Tema 2

- Grado de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2011/12
Profesor: Rafael López Camino

1. Sea $\mathbb{N}$ con la topología de los divisores y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si f respecta la divisibilidad, esto es, si $n|m$, entonces $f(n)|f(m)$.

2. Sea un espacio topológico (X, τ) con la propiedad de que para cualquier espacio (Y, τ') y aplicación $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, f es continua. Probar que τ es la topología discreta. De forma análoga, probar que si para todo espacio (Y, τ') y aplicación $f : (Y, \tau') \to (X, \tau)$, f es continua, entonces τ es la topología trivial.

3. Encontrar dos espacios topológicos (X, τ) y (Y, τ'), un subconjunto $A \subset X$ y una aplicación $f : X \to Y$ de forma que f no sea continua en ningún punto de A y $f_{|A}$ sea continua.

4. Sean $f, g : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ dos funciones continuas. Estudiar si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados:

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\},\ \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}.$$

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\},\quad \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}.$$

5. Probar que la aplicación $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ es abierta. Probar también que $p|_{[0,1)} : [0, 1) \to \mathbb{S}^1$ es continua y biyectiva, pero no abierta (en particular, no es un homeomorfismo).

6. Sea $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología a derechas. Caracterizar las aplicaciones continuas de $(\mathbb{R}, \tau)$ en sí mismo.

7. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología de Sorgenfrey τ_S. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

8. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_i) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$, $f(x) = x^2$, donde τ_i es la topología del punto incluido para $p = 0$.

9. Se consideran X e Y dos conjuntos, p y q sendos puntos en X e Y respectivamente y consideramos las topologías del punto excluido τ_p y τ_q. Probar que $f : (X, \tau_p) \to (Y, \tau_q)$ es una aplicación continua si y sólamente si $f(p) = q$ ó f es constante.

10. Establecer un homeomorfismo entre $A = (0, 1) \cup [2, 3]$ y $(-1, 0) \cup [3, 4]$.

11. Probar que toda aplicación biyectiva $f : (X, \tau_{CF}) \to (X, \tau_{CF})$ es un homeomorfismo.

12. Probar que la esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa a cualquier elipsoide de $\mathbb{R}^3$.

13. Probar que $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

14. Probar que cualquier transformación afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua. Como consecuencia, probar que dos subespacios afines de $\mathbb{R}^n$ con la misma dimensión son homeomorfos.

15. Hallar un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 - \{(0,0\}$ y $\mathbb{S}^1 \times (a, b)$, $a < b$.

16. Establecer un homeomorfismo entre $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}$ y $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

17. Probar que el cono $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\}$ es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

18. Probar que $\mathbb{S}^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$ es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times (-1, 1)$.

19. Sean en $\mathbb{R}$ las topologías τ_1 y τ_2 del punto excluido para $p = 1$ y $q = 2$, respec. En $(\mathbb{R}^2, \tau_1 \times \tau_2)$, hallar el interior y la adherencia de la diagonal principal.

20. Sean dos espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2). Se considera un subconjunto abierto $A \subset X_1 \times X_2$ en la topología producto. Para cada $x_1 \in X_1$ se define

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\}.$$

Probar que A_{x_1} es un abierto de X_2. Dar ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que A no es abierto pero A_x sí es abierto para cada $x \in \mathbb{R}$.

21. Sea $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Hallar la adherencia del conjunto $A = \{(a, a), (b, b)\}$ en $(X \times X, \tau \times \tau)$.

22. En $\mathbb{R}$, sea τ_S la topología de Sorgenfrey y τ_{in} la topología del punto incluido para $p = 0$. En el espacio $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_{in})$, hallar el interior y la adherencia de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$. Estudiar la continuidad de la función $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_{in})$ dada por $f(x, y) = x$.

23. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ_S que tiene por base $\beta_S = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ y τ_d la de base $\beta_d = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. En el producto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_d)$ probar que el conjunto $D = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ tiene la topología discreta.

24. Sea $\beta = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ y τ la topología que genera en $\mathbb{R}$. Calcular el interior y adherencia del conjunto $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau)$.

25. Sea un espacio topológico (X,τ) y sea $A = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$. Establecer un homeomorfismo entre (X,τ) y $(A,(\tau \times \tau)_{|A})$. Estudiar cuándo A es abierto en $(X \times X, \tau \times \tau)$.

26. Sean (X,τ_p) e (Y,τ'_q) dos espacios topológicos con las topologías del punto excluido para $p \in X$ y $q \in Y$ respectivamente. En $X \times Y$ se considera la topología $\tau_{(p,q)}$ del punto excluido para el punto $(p,q) \in X \times Y$. Estudiar la relación entre $\tau_p \times \tau'_q$ y $\tau_{(p,q)}$ y si la aplicación $f : (X \times Y, \tau_{(p,q)}) \to (X \times Y, \tau_p \times \tau'_q)$ dada por $f(x,y) = (x,q)$ es continua.

27. En $\mathbb{R}^n$ se considera la relación de equivalencia $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$. Probar que $\mathbb{R}^n/R$ es homeomorfo a $[0,+\infty)$.

28. En $\mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\}$, $n \geq 2$, se considera la relación de equivalencia $xRy \Leftrightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$. Probar que el espacio cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$.

29. Sea $m \in \mathbb{R}$ un número fijo y la relación R en $\mathbb{R}^2$ dada por $(x,y)R(x',y')$ si $y' - mx' = y - mx$. Probar que $\mathbb{R}^2/R \cong \mathbb{R}$.

30. Sea (X,τ) un espacio topológico Haussdorff $f : X \to X$ un homeomorfismo tal que $f \circ f = 1_X$. Se define en X la relación xRx' si son iguales o $x' = f(x)$. Estudiar si X/R es Haussdorff.

31. En $\mathbb{R}^3$ se define la relación de equivalencia $(x,y,z)R(x',y',z')$ si $(x,y) = (x',y')$. Probar que $\mathbb{R}^3/R \cong \mathbb{R}^2$.

32. En $\mathbb{R}$ se considera la relación de equivalencia R definida por xRy si y sólo si $x = y$ o $x,y \in \mathbb{Q}$. Estudiar si el espacio cociente es Hausforff.

33. Sea X un espacio topológico. En $X \times \mathbb{R}$ se considera el conjunto $Y = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$ y la relación de equivalencia en Y dada por $(x,t)R(x't')$ si $x = x'$. Probar que el espacio cociente Y/R es homeomorfo a X.