corresponde a resolver una ecuación diferencial parcial **nonlinear de segunda orden para  $h$** , que se lineariza en un sistema de ecuaciones diferenciales.

## Una caracterización de las transformaciones de Ribaucour

**Teorema.** Sea  $\mathbf{X}(u_1, u_2)$  una superficie parametrizada por líneas de curvatura, sin puntos umbílicos,  $k_1, k_2$  curvaturas principales,  $\mathbf{N}$  vector unitario normal y  $a_i = |\mathbf{X}_{u_i}|$ . Una superficie  $\tilde{\mathbf{X}}(u_1, u_2)$  es localmente asoc. a  $\mathbf{X}$ , por una transf. de Ribaucour  $\iff \mathbf{h} = \frac{\Omega}{W}$  donde  $\Omega$  y  $W \neq 0$  satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} &= \Omega_j \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_j}{\partial u_i}, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial u_i} &= a_i \Omega_i, \\ \frac{\partial W}{\partial u_i} &= a_i \Omega_i k_i, \end{aligned}$$

y

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \frac{2\Omega}{S} (\nabla \Omega - W\mathbf{N}) \quad \text{donde} \quad S = \sum_{j=1}^2 (\Omega_j)^2 + W^2$$



## Transformaciones de Ribaucour para superficies especiales

- **Transformaciones de Ribaucour que preservan curvatura Gaussiana constante, cmc o superficies mínimas eran conocidas desde 1918 (Ribaucour, Bianchi).**
- **Para superficies de curvatura Gaussiana correspondem a una transformación de Bäcklund seguida de una superposición para la ecuación de sine-gordon o la ecuación elíptica de sinh-Gordon.**
- **Las primeras superficies mínimas obtenidas por transformaciones de Ribaucour en (Corro, Ferreira, \_\_\_\_\_, Geom. Dedicata 2003).**
- **El método fué estendido a superficies linear Weingarten, dando una versión unificada de los resultados clásicos, em (Corro, Ferreira \_\_\_\_\_ Pac. J. Math. 2003).**

## Aplicaciones:

- **Superficie de Enneper, Catenoide, helicoides;**
- **Cilindro, onduloide;**
- **Toro plano contenido en  $S^3$**
- **Prima del catenoide y de la superficie de Enneper en  $H^3$**
- **Obtención de superficies lineales Weingarten hiperbólicas completas en  $R^3$**

**Corro, Ferreira, Lemes, \_\_\_\_\_, Wang**

## Transformaciones de Ribaucour para superficies mínimas

Dada una superficie mínima  $X(u_1, u_2)$ , sin puntos umbílicos

Aplicando una transformación de Ribaucour

+

una condición adicional que contiene una constante  $c \neq 0$

⇓

Sistema integrable

cuyas soluciones fornecen superficies mínimas asociadas a  $X$ .

- Este método, en general, produce fins planares embebidos.

## Transformaciones de Ribaucour para superficies mínimas

**Teorema A.** Sea  $X(u_1, u_2)$  una superficie mínima, sin puntos umbílicos, parametrizada por líneas de curvatura. Entonces el sistema

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_j} = \Omega_j \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_j}{\partial u_i}, \quad i \neq j,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = a_i \Omega_i,$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = a_i \Omega_i k_i,$$

$$S = 2c\Omega W, \quad c \neq 0, \quad (1)$$

donde  $S = \sum_{j=1}^2 (\Omega^j)^2 + W^2$ , en integrable. Dadas condiciones iniciales satisfaciendo (1), la solución es única en un dominio simpl. conexo. La superficie  $\tilde{X}(u_1, u_2)$  asociada a  $X$  es mínima.

**Proposición (Corro, Ferreira, \_\_\_\_\_ 2003) Sea  $\tilde{X} : D \setminus \{p_0\} \rightarrow R^3$  una superficie mínima localmente asociada por una transformación de Ribaucour transformation a una superficie mínima  $X : D \rightarrow R^3$ , tal que  $\Omega, \Omega_i, W$  son definidas en  $D$ . Sean  $\tilde{N}$  y  $N$  las normales de  $\tilde{X}$  y  $X$  respectivamente.**

**Si  $p_0$  es un zero aislado de  $S$  y  $\Omega(p_0) \neq 0$ ,**

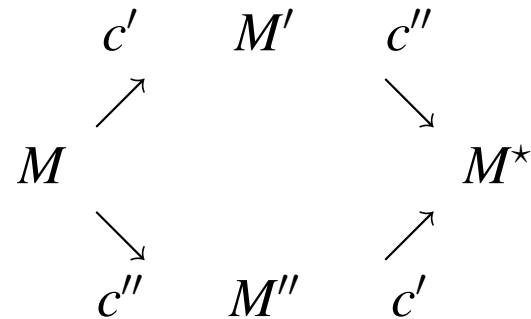
⇓

**a) Para cada curva divergente  $\gamma : [0, 1) \rightarrow D \setminus \{p_0\}$  tal que  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = p_0$  la longitud de  $\tilde{X}(\gamma)$  is infinita.**

**b)  $\tilde{X}$  tiene un fin planar embebido en  $p_0$ .**

**c)  $\lim_{p \rightarrow p_0} \tilde{N}(p) = N(p_0)$ .**

## Teorema de Permutabilidad



### Interpretación analítica de la construcción geométrica de superficies mínimas

Superficies mínimas de  $R^3$ , sin puntos umbílicos y parametrizadas por coordenadas isotérmicas correspondien a soluciones  $\phi$  de

$$\Delta\phi = e^{-2\phi}.$$

**Teorema.** Sea  $\phi(u_1, u_2)$  una solución de la ecuación

$$\Delta\phi = e^{-2\phi} \quad (2)$$

Para cada constante  $c \neq 0$ , el sistema para  $\Omega_i$ ,  $\Omega$  y  $W$

$$\Omega_{i,u_j} = \Omega_j \phi_{,u_i} \quad 1 \leq i \neq j \leq 2$$

$$\Omega_{,u_i} = \Omega_i e^\phi$$

$$W_{,u_i} = (-1)^{i+1} \Omega_i e^{-\phi} \quad (TR(c)) \quad (3)$$

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 = 2c\Omega W.$$

es integrable y una nueva solución de (2),  $\tilde{\phi}$  es

$$e^{\tilde{\phi}} = e^{-\phi} \frac{\Omega}{W}.$$

$\tilde{\phi}$  es **asociada a  $\phi$**  por (TR(c)).

**Teorema (Fórmula de Superposición)** Sea  $\phi$  una solución de (2). Sean  $W'$  y  $\phi'$  y  $\phi''$  soluciones asociadas a  $\phi$  por  $(\text{TR}(c'))$  y  $(\text{TR}(c''))$  respectivamente, para  $c' \neq c''$  constantes no nulas.

⇓

$\phi^*$  definida algebraicamente por

$$e^{\phi^*} = e^{\phi} \left( \frac{-B + c'e^{\phi''} + c''e^{\phi'}}{-B + c'e^{\phi'} + c''e^{\phi''}} \right),$$

donde

$$B = e^{-\phi} + e^{\phi} \langle \nabla(\log W'), \nabla(\log W'') \rangle,$$

es una nueva solución de (2).



(Corro-Ferreira-Tenenblat 2003)

**Proposición. Superficie de Enneper**

$$\mathbf{X} = \left( u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2, u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_2 u_1^2, u_1^2 - u_2^2 \right)$$

$\tilde{\mathbf{X}}(u_1, u_2)$  es una superficie mínima localmente asociada a  $\mathbf{X}$  por una transf. de Ribaucour como en el Teorema A  $\iff$  a menos de movimiento rígido de  $\mathbf{R}^3$ ,

$$\tilde{\mathbf{X}}_{cAB} = \mathbf{X} + \frac{1}{c}(-u_1, u_2, 1) - \frac{1}{2c(\mathbf{f} + \mathbf{g})}(\mathbf{f}'\mathbf{X}_{u_1} - \mathbf{g}'\mathbf{X}_{u_2})$$

donde

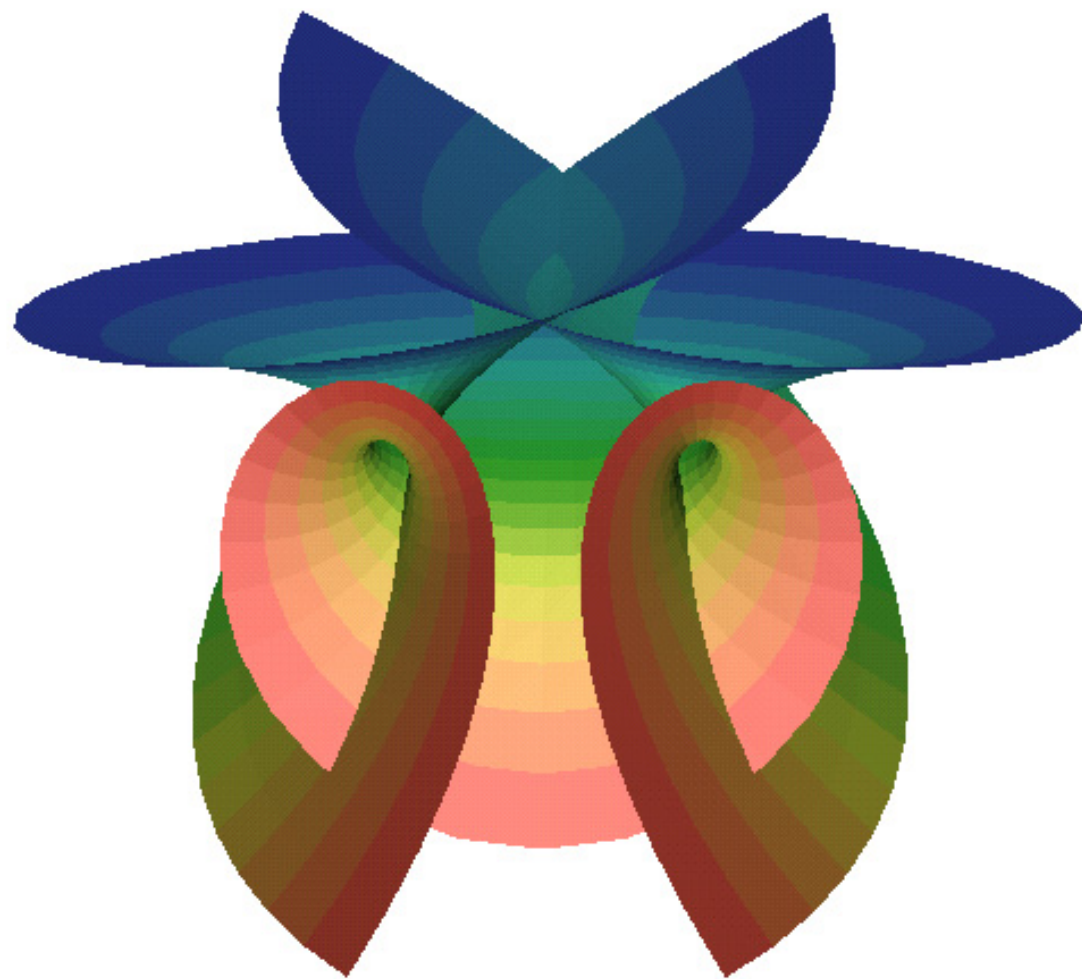
$$\mathbf{f} = \delta \cosh(2\sqrt{c}u_1 + \mathbf{A}) \quad \mathbf{g} = \sin(2\sqrt{c}u_2 + \mathbf{B})$$

