TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 3
– Grado en Matemáticas. Curso 2013/14 –

Nombre:

1. Probar que cada pareja de conjuntos no son homeomorfos:
   (a) $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{RP}^2$.
   (b) $A = \{(x, y) : y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x > 0\}$ y $B = A \cup \{(0, 0)\}$.
   (c) $A = (\{0\} \times (-1, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$ y $B = (\{0\} \times (-1, 1)) \cup ([0, 1] \times \{0\})$.
   (d) $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$.
2. Componentes conexas de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \{-1, 1\}\}$.
3. Estudiar la compacidad de $(\mathbb{R}, \tau_d)$. Caracterizar los subconjuntos compactos.
4. Sea $p \notin \mathbb{R}$. En $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ se considera la topología τ que tiene por base $\beta = \beta_u \cup \{(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{p\} : a < b\}$. Estudiar la conexión y compacidad de (X, τ).

`Razonar todas las respuestas`

SOLUCIONES

1. (a) $\mathbb{R}^2$ no es compacto pues no es acotado. El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ es compacto al ser cociente de $\mathbb{S}^2$, que es compacto.

   (b) Si fueran homeomorfos, al quitar de B el punto $(0,0)$, se tendría que $B - \{(0,0)\} = A$ es homeomorfo a A menos un punto. El conjunto A es grafo de una función, luego homeomorfo al dominio, a saber, $(0,\infty)$, que es conexo. Si le quitamos un punto, nos queda intervalo, luego no es conexo, pero sí lo es $B - \{(0,0)\} = A$.

   (c) Supongamos que A es homeomorfo a B. Le quitamos a A dos puntos, a saber, $(0,1)$ y $(1,0)$. El conjunto que queda es conexo, pues

   $$A - \{(0,1),(1,0)\} = (\{0\} \times (-1,1)) \cup ([0,1) \times \{0\})$$

   que es unión de conexos (ambos son productos de conexos de $\mathbb{R}$) y su intersección no es vacía, pues contiene a $(0,0)$.

   Por otro lado, si a B le quitamos dos puntos, nos queda no conexo, probando que no son homeomorfos. El único punto de B que al quitarlo queda conexo es $(1,0)$. Si le quitamos otro, queda no conexo.

   (d) El espacio $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ es compacto al ser producto de compactos, pero si $\mathbb{S}^1 \times (0,1)$ fuera compacto, cada uno de los factores también lo sería, llegando a una contradicción pues $(0,1)$ no lo es (no es cerrado).

2. (a) Los conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos, luego los conexos de $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ son los intervalos incluidos en A. Pero los únicos posibles son los puntos $\{1/n\}$. Por tanto las componentes conexas son los puntos.

   (b) Sea $B = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \{-1,1\}\}$. Se tiene que

   $$B = (\mathbb{R} \times (-\infty,-1)) \cup (\mathbb{R} \times (-1,1) \cup (\mathbb{R} \times (1,\infty)).$$

   Cada uno de los conjuntos de estas uniones es conexo porque es producto de conexos. También es abierto, al ser producto de abiertos. Hemos conseguido una partición por abiertos conexos, luego dicha partición es la de las componentes conexas.

3. El espacio no es compacto: si tomamos $\mathbb{R} = \cup_{a \in \mathbb{R}}[a,\infty)$, y si fuera compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R} = [a_{i_1},\infty) \cup \ldots \cup [a_{i_n},\infty)$. Pero esta unión es un intervalo de la forma $[a,\infty)$, que no es $\mathbb{R}$.

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Tomando el mismo recubrimiento que antes, si A es compacto, se tendría

$$A \subset [a_{i_1}, \infty) \cup \ldots \cup [a_{i_n}, \infty) = [a_m, \infty), \quad m = \min\{a_{i_1}, \ldots, i_n\}.$$

Esto prueba que A está acotado inferiormente. Veamos que

A es compacto si y sólo si A tiene mínimo.

($\Rightarrow$) Ya sabemos que tiene ínfimo. Si dicho ínfimo α no es mínimo, consideramos

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\alpha + \frac{1}{n}, \infty).$$

Si fuera compacto, A estaría incluido en un intervalo de la forma $[\alpha + \frac{1}{m}, \infty)$ obteniendo que $\alpha + 1/n (> \alpha)$ es una cota inferior: contradicción

($\Leftarrow$) Supongamos que A está recubierto por intervalos de la base. Uno de ellos contendrá al mínimo α pues $\alpha \in A$. Esto quiere decir que $\alpha \subset [a_{i_0}, \infty)$. Como α es el mínimo, de esta inclusión se prueba que $A \subset [a_{i_0}, \infty)$, obteniendo el recubrimiento finito.

Supongamos que A está acotado inferiormente por α: $\alpha \leq a, \ \forall a \in A$.

4. Primero observemos que la topología inducida en $\mathbb{R}$ es la usual. Para ello, una base de $\tau_{|\mathbb{R}}$ es la intersección de β con $\mathbb{R}$, obteniendo: $\beta_u \cup \{(-\infty, a) \cup (b, \infty) : a < b\}$. Ya que los conjuntos $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ son abiertos en τ_u, entonces tenemos β_u junto con abiertos de τ_u. Por tanto, la topología que genera esta familia de subconjuntos es τ_u.

   Sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_{|\mathbb{R}}) = (\mathbb{R}, \tau_u)$ es conexo. Por otro lado, $p \in \overline{\mathbb{R}}$: basta darse cuenta de que todo elemento de la base β que contiene a p, a saber, $(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{p\}$, interseca a $\mathbb{R}$, ya que esta intersección es justamente $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Como p es adherente, entonces $\mathbb{R} \cup \{p\} = X$ es conexo.

   El espacio es compacto. Sea $X = \cup_{i \in I} B_i$ un recubrimiento por abiertos de β. Sea $i_0 \in I$ tal que $p \in B_{i_0}$. Por tanto, B_{i_0} es de la forma $(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{p\}$. Entonces $X - B_{i_0} = [a, b]$, que es un compacto porque la topología inducida de X es la misma que la de $\mathbb{R}$, que es la usual. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b] \subset B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_n}$. Esto prueba que $X = B_{i_0} \cup B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_n}$, obteniendo el recubrimiento por abiertos buscado.