Tema 1-3. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

- Grado de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2011/12

Profesor: Rafael López Camino

1. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, calcular el interior y la adherencia de los siguientes conjuntos:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (b) $B = [0, 1] \times \{0\}$.
   (c) $C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
2. En $\mathbb{R}^3$ con la topología usual, calcular el interior y la adherencia de los siguientes conjuntos:
   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 1\}$.
   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -1 \leq z \leq 1\}$.
3. En $\mathbb{R}$ se considera $\tau = \{O \subset \mathbb{R}; O = U - B, U \in \tau_u, B \subset (0, 1]\}$. Probar que $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio topológico. Hallar el interior y la adherencia de $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $[-1, \frac{1}{2})$ y $(0, 1]$.
4. En $\mathbb{R}$, se define $\beta = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cup (n, \infty); x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$. Probar que β es base de una topología en $\mathbb{R}$. Hallar el interior y la adherencia de $[2, \infty)$ y $(-\infty, 2]$.
5. Probar que $\beta = \{[a, b); a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, a < b\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$. Hallar el interior y la adherencia de: $\mathbb{Q}$, $[0, 1]$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $[0, \sqrt{2}]$.
6. En $\mathbb{N}$, se dice que $O \subset \mathbb{N}$ satisface la propiedad (P) si: "si $n \in O$ y m divide a n, entonces $m \in O$". Probar que $\tau = \{O \subset \mathbb{N}; O \text{ satisface (P)}\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en $\mathbb{N}$. Hallar una base de entornos de cada elemento y hallar el interior y la adherencia de: $\{4, 5\}$ y $\{2n; n \in \mathbb{N}\}$.
7. Probar que $\beta = \{\mathbb{R} \times \{x\}; x \in \mathbb{R}\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}^2$. Hallar el interior y la adherencia de los conjuntos del ejercicio 1.
8. Lo mismo que el anterior, pero cambiando β por $\beta = \{\mathbb{R} \times (a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.
9. Sea X un conjunto y $p \in X$ un punto distinguido. Hallar el interior y la adherencia de un conjunto para las topologías del punto incluido y del punto excluido.

10. En $\mathbb{N}$ con las dos topologías dadas en clase, hallar el interior y la adherencia de los siguientes conjuntos: $\{1,5\}$ y $\{2n; n \in \mathbb{N}\}$.

11. En la topología de Sorgenfrey, hallar el interior y la adherencia de $\mathbb{Z}$, $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$ y $(0,\infty)$.

12. Sea $A = [0,1) \cup (1,3) \cup \{5\}$ con la topología usual.

    (a) Estudiar si $\{5\}$ y $(1,3)$ son abiertos o cerrados en A.

    (b) Hallar el interior y la adherencia en A de $[0,1)$.

13. Sea un espacio métrico (X,d) y $A \subset X$. Se define la distancia de $x \in X$ a A como $d(x,A) = \inf\{d(x,a); a \in A\}$. Probar que $x \in \overline{A}$ si y sólamente si $d(x,A) = 0$.