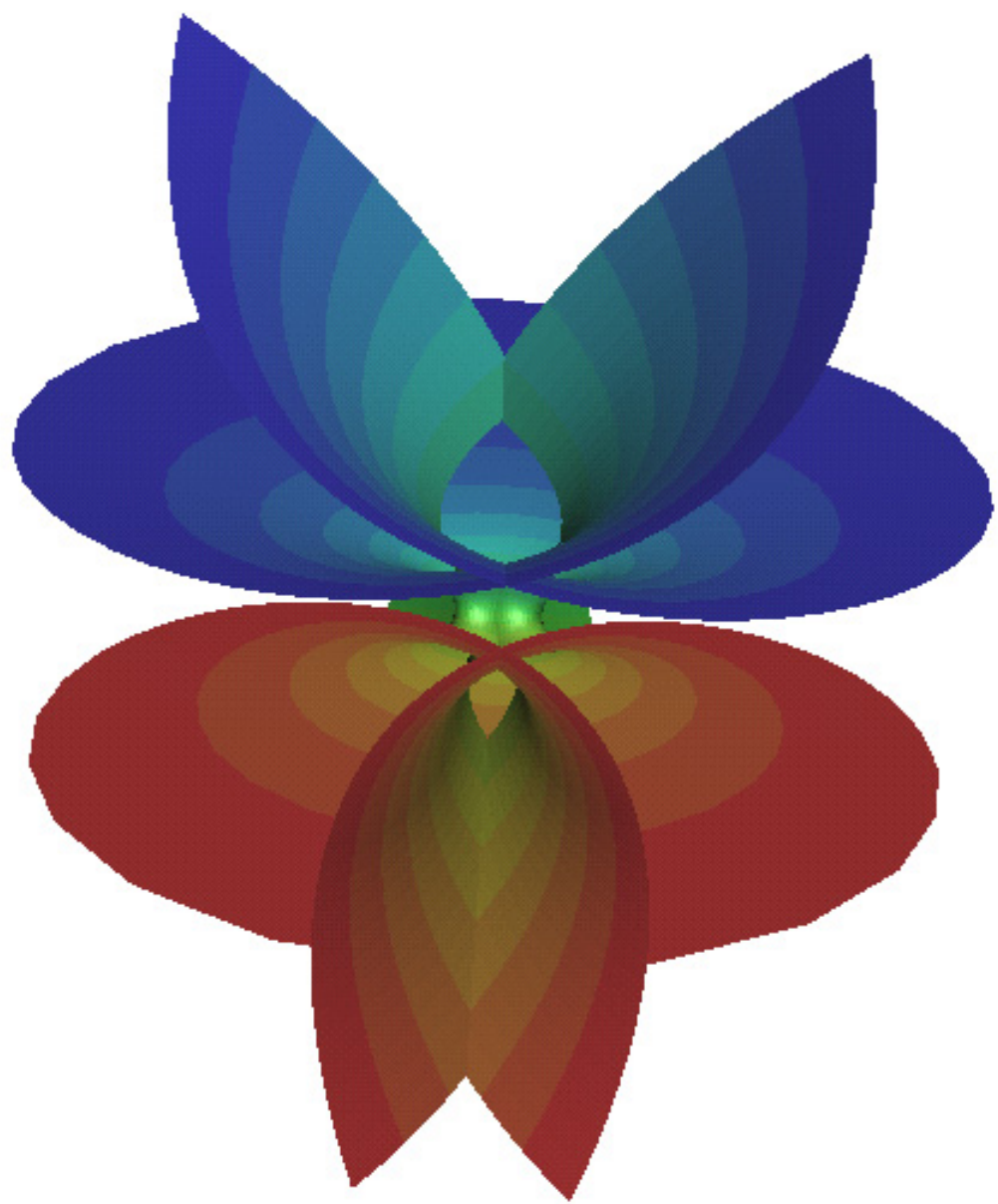
$c > 0$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}$ ,  $\delta = \pm 1$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}$  es definida en  $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}_k, k \in \mathbf{Z}\}$ ,

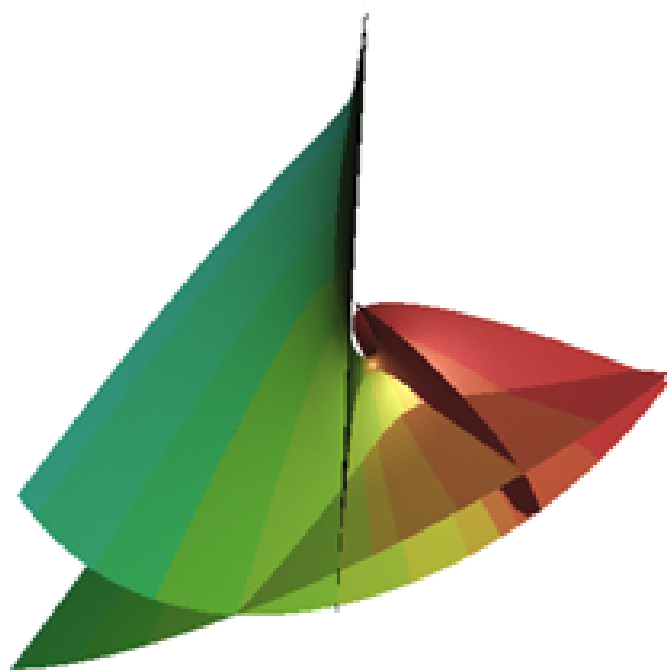
$$\mathbf{p}_k = \frac{1}{\sqrt{c}}(-\mathbf{A}/2, -\delta\pi/4 - \mathbf{B}/2 + k\pi).$$

## Propiedades de las superficies

- **Cualquiera superficie mínima  $\tilde{X}_{cAB}$  es completa,**
- **corresponde a una imersión de una esfera perforada en un número infinito de puntos, contidos en un círculo, se acumulando en un polo.**
- **tiene curvatura total infinita.**
- **tiene un fim no planar y infinitos fins planares, embebido,**
- **las direcciones de los fins planares son determinados por los parámetros A, B**
- $\lim_{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \rightarrow \mathbf{p}_k} \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{N}(\mathbf{p}_k)$







**Aplicando las transformaciones de Ribaucour al **catenoide**, obtenemos una familia de superficies mínimas, completas, localmente asociadas al catenoide.**

- **Esta familia contiene clases distintas de superficies mínimas, dependiendo del valor del parámetro **c**.**
- **Otros parámetros, que vienen de la integración de la transformación de Ribaucour, afectan la posición de los fins planares de las superficies asociadas al catenoide.**

**Proposición. Catenoide parametrizado por**

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\cos \mathbf{u}_2 \cosh \mathbf{u}_1, \sin \mathbf{u}_2 \cosh \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)$$

**A menos de movimiento rígido de  $\mathbf{R}^3$ , una superficie parametrizada  $\tilde{\mathbf{X}}_c$  es una superficie mínima localmente asociada a  $\mathbf{X}$  por una transf. de Ribaucour como en el Teorema A  $\iff$**

$$\tilde{\mathbf{X}}_c = \mathbf{X} - \frac{\cosh \mathbf{u}_1}{c} (\cos \mathbf{u}_2, \sin \mathbf{u}_2, \mathbf{0}) + \frac{1}{c(\mathbf{f} + \mathbf{g})} (\mathbf{f}' \mathbf{X}_{\mathbf{u}_1} - \mathbf{g}' \mathbf{X}_{\mathbf{u}_2})$$

**donde  $c \neq 0$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_1)$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{u}_2)$  satisfacen**

$$\mathbf{f}' + (2c - 1)\mathbf{f} = \mathbf{g}'' - (2c - 1)\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

**y las condiciones iniciales satisfacen**

$$(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 + (2c - 1)(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2) = 0.$$

**Idea de la demostración (superficie de Enneper y el catenoide): Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales (TR(c)) deducimos la ecuación de Laplace**

$$W_{,12} + \frac{\varphi_{,2}}{\varphi}W_{,1} + \frac{\varphi_{,1}}{\varphi}W_{,2} = 0,$$

**donde**

$$\varphi = \begin{cases} 1 + u_1^2 + u_2^2 & \text{para la superficie de Enneper} \\ \cosh u_1 & \text{para el catenoide.} \end{cases}$$

**Uno de los invariantes desta ecuación hiperbólica es zero entonces las soluciones son dadas por**

$$W = \frac{1}{\varphi}(f(u_1) + g(u_2)),$$

**donde  $f$  y  $g$  son arbitrarias definidas adonde  $f + g \neq 0$ .**

**Las funciones  $f$  y  $g$  son determinadas por la condición adicional para obtener superficies mínimas.**



**Interpretación analítica.** Considere  $\phi = \log(\cosh u_1)$  solución de la ecuación (2) asociada al catenoide. Para cada  $c \neq 0$ , la solución de (TR(c)) nos da

$$W = (f + g) / \cosh u_1 \quad \Omega = \cosh^2 u_1 \Delta W / 2c + W / c$$

donde  $f(u_1)$  y  $g(u_2)$  satisfacen

$$f'' + (2c - 1)f = g'' - (2c - 1)g = 0.$$

Por consiguiente, la función  $\tilde{\phi}$

$$e^{\tilde{\phi}} = \frac{\Omega}{f + g}$$

es una nueva solución de la ecuación (2).

**Considere  $\phi = \log \left[ 1 + \frac{u_1^2}{4} + \frac{u_2^2}{4} \right]$  que es solución de (2), asociada a la superficie de Enneper. Para cada  $c \neq 0$ , las soluciones de (TR(c)) nos dan, escribiendo**

$$\phi = 1 + u_1^2/4 + u_2^2/4$$

$$W = (f + g)/\phi \quad \Omega = \phi^2 \Delta W / 2c + W/c,$$

**donde  $f(u_1)$  y  $g(u_2)$  satisfacen**

$$f'' - 2cf = g'' + 2cg = 0.$$

**Entonces**

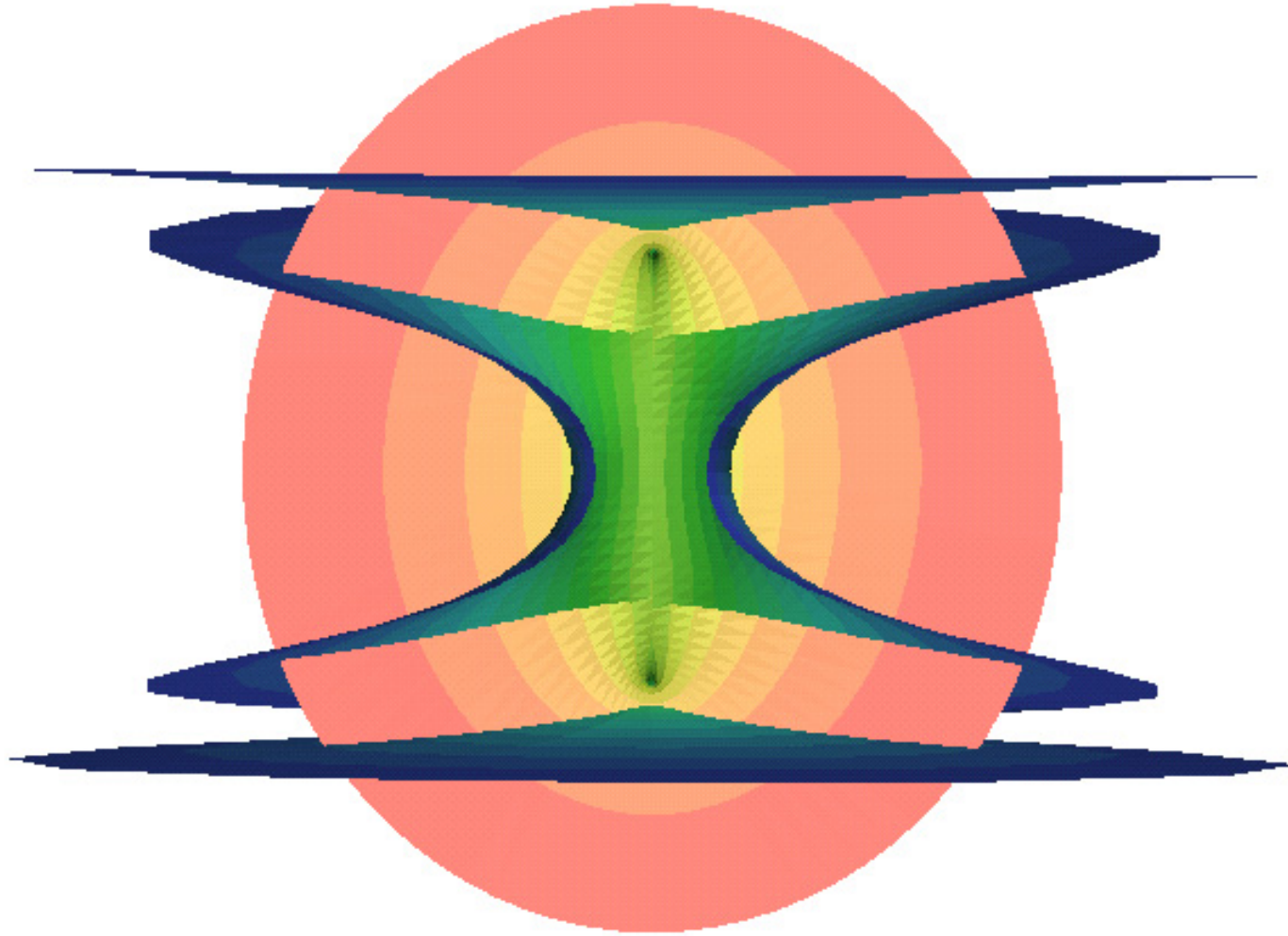
$$e^{\tilde{\phi}} = \frac{\Omega}{f + g}$$

