Tema 3

- Grado de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2011/12

Profesor: Rafael López Camino

1. Probar que $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$.

2. Sea un homeomorfismo $f : [a, b] \to [c, d]$ entre dos intervalos cerrados de $\mathbb{R}$. Probar que $f(\{a, b\}) = \{c, d\}$.

3. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y
$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$
Probar que τ es una topología y que (X, τ) no es conexo. Hallar las componentes conexas. Estudiar si el conjunto $A = \{b, d, e\}$ es conexo.

4. Estudidar la conexión de los siguientes espacios, todos ellos dotados de la topología euclídea:
   (a) $\{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$.
   (b) $\{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. $\{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$.
   (c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \neq 0\}$.
   (e) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
   (f) $\{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, +\infty)\} \cup \{(0, 0)\}$.

5. Probar que $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{S}^n$ no es conexo, $n \geq 1$ y hallar sus componentes conexas.

6. Probar que si $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, es un subconjunto no vacío, conexo y numerable, entonces D contiene un único punto.

7. Probar que un subconjunto finito de un espacio métrico con más de un elemento no es conexo.

8. Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar que
$$(X, \tau) \text{ es conexo} \Leftrightarrow \forall A \subset X,\ A \neq \emptyset, X, \text{ se tiene que } \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset.$$

9. Sean (X, τ) un espacio topológico y A, $B \subset X$ dos subespacios conexos tales que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Probar que $A \cup B$ es conexo.

10. Estudiar la conexión y las componentes conexas de los siguientes espacios:

    (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ es conexo.

    (b) Topologías del punto incluido y topología del punto excluido.

    (c) El conjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por los segmentos que une $(0, 0)$ con los puntos de la forma $(1, \frac{1}{n})$ junto con el segmento $(\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$.

    (d) $X = [-1, 1]$ y $\tau = \{O \subset X : 0 \notin O\} \cup \{O \subset X : (-1, 1) \subset O\}$.

11. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva, donde Y tiene n componentes conexas. Probar que X tiene al menos n componentes conexas.

12. Sean A y B dos subconjuntos cerrados no vacíos de (X, τ) tales que $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos. Probar que A y B son subespacios conexos.

13. Si A es un subconjunto abierto, cerrado y conexo de (X, τ), probar que A es una componente conexa de (X, τ).

14. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto conexo, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Se definen los subconjuntos de $A \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (dotado con la topología inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$) por:

$$G^+(f) = \{x, t) \in A \times \mathbb{R} : t > f(x)\}, G^-(f) = \{x, t) \in A \times \mathbb{R} : t < f(x)\}.$$

    Probar que $G^+(f)$ y $G^-(f)$ son abiertos conexos.

15. Probar que el complementario de un conjunto numerable en $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$, es conexo. Concluir que lo mismo ocurre en la esfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$.

16. Probar que el complementario de un subespacio afín en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, es conexo sí y sólo sí éste tiene dimensión menor o igual que $n - 2$.

17. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $A \subset X$ un subconjunto compacto. Probar que el conjunto de puntos de acumulación de A es también compacto.

18. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean $A_1, \ldots, A_n \subset X$ subconjuntos compactos. Probar que $\cup_{j=1}^n A_j$ es compacto.

19. Sean a, b dos elementos no contenidos en un conjunto infinito X. Llamemos $X^* = X \cup \{a, b\}$ y consideremos $\tau = \mathcal{P}(X) \cup \{X^*\}$. Probar que τ es una topología en X^*, y que (X^*, τ) tiene dos subconjuntos compactos cuya intersección es no compacta.

20. Si (X, τ) es Hausforff y $A, B \subset X$ son subconjuntos compactos, probar que $A \cap B$ es compacto. ¿Sería el resultado cierto si B fuese tan sólo cerrado?.

21. Sea (X,τ) un espacio topológico Hausforff y sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente decreciente de compactos no vacios en X. Probar que

    (a) $K = \cap_{n=1}^{\infty} K_n$ es un compacto no vacío.

    (b) Si O es un abierto conteniendo a K, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subset O$ para todo $n \geq N$.

22. Estudiar la compacidad de los siguientes espacios:

    (a) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

    (b) $\{(x, \sin(1/x)) : x \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$.

    (c) $\{(0,y) : y \in [-1,1]\} \cup \left[\cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}((\frac{1}{n},0), \frac{1}{n(n+1)})\right]$, donde $\overline{B}(p,r)$ representa la bola euclídea de centro $p \in \mathbb{R}^2$ y radio r.

23. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se considera en X la topología $\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$. Probar que A es compacto pero no $\overline{A}$. Si $B \subset X - A$, estudiar la compacidad de B y $A \cup B$.

24. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ generada por $\{(a,b) : a < b\} \cup \{(a,b) \cap \mathbb{Q} : a,b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$. Demostrar que $[0,1]$ no es un subespacio compacto de $(\mathbb{R},\tau)$.ç

25. Sea X un espacio de Hausdorff y C_1, C_2 dos subconjuntos compactos y disjuntos de X. Probar que existen abiertos disjuntos $O_1, O_2 \in \tau$ tales que $O_i \supset C_i$.

26. Sea $f : (X_1,\tau_1) \to (X_2,\tau_2)$ una aplicación entre espacios topológicos compactos y Hausforff. Probar que f es continua si y sólo si Graf(f) es un subespacio cerrado de $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$.

27. En el intervalo $(0,1)$ se considera la topología $\tau = \{(0, 1-1/n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, (0,1)\}$. Probar que $A \subset (0,1)$ es compacto en $((0,1),\tau)$ si y sólo si $\sup A < 1$.

28. Sea (X,τ) un espacio topológico y $p \notin X$. Sea $X^* = X \cup \{p\}$ y $\tau^* = \tau \cup \{X^*\}$. Probar que τ^* es una topología en X^* y estudiar si (X^*,τ^*) es compacto. Si (X,τ) es conexo ¿es (X^*,τ^*) conexo también?

29. Sea (X,d) un espacio métrico, A un subconjunto compacto y $B \subset X$. Probar que existe $a \in A$ tal que $d(a,B) = d(A,B)$.

30. Dar un ejemplo de un espacio topológico (X,τ) y $A \subset X$ satisfaciendo:

    (a) A no es compacto y $\overline{A}$ sí lo es.

    (b) A es compacto y $\overline{A}$ no lo es.

(c) A es compacto y $\mathring{A}$ no lo es.

(d) A no es compacto y $\mathring{A}$ sí lo es.