TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 2

– Grado en Matemáticas. Curso 2013/14 –

<u>**Nombre**</u>**:**

1. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_d)$, $f(x) = \sin(x)$.

2. Probar que los espacios de cada pareja son homeomorfos entre sí:

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$, $B = [0, 1]$.

   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

   (c) $A = (0, 1) \cup [2, 3]$, $B = (5, 7) \cup [10, 12]$.

3. Se considera $(\mathbb{R}, \tau)$ donde τ es la topología del punto incluido para $p = 1$. Estudiar la continuidad global de la aplicación $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$, $f(x, y) = y - x$. Hallar el interior del conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau)$.

4. En $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$ se define la relación

$$(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y) = (x', y') \\ (0, 0)\ R\ (0, 1) \\ (1, 0)\ R\ (1, 1) \end{array} \right.$$

   Hallar y probar a qué subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo X/R.

Razonar todas las respuestas

Soluciones

1. Una base de entornos de $x \in (\mathbb{R}, \tau_u)$ es $\beta_x = \{(x-r, x+r) : r > 0\}$ y de $x \in (\mathbb{R}, \tau_d)$ es $\beta'_x = \{[x, \infty)\}$. La continuidad de f en x se expresa como: encontrar $r > 0$ tal que
$$f((x-r, x+r)) \subset [\sin(x), \infty) \Leftrightarrow f((x-r, x+r)) \geq \sin(x).$$
Analizando la gráfica de la función seno, se observa que para todo $r > 0$, $f((x-r, x+r))$ tiene puntos menores estrictos que $\sin(x)$. Esto está asegurado al menos en los puntos donde la función es creciente o decreciente. En los puntos donde el seno es 1, es decir, si $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la continuidad equivale a que $f((x-r, x+r)) \geq 1$, lo cual es imposible. Y en los puntos donde el seno es -1, es decir, si $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $\sin(x) = -1$, y la continuidad exige que $f((x-r, x+r)) \geq -1$, que siempre es cierto.

   Por tanto, la función sólo es continua en los puntos donde el seno es -1, es decir, $\{3\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. (a) El conjunto A es el grafo sobre el eje y de la función $f(y)\sqrt{1-x^2}$ definida en $[-1, 1]$. Por tanto, $A = G(f) \cong [-1, 1]$ y se sabe que dos intervalos cerrados son homeomorfos entre sí, luego homeomorfo a B.

   [Otra forma. Hacemos en $\mathbb{R}^2$ un giro de 90 grados (que es un homeomorfismo) y lleva A en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$. Este conjunto es el grafo de la función $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ definida en $[-1, 1)$ y el argumento sigue los mismos pasos que antes.]

   (b) El conjunto A es $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Como $(0, \infty) \cong \mathbb{R}$ ya que dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre sí, entonces $A \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ahora bien, el producto topológico de $\mathbb{R}$ con la topología usual sobre sí mismo es $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. Por tanto, $A \cong \mathbb{R}^2$. El conjunto B es una bola y se probó en clase que una bola de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

   (c) Escribimos $A = A_1 \cup A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$. Sabemos que $A_1 \cong B_1$ (los dos son intervalos abiertos) y que $A_2 \cong B_2$ (los dos son intervalos cerrados). El homeomorfismo entre A y B es el que lleva A_1 en B_1 y A_2 en B_2 y observando que A_1 y A_2 son conjuntos abiertos *en* A:
$$A_1 = (0, 1) \cap A, \ A_2 = (1, 5) \cap A.$$
   La continuidad de la inversa sigue los mismos pasos, observando de nuevo, que B_1 y B_2 son abiertos *en* B.

   [Nota: Los conjuntos A_1 y A_2 también son cerrados en A, luego el argumento de continuidad también se pueda realizar usando este hecho: $A_1 = [0, 1] \cap A$ y $A_2 = [2, 3] \cap A$.]

3. (a) El conjunto $O' = \{1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}, \tau)$. Hallamos su imagen inversa: $(x, y) \in f^{-1}(O')$ si $y - x \in \{1\}$, es decir, $f^{-1}(O') = \{(x, y) : y = x + 1\}$, es decir, es una recta del plano. Este conjunto no es abierto en $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ ya que al menos, contendría un elemento de la base $\tau \times \tau$, es decir, al menos $G_1 \times G_2 \in f^{-1}(O')$, con $G_i \in \tau$. En particular, $(1, 1) \in f^{-1}(O')$, lo cual no es cierto. Esto prueba que la aplicación no es continua globalmente.

   [Nota: se puede tomar otros abiertos O', tales como $O' = \{1, 2\}$, cuya imagen inversa son dos rectas paralelas y ninguna contiene al $(1, 1)$. Si se hubiera tomado como abierto el conjunto $G' = \{0, 1\}$, entonces sí contiene al $(1, 1)$, pero esto no quiere decir que el conjunto $f^{-1}(G')$ sea abierto, ya que la topología $\tau \times \tau$ *no* es la topología del punto incluido en $\mathbb{R}^2$ para el punto $(1, 1)$. En verdad, tampoco dicho conjunto es abierto, ya que $(0, 0) \in f^{-1}(G')$ y si es un punto interior, entonces $(0, 0) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\} \subset f^{-1}(G')$, lo cual tampoco es cierto.]

   (b) Sea $(x, y) \in int(A)$. Entonces existe $O, O' \in \tau$ tal que $(x, y) \in O \times O' \subset A$. Ya que $1 \in O, O'$, entonces $(1, 1) \in A$, lo cual es falso. Esto prueba que $int(A) = \emptyset$.

4. El conjunto cociente X/R es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ donde $f : X \to \mathbb{S}^1$ está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (\cos(\pi x), \sin(\pi x)) & y = 0 \\ (\cos(\pi(1 - x) + \pi), \sin(\pi(1 - x) + 1)) & y = 1 \end{cases}$$

La aplicación f lleva $[0, 1] \times \{0\}$ en la parte de arriba de $\mathbb{S}^1$ y lleva $[0, 1] \times \{1\}$ en la de abajo de $\mathbb{S}^1$, continuando desde el punto $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$. Por tanto, $R = R_f$. Además esto prueba que es sobreyectiva.

[Con algo más de detalle. Si $y = 0$, πx varía de 0 a π conforme vamos recorriendo el intervalo $[0, 1]$. Si $y = 1$, $(\pi(1 - x) + \pi$ va de 2π a π, conforme vamos de 0 a 1. Por tanto, en el primer trozo, se cubre la parte de arriba ($y \geq 0$) de $\mathbb{S}^1$ y en el segundo trozo, la parte de abajo ($y \leq 0$) de $\mathbb{S}^1$. Además, $f(0, 0) = f(0, 1)$ y $f(1, 0) = f(1, 1)$.]

La aplicación f es continua, ya que es continua en cada trozo de X (componiendo con las proyecciones de $\mathbb{R}^2$) y $[0, 1] \times \{0\}$ y $[0, 1] \times \{1\}$ son cerrados de $\mathbb{R}^2$ (producto de cerrados) y por tanto de cerrados en X.

Ya que X es acotado y cerrado en $\mathbb{R}^2$ (y f es continua), la aplicación f es cerrada. Por tanto una identificación, probando que $X/R_f = X/R \cong f(X) = \mathbb{S}^1$.