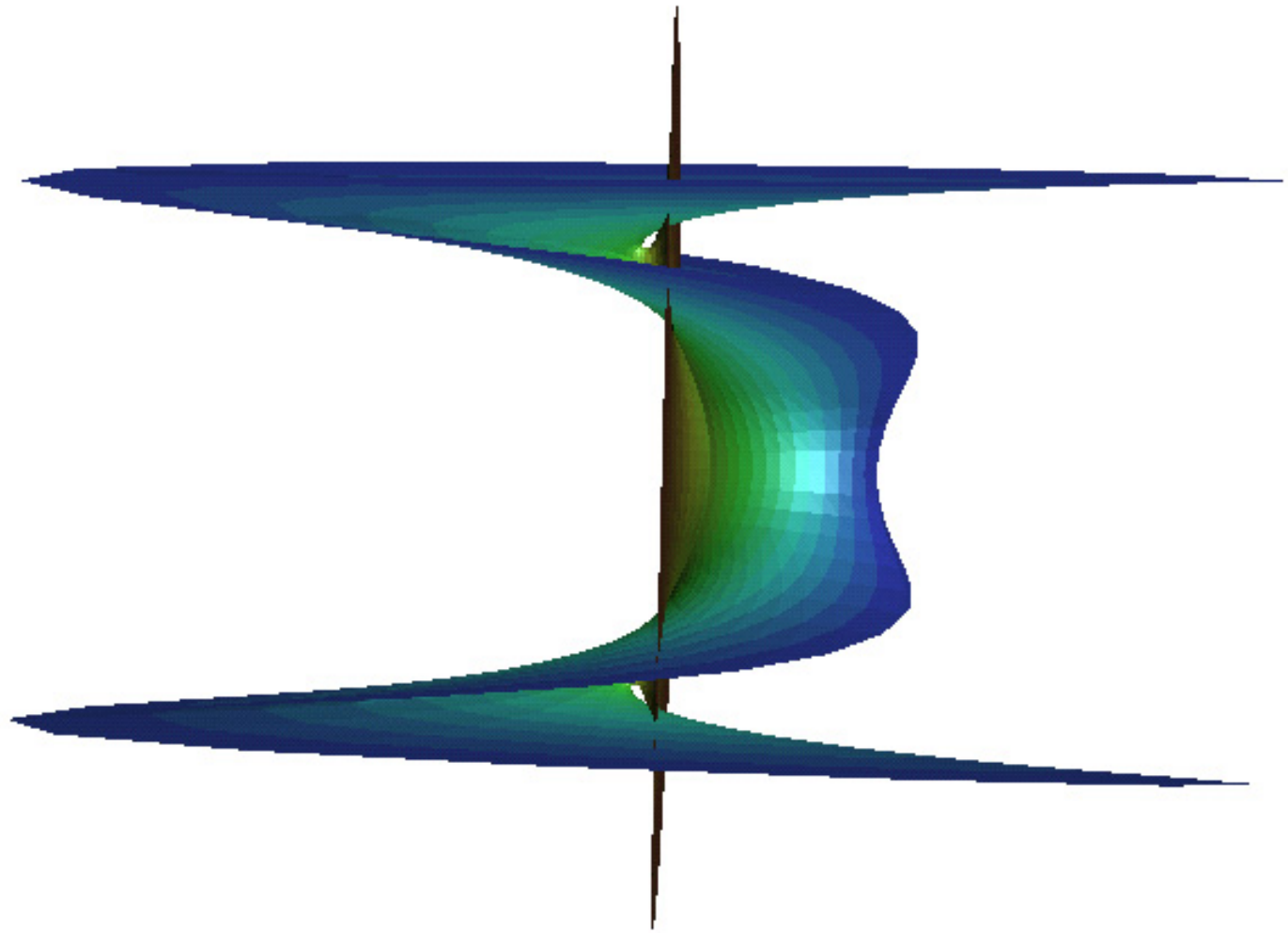
**es una nueva solución de (2).**

**Nuevas soluciones explícitas se obtienen con la fórmula de superposición de forma algebraica.**

## Propiedades de las superficies asociadas al catenoide

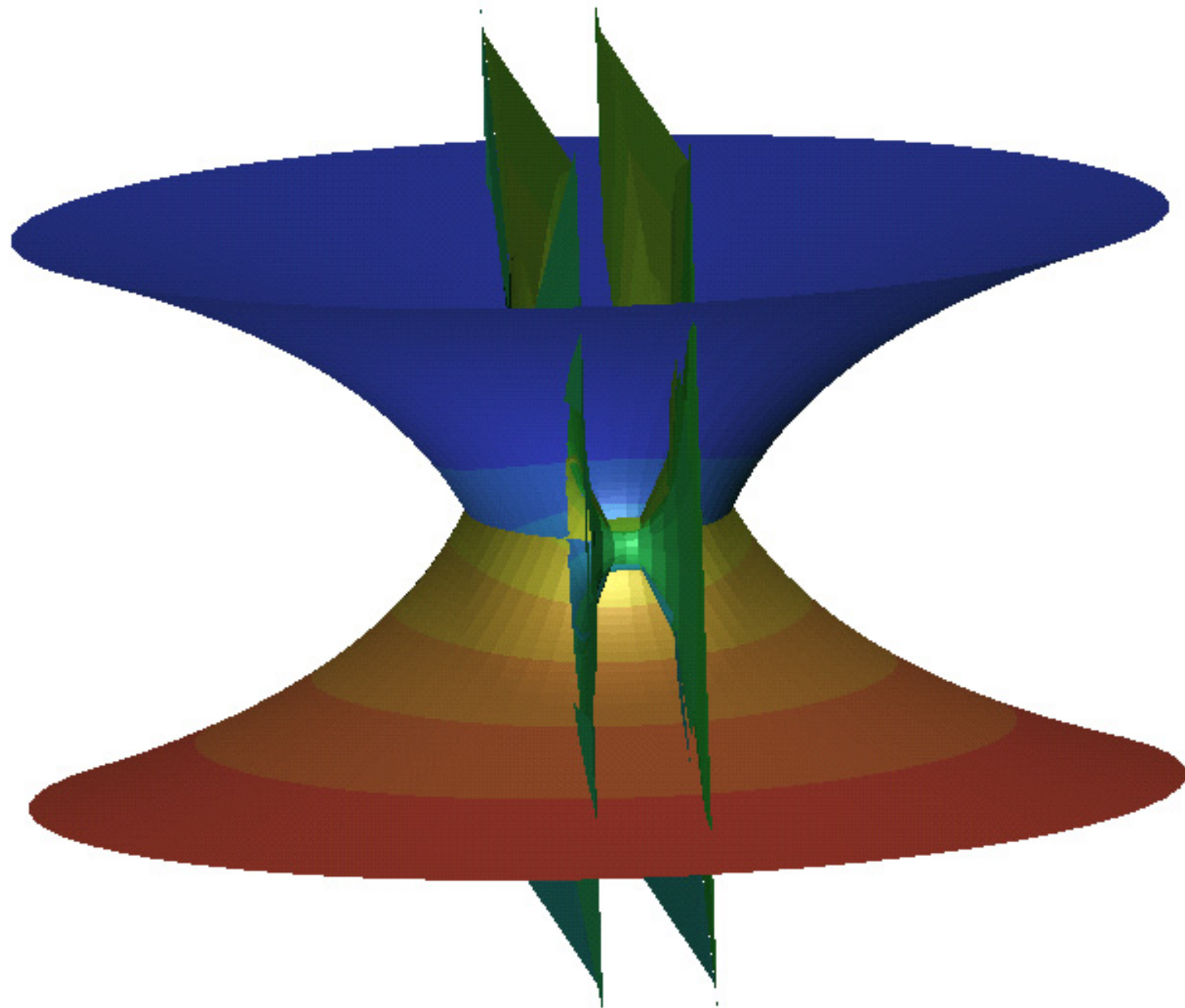
- Cuando  $c = 1/2$ , obtenemos una familia de superficies mínimas completas.
- Cada superficie corresponde a una inmersión de una esfera perforada en dos puntos, que producen dos fins.
- Cada superficie tiene un fin planar.
- El otro fin envuelve el catenoide infinitas veces.

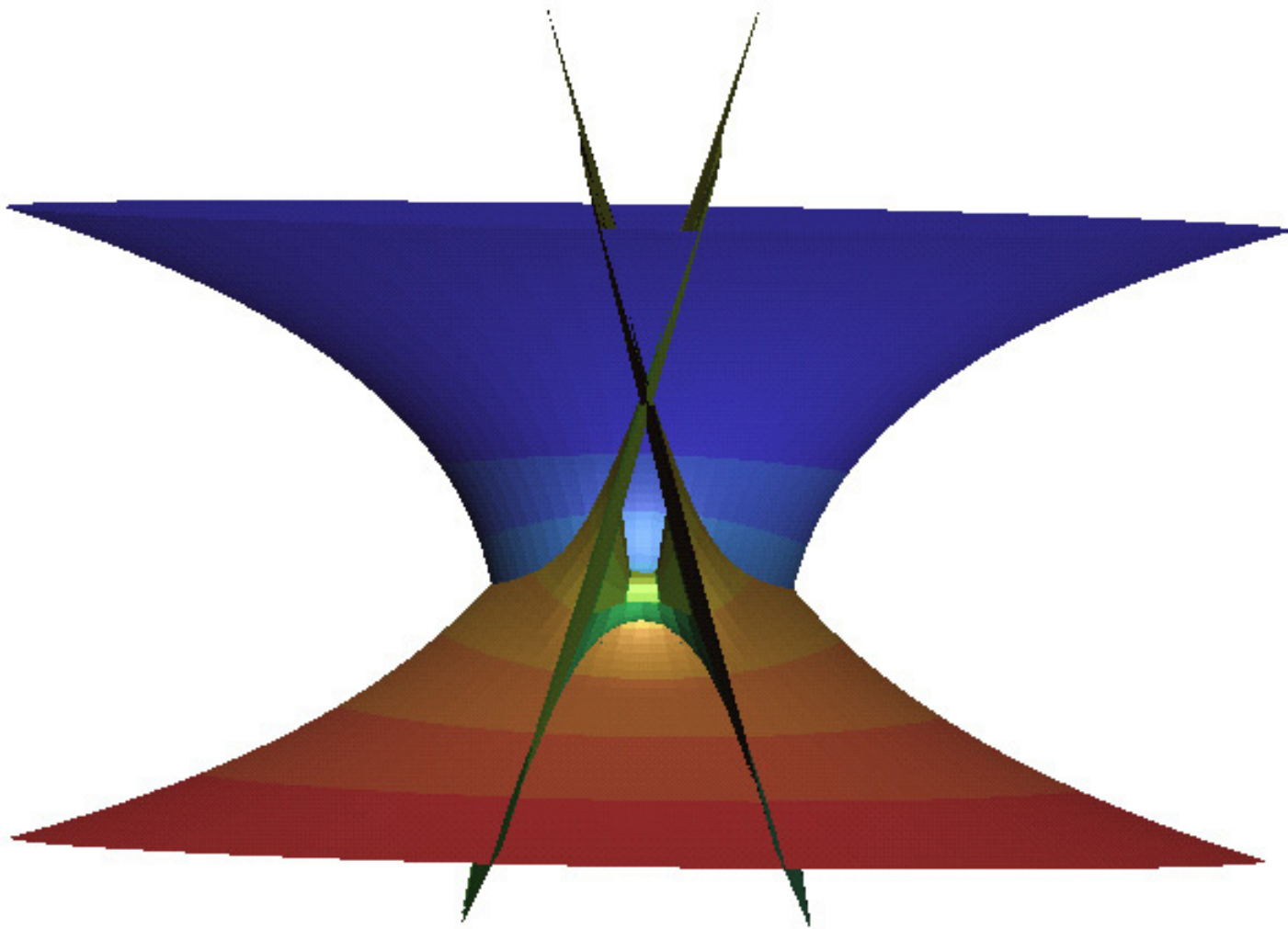




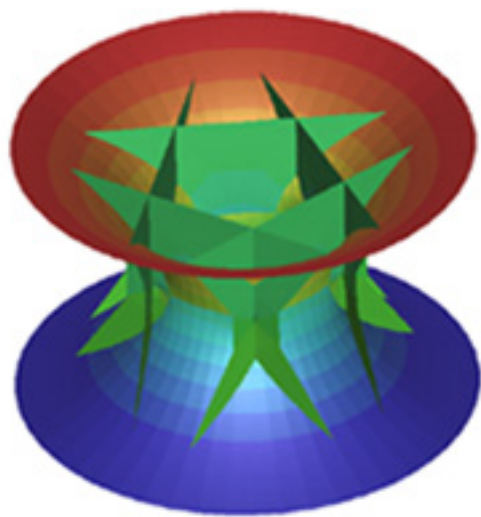
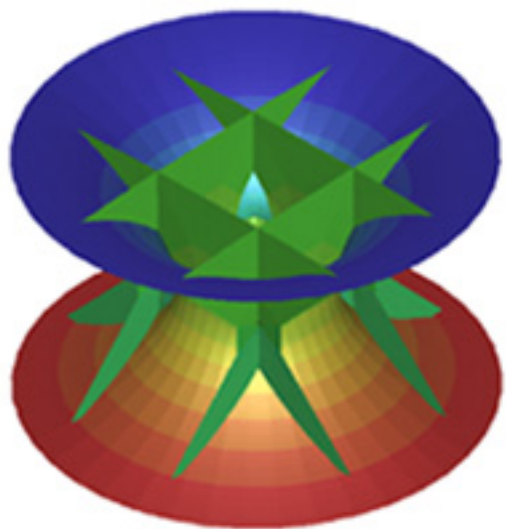
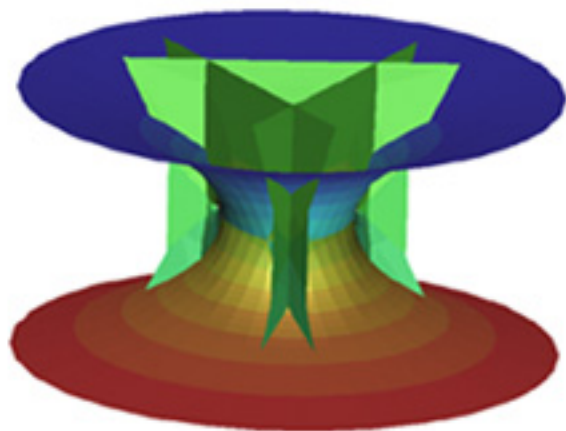
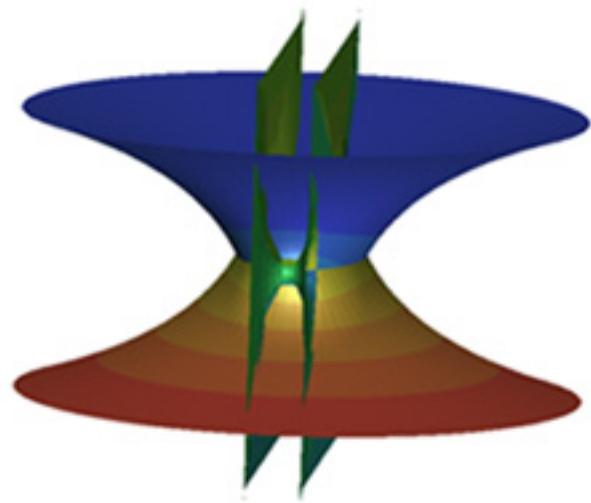
Cuando  $0 \neq c < 1/2$  y  $\sqrt{1-2c} = n/m$  es un número racional irreducible con  $n \neq m$ :

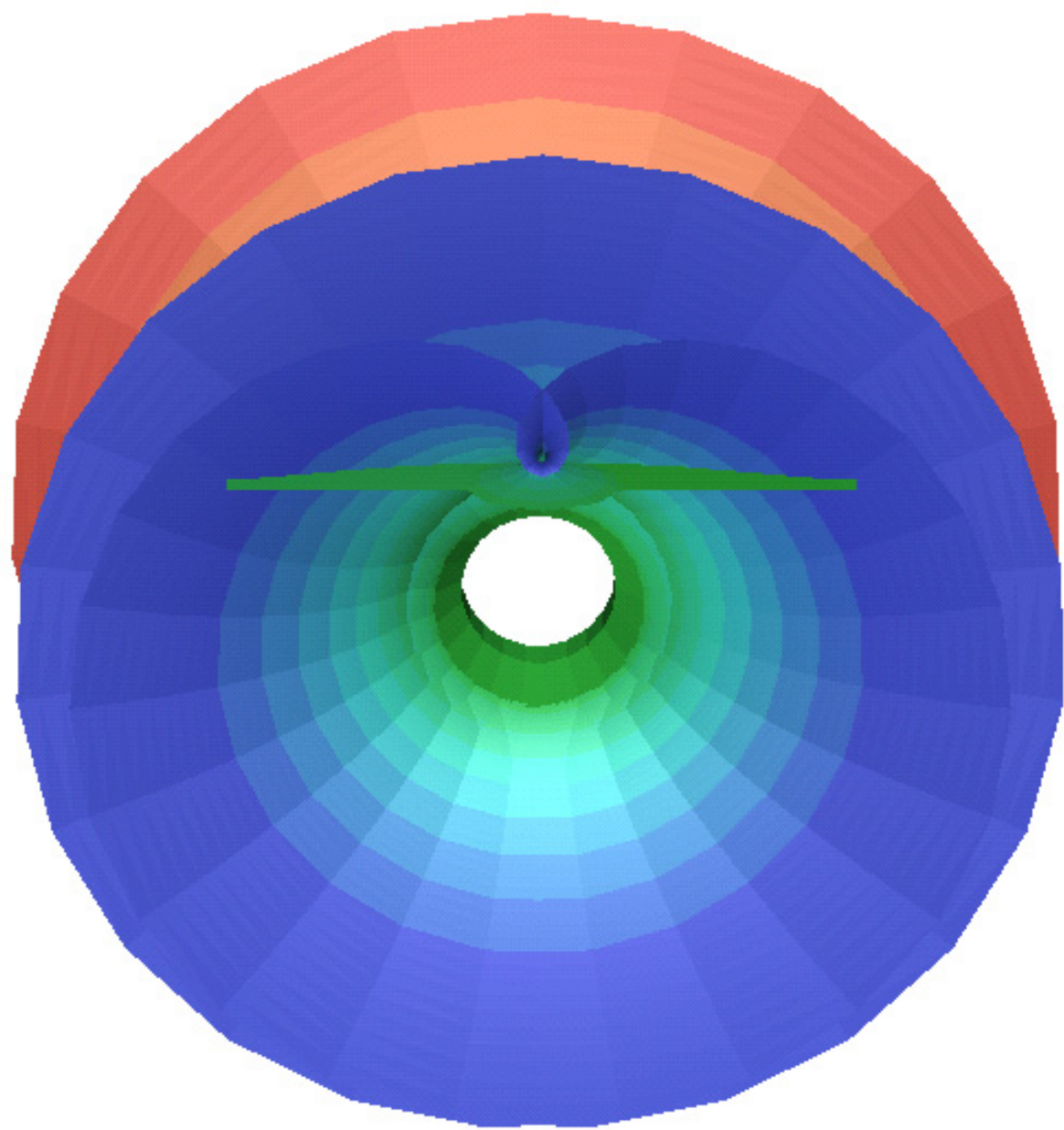
- Obtenemos una familia de superficies mínimas completas.
- $\tilde{X}$  es periódica en la variable  $u_2$ .
- Cada superficie corresponde a una imersión de una esfera perforada en  $n+2$  puntos.  $n$  puntos están en un círculo de la esfera.
- Cada superficie tiene:  $n$  fins planares y embebidos  
 $2$  fins no planares de índice geométrico  $m$  que crecen asintóticamente como los fins del catenoide.
- la curvatura total es  $-4\pi(n+m)$ .

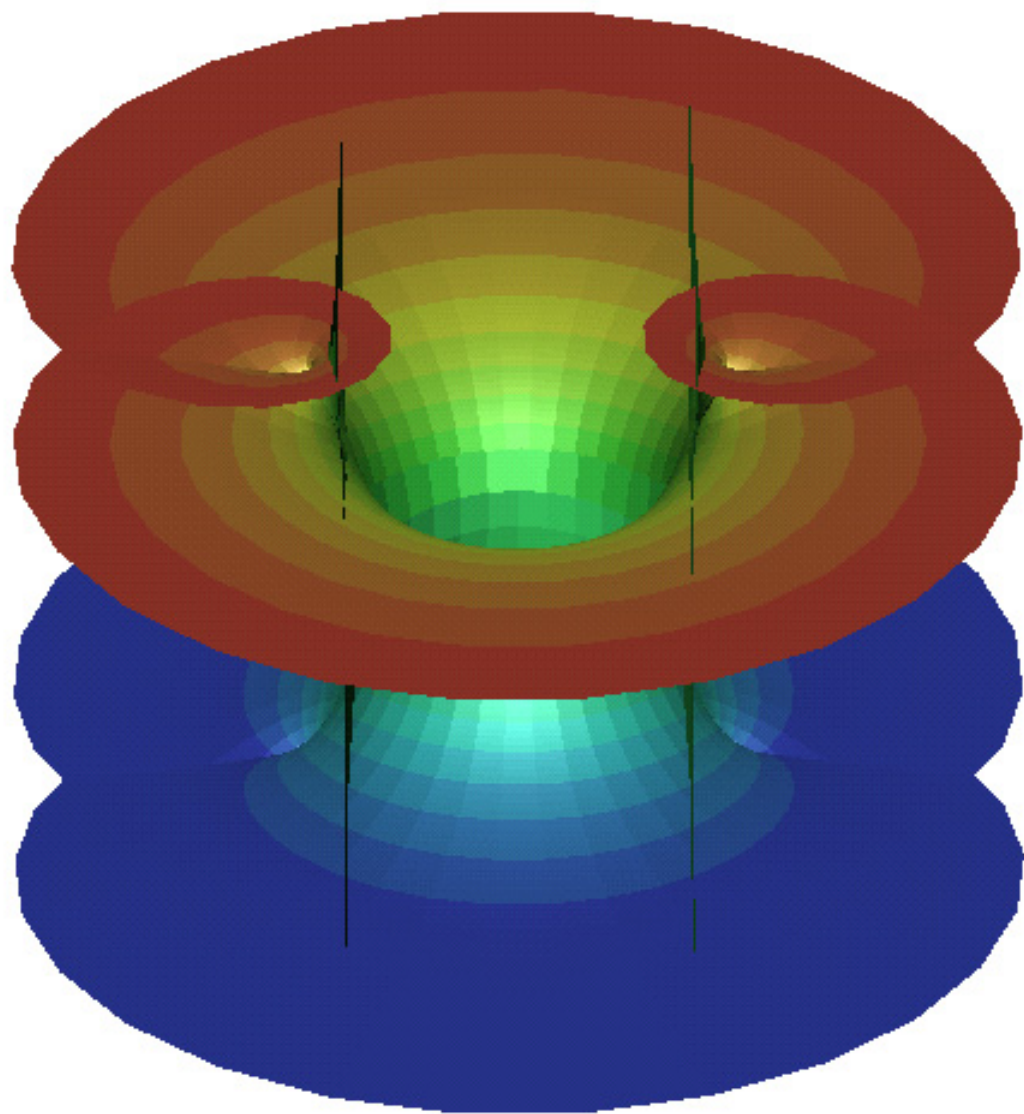


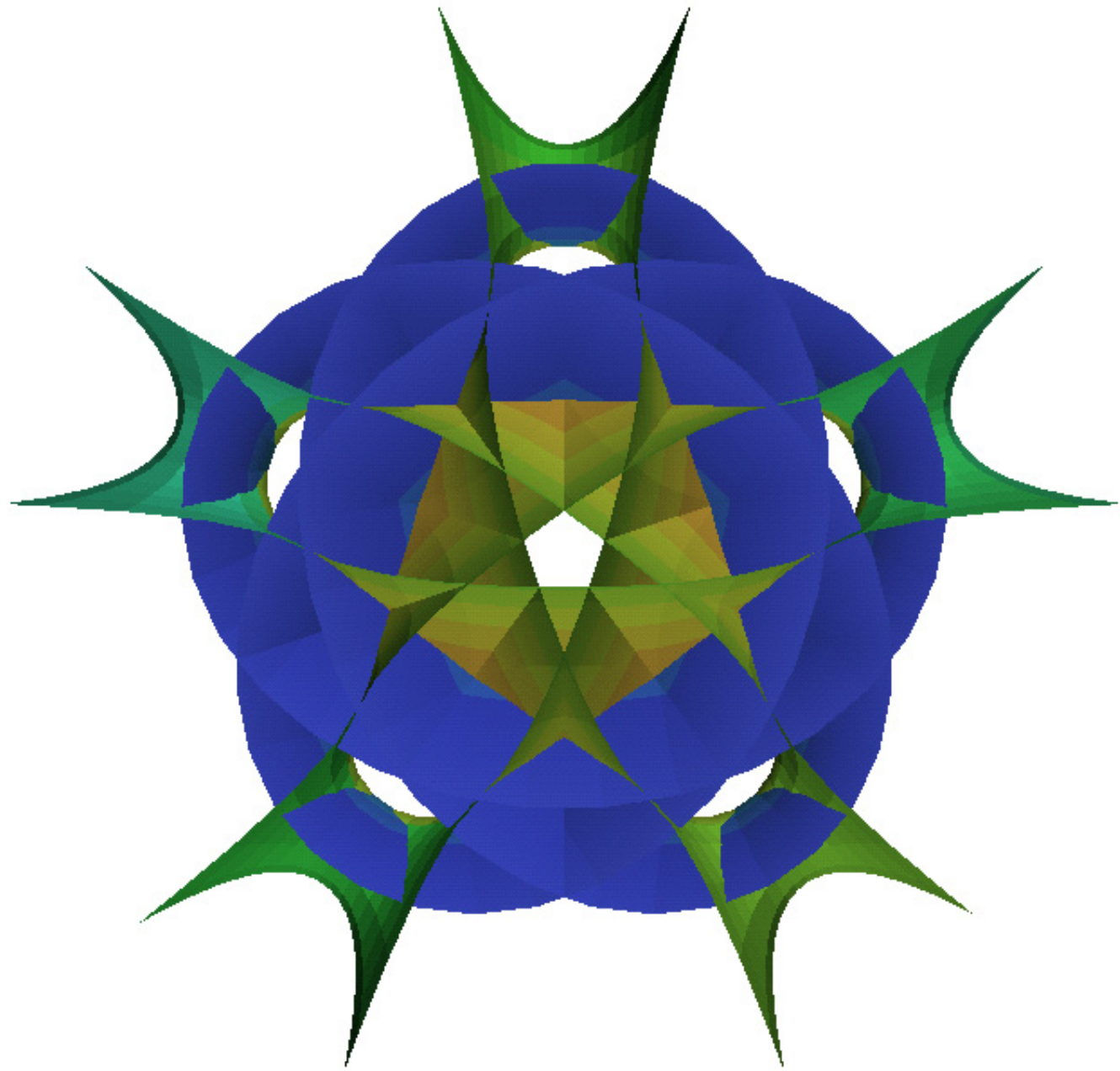


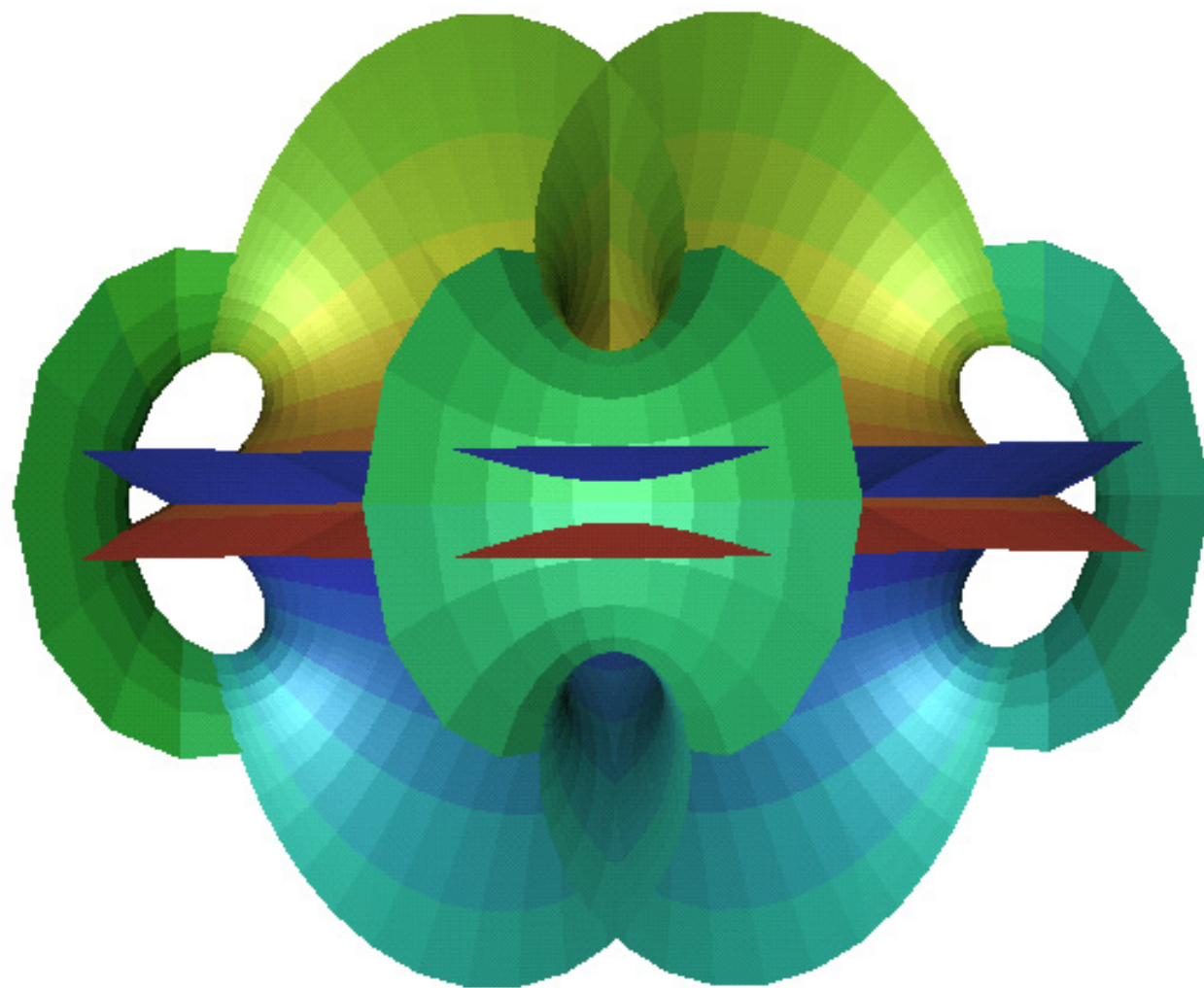


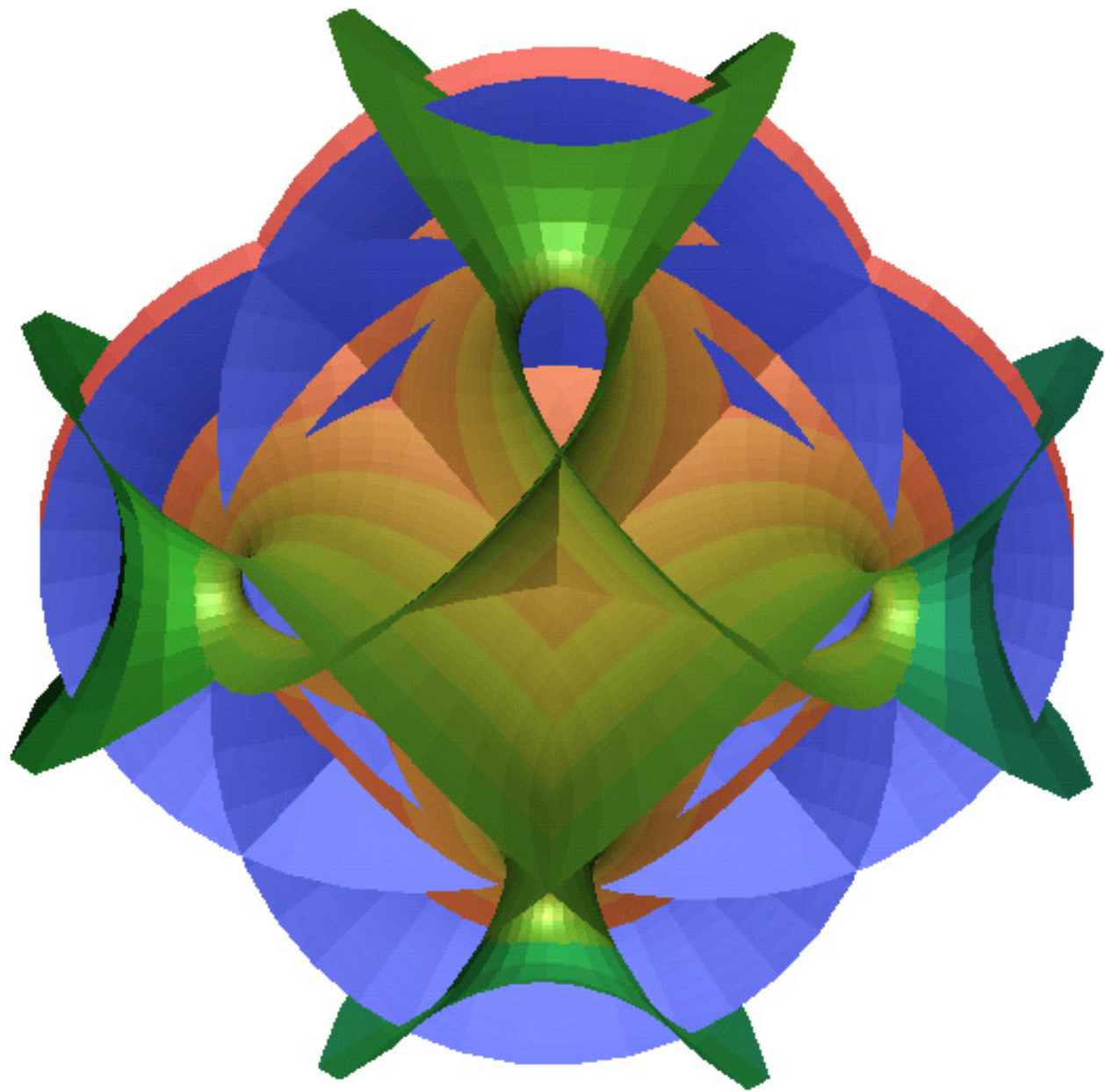


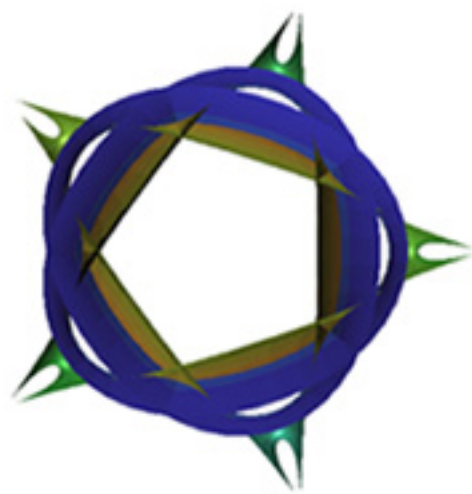
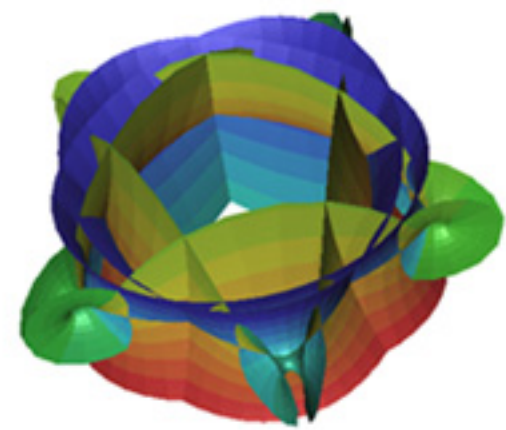
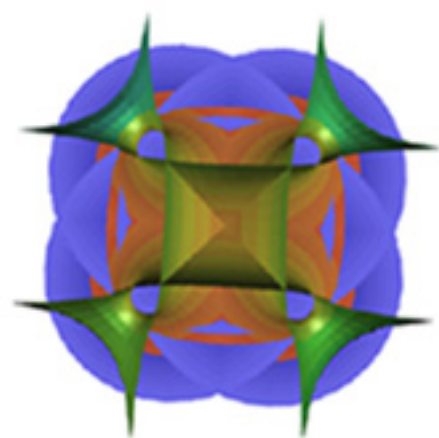
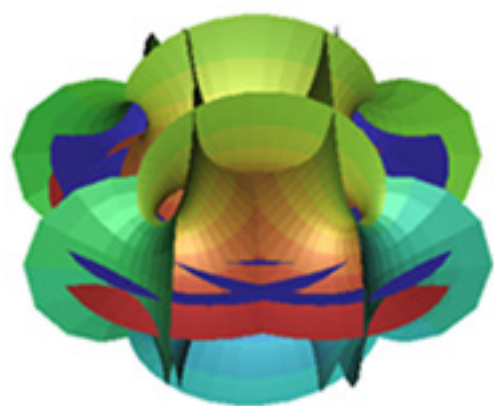
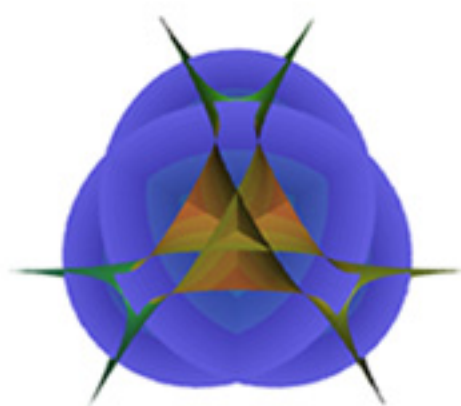
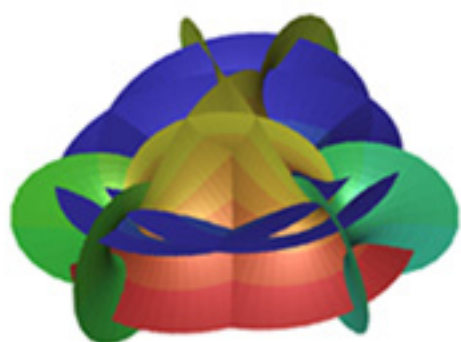












**Corolario Para cada  $j \geq 3$  tenemos un número finito de superficies minimas completas de curvatura total  $-4\pi j$ . Una tal superficie tiene a lo menos 1 y al máximo  $j - 1$  fins planares embebidos y 2 fins no planares.**



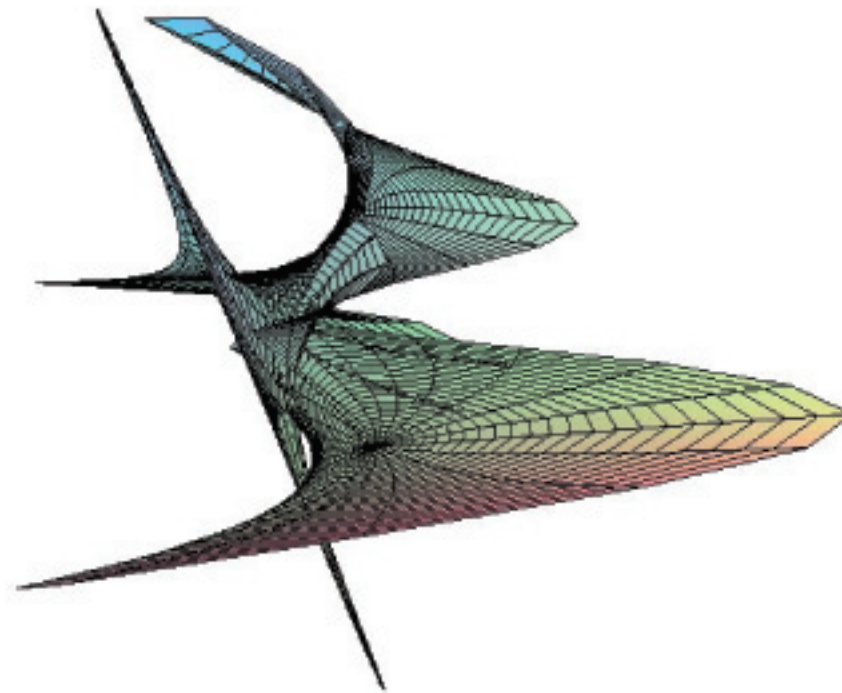
**Cuando  $c > 1/2$  o  $0 \neq c < 1/2$  y  $\sqrt{1-2c} \notin \mathbb{Q}$ :**

- **Obtenemos una familia de superficies mínimas completas que corresponden a la imersión de una esfera perforada en infinitos puntos contenidos en un círculo.**
- **Cada superficie tiene infinitos fins planares.**
- **Cada superficie  $\tilde{X}$  no es periódica en ninguna variable.**

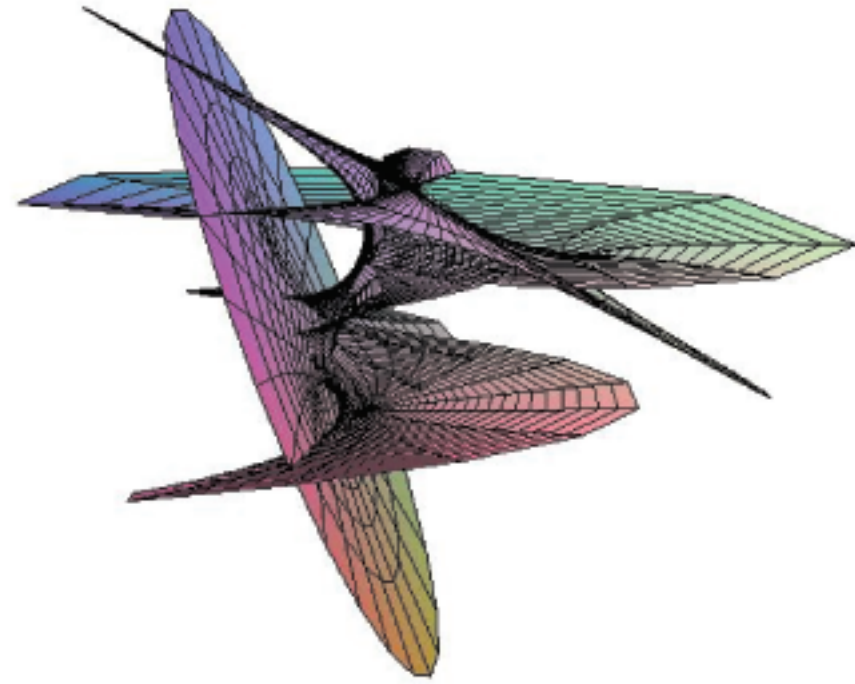
**Corolario. Cualquiera superficie mínima de la familia  $\tilde{X}_c$ , tal que  $0 \neq c < 1/2$ , con curvatura total infinita es el límite de una secuencia de superficies mínimas de la familia  $\tilde{X}_{(n,m)}$ , cuya curvatura total es  $-4\pi(n + m)$ .**

Estos resultados fueran estendidos para la familia de Bonnet, que es una **clase de superficies mínimas** de  $R^3$  que contiene la superficie de Enneper y o catenoide.

(Lemes, \_\_\_\_\_ Matem. Contemp. 2005)



**Superficie mínima asociada al helicoido**



## Transformaciones de Ribaucour para superficies LW

Dada una superficie linear Weingarten (LW)  $X(u_1, u_2)$ ,  
sin puntos umbílicos

Aplicando una transformación de Ribaucour

+

condición adicional que contiene una constante  $c \neq 0$

⇓

Sistema integrable

cuyas soluciones nos dan superficies LW asociadas a  $X$ .

## Superficies linear Weingarten (LW)

$$\alpha + \beta\mathbf{H} + \gamma\mathbf{K} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

**H y K son las curvaturas media y Gaussiana.**

**Decimos que es:**

**hiperbólica** cuando  $\Delta := \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

**elíptica** cuando  $\Delta > 0$

$\Delta = 0$  caracteriza las superficies **tubulares** en  $\mathbf{R}^3$ .

**En particular la superficie es:**

**hiperbólica** cuando  $\mathbf{K} = -1$

**elíptica** cuando  $\mathbf{K} = 1$ , cmc o mínima.

## Transformaciones de Ribaucour para superficies LW

(Corro, Ferreira, \_\_\_\_\_ 2003)

**Teorema B** Sean  $X$  y  $\tilde{X}$  superficies regulares de  $\mathbf{R}^3$  asociadas por una transformación de Ribaucour. Si  $\Omega_i$ ,  $\Omega$  y  $W$  satisfacen la condición adicional

$$S = 2c(\alpha\Omega^2 + \beta\Omega W + \gamma W^2)$$

donde  $c \neq 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . Entonces

$$\tilde{X} \text{ satisfice } \alpha + \beta\tilde{H} + \gamma\tilde{K} = 0,$$



$$X \text{ satisfice } \alpha + \beta H + \gamma K = 0.$$

## Casos especiales

- **Superficies cmc H**

$$\alpha = -\mathbf{H} \neq \mathbf{0}, \quad \beta = \mathbf{1}, \quad \gamma = \mathbf{0}$$

la condición algebraica se reduce a

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{c}\Omega(-\mathbf{H}\Omega + \mathbf{W}),$$

y  $\mathbf{c}$  tiene que satisfacer  $\mathbf{c}(\mathbf{c} - 2\mathbf{H}) > \mathbf{0}$ .

- **Superficies mínimas**

$$\alpha = \mathbf{0}, \quad \beta = \mathbf{1}, \quad \gamma = \mathbf{0}$$

la condición algebraica se reduce a

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{c}\Omega\mathbf{W}.$$



- Una transformación de Ribaucour en general no es conforme, i.e., no es una transformación de Darboux.
- Una transformación de Ribaucour de superficies linear Weingarten (Teorema B) es de Darboux  $\Leftrightarrow H$  es constante (Lemes, Roitman, \_\_\_\_\_, Tribuzy).
- Teorema B se estende a superficies em  $S^3$  y  $H^3$  (Wang, \_\_\_\_\_ 2008).

## Superficies LW asociadas al cilindro

**Proposición.** Considere el cilindro

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\cos(\mathbf{u}_2), \sin(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_1)$$

como una superficie LW que satisface  $-1/2 + \mathbf{H} + \gamma\mathbf{K} = \mathbf{0}$ . Las superficies localmente asociadas a  $X$  por una transformación de Ribaucour como en el Teorema B, satisfacen  $-1/2 + \tilde{\mathbf{H}} + \gamma\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$  y son dadas por

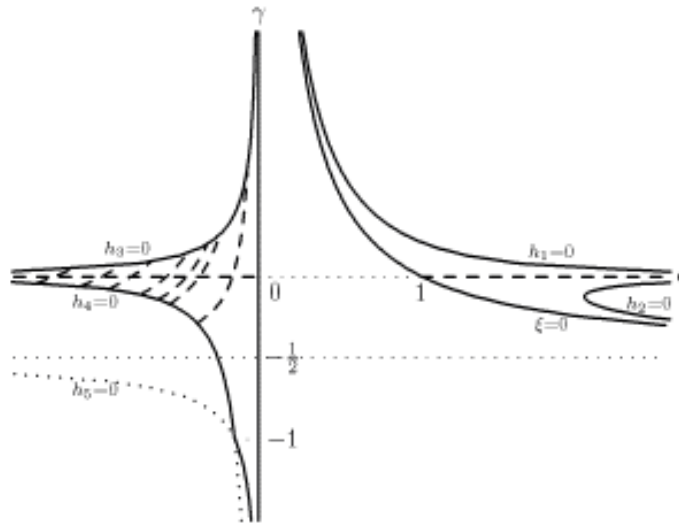
$$\tilde{\mathbf{X}}_{c\gamma} = \mathbf{X} - \frac{2(\mathbf{f} + \mathbf{g})}{c[(2\gamma + 1)\mathbf{g}^2 - \mathbf{f}^2]}(\mathbf{f}'\mathbf{X}_{\mathbf{u}_1} + \mathbf{g}'\mathbf{X}_{\mathbf{u}_2} - \mathbf{g}\mathbf{N})$$

donde  $c \neq 0$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_1)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{u}_2)$  son soluciones de

$$\mathbf{f}'' + c\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}'' + \xi\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

$$\xi(c, \gamma) = 1 - c(2\gamma + 1)$$

$c$  y  $\xi$  no son positivos simultáneamente.



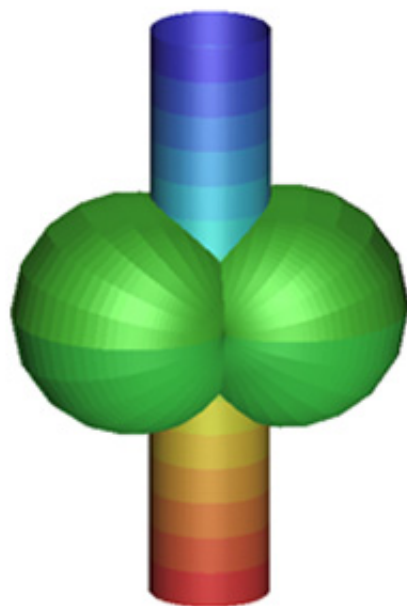
- $\tilde{X}_{c\gamma}$  es completa cuando  $(c, \gamma)$  está en una de las dos regiones.
- Si  $\gamma < -1/2$  la superficie es LW hiperbólica completa.
- $\tilde{X}_{c0}$  son superficies cmc ( $\gamma = 0$ ).
- En las curvas tracejadas a izquierda  $\xi = 1 - c(2\gamma + 1) = \frac{n^2}{m^2}$ ,  $\frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$ .

- Si  $c < 0$  y  $\sqrt{\xi(c, \gamma)} = n/m$ , la superficie LW es la imersión de un cilindro en  $R^3$  con 2 fins de índice geométrico  $m$  y  $n$  puntos aislados de curvatura Gaussiana máxima (mínima).
- Los fins son embebidos  $\Leftrightarrow m = 1$
- La curvatura total absoluta es  $8\pi n$ .
- Si  $c\xi \geq 0$  la superficie tiene 4 curvas de singularidad.
- Las superficies LW localmente asociadas al cilindro por una transformación de Ribaucour se aproximan asintóticamente del cilindro.

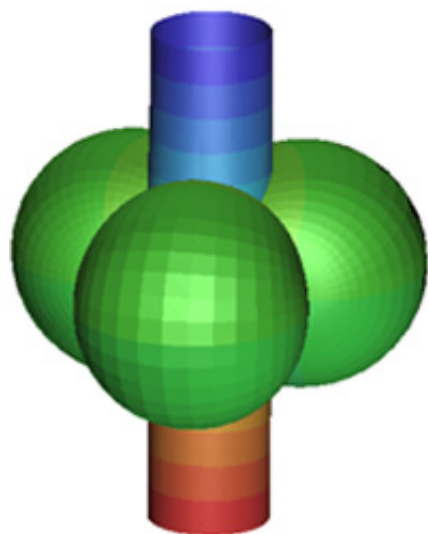
En particular si  $c < 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\sqrt{1-c} = n/m$

- Son imersiones completas de un cilindro en  $R^3$  con  $H = 1/2$ .
- 2 fins de índice geométrico  $m$  y  $n$  puntos aislados de curvatura Gaussiana máxima (mínima).
- Los fins son embebidos  $\Leftrightarrow m = 1$ . En este caso son fins cilindricos.
- La curvatura total absoluta es  $8\pi n$ .

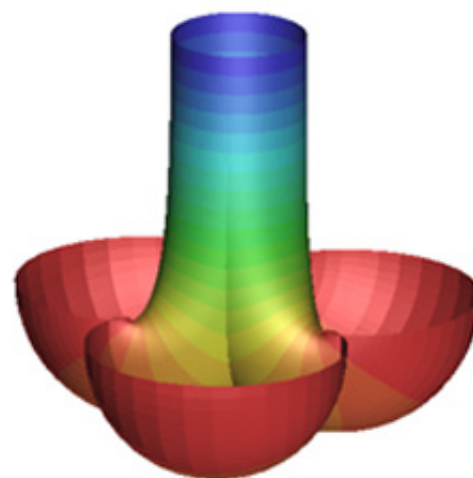
Si  $c > 1$  o  $c < 0$  y  $\sqrt{1-c}$  no es un número racional, tenemos una imersión de  $R^2$  en  $R^3$  con  $H = 1/2$  y infinitos puntos críticos aislados de la función curvatura Gaussiana.



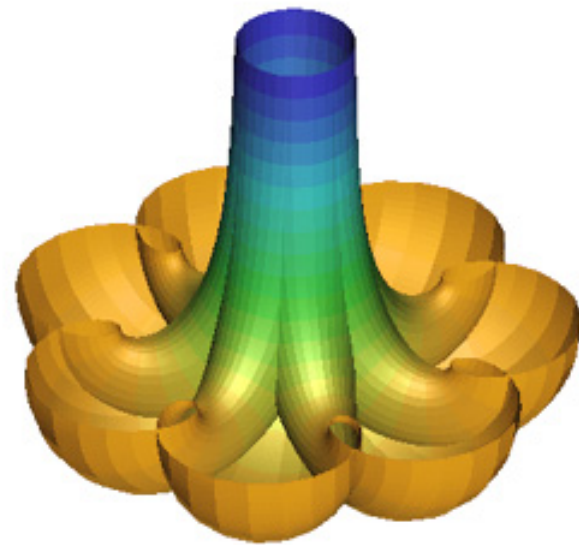
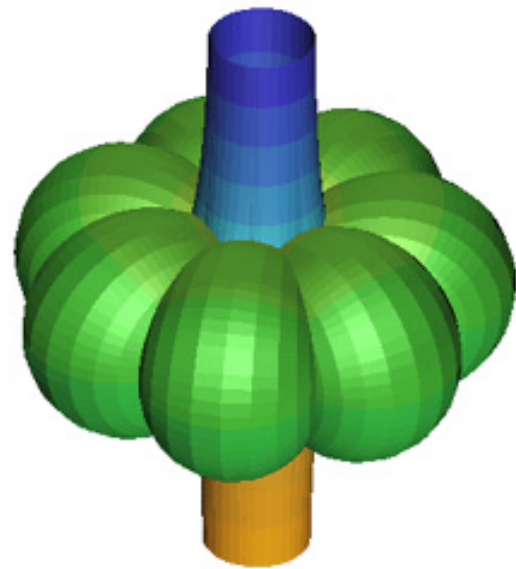
cmc-surface  $\gamma = 0$   $\sqrt{1-c} = 2$



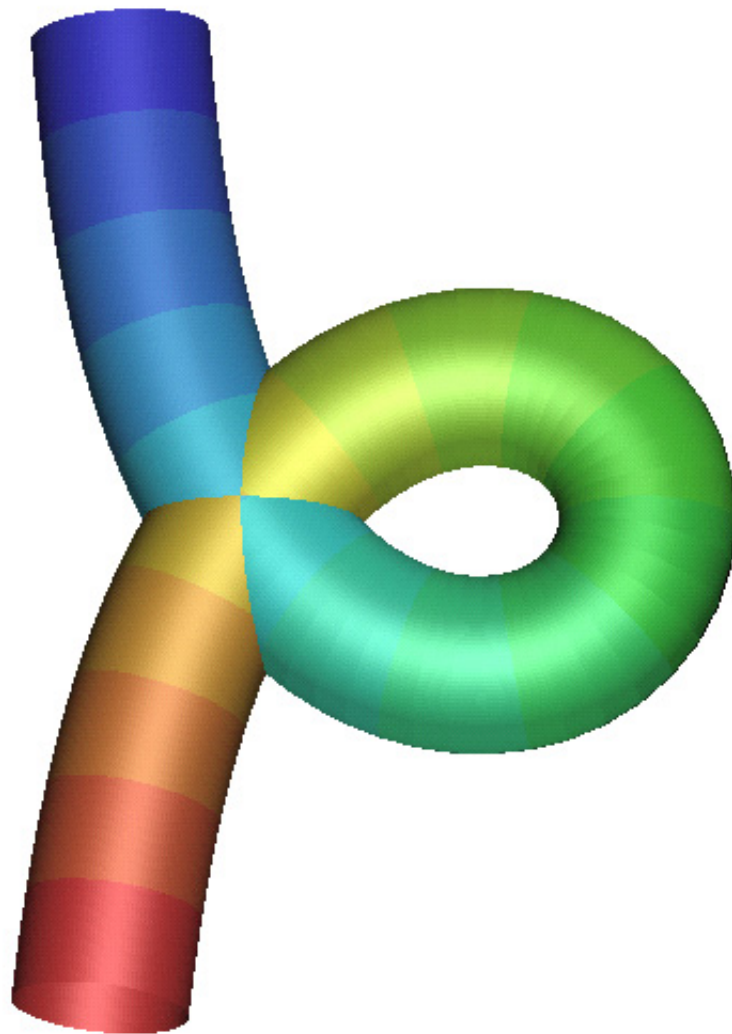
cmc-surface



$\gamma = 0$   $\sqrt{1-c} = 3/2$

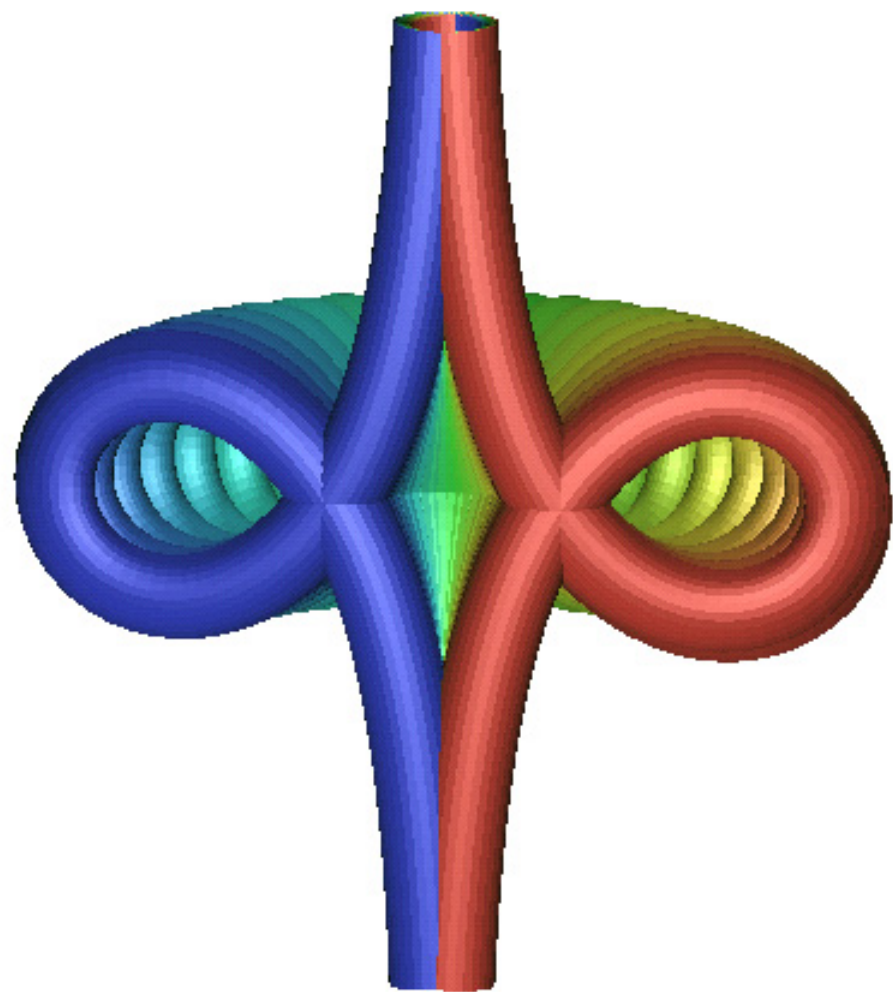


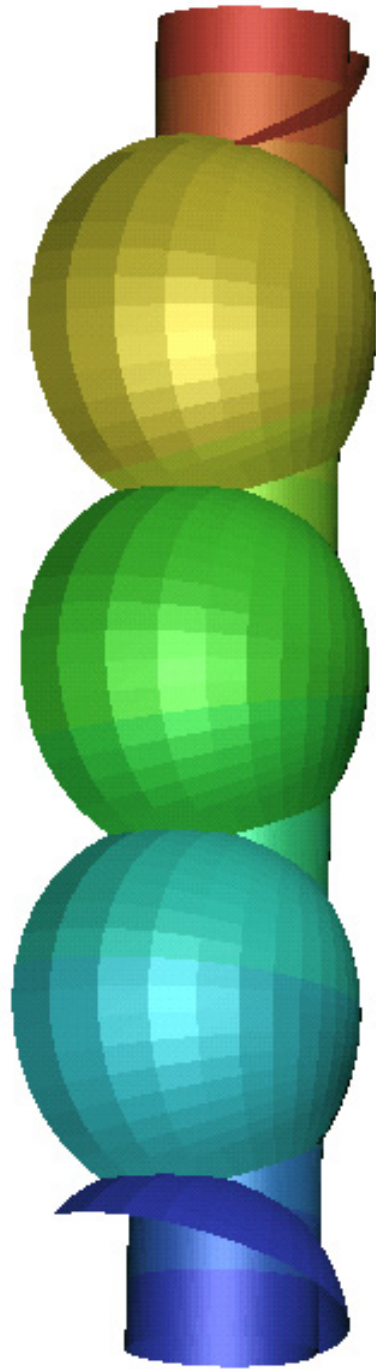
cmc-surface  $\sqrt{1-c} = 7/6$



1-periodic Weingarten surface  $c=-0.1$   $\gamma=-1/2$







## Superfícies de Delaunay

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\rho(\mathbf{u}_1) \cos(\mathbf{u}_2), \rho(\mathbf{u}_1) \sin(\mathbf{u}_2), \varphi(\mathbf{u}_1)),$$

donde  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbf{R}$  y  $1 - 4aH > 0$ ,

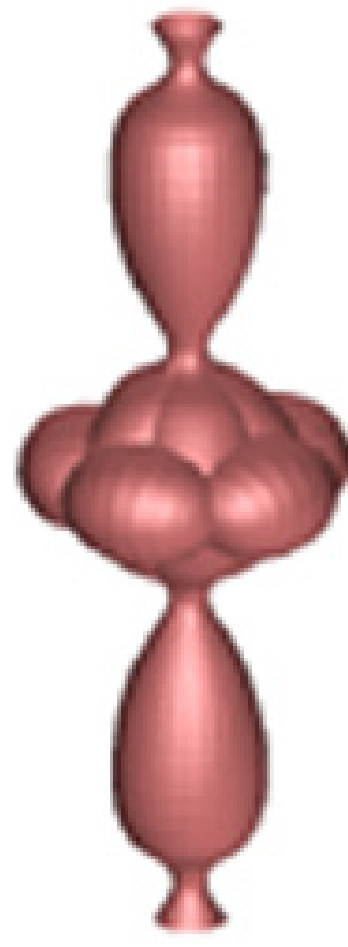
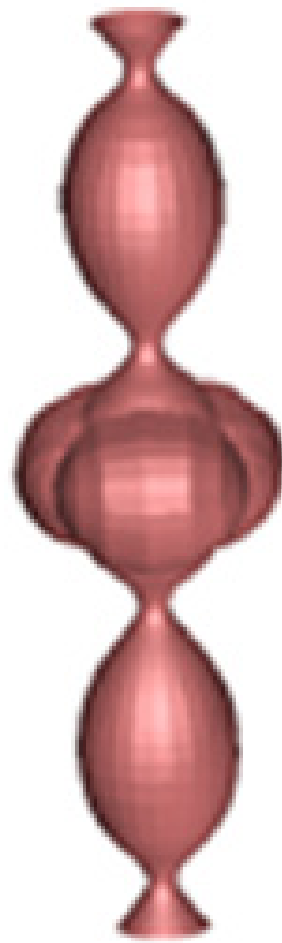
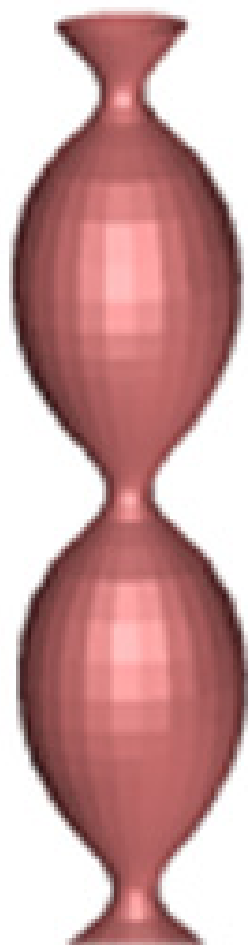
$$\rho(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2H}} \left( 1 - 2aH + \sqrt{1 - 4aH} \cos(2Hu_1) \right)^{1/2},$$

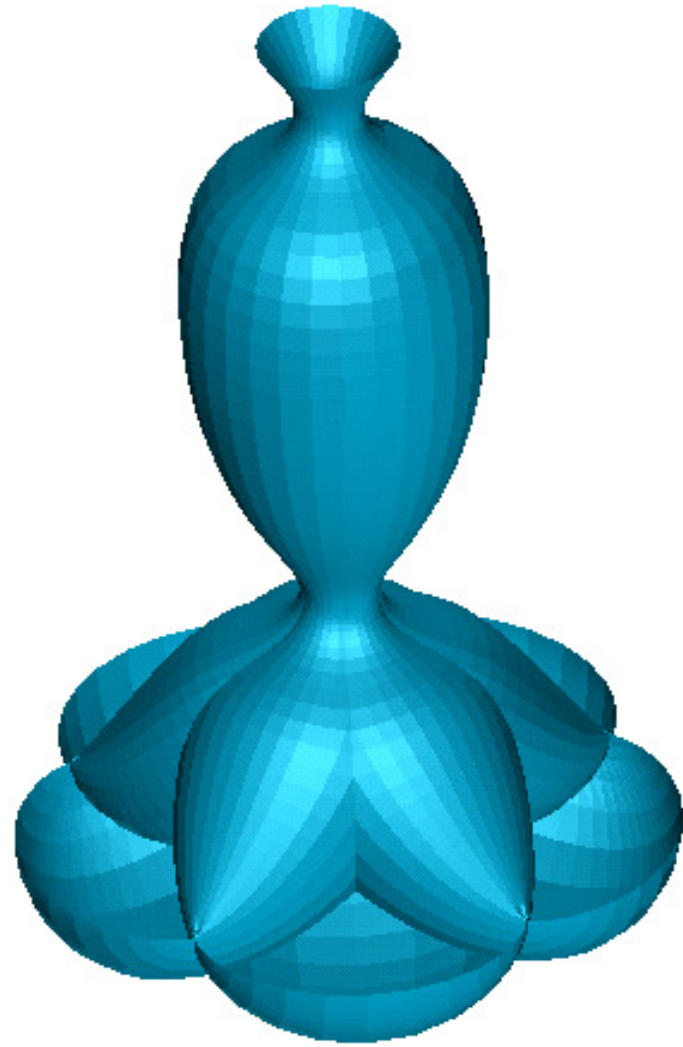
$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \int_0^{u_1} \left( H\rho + \frac{a}{\rho} \right) dt \quad \mathbf{u}_1 \in \mathbf{R}.$$

Superficies de rotación que resultan de girar las curvas:

**ondulóides** cuando  $a > 0$

**nodóides** cuando  $a < 0$ .





- **Transformaciones de Ribaucour para dimensiones maiores (Corro, Dajczer, Ferreira, \_\_\_\_\_, Tojeiro).**
- **Transformaciones que llevan una hipersuperficie de Dupin en otra de Dupin, (Corro, Ferreira, \_\_\_\_\_, 1999